Dominique Lépingle

Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 167-169
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__167_0>

Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes

D.Lépingle

A la suite d'une remarque de C. Stricker, I. Karatzas, J.P. Lehoczky et S.E. Shreve ont été amenés [2] pour rectifier un précédent énoncé [1] à donner une réponse négative à la question suivante:

(Q) *si le produit de deux martingales strictement positives est une martingale uniformément intégrable, sont-elles toutes deux obligatoirement uniformément intégrables?*

Le contre-exemple qu'ils proposent est obtenu avec une filtration dont chaque tribu $\mathcal{F}_n$ est engendrée par une partition $\mathcal{P}_n$ de Ω en $2n+1$ éléments, $\mathcal{P}_{n+1}$ étant obtenue en coupant en trois l'un des atomes de $\mathcal{P}_n$.

En fait il suffit pour trouver des contre-exemples de s'intéresser au cas plus simple où $\mathcal{P}_n$ contient $n+1$ atomes, $\mathcal{P}_{n+1}$ étant obtenue en séparant en deux l'un des atomes de $\mathcal{P}_n$. On peut dans ce cas caractériser entièrement les situations où la réponse à (Q) est positive ou négative.

- - - - -

Travaillons donc sur la filtration non triviale la plus élémentaire: soit une partition dénombrable $(A_k, k \geq 1)$ de Ω, la série de terme général $p_k = P(A_k) > 0$ étant de somme 1. On pose pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned} B_n &= \textstyle\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \\ q_n &= P(B_n) = \textstyle\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(A_1, \ldots, A_n, B_n). \end{aligned}$$

On se donne maintenant une suite $(a_k, k \geq 1)$ de nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \leq 1$ et on s'intéresse à la martingale

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k} + \frac{r_n}{q_n} 1_{B_n}$$

où pour tout $n \geq 0$

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k a_k \, .$$

La martingale (X_n) converge en tout point vers

$$X_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{A_k}$$

et elle est uniformément intégrable si et seulement si

$$E(X_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k = 1 \, ,$$

ou encore

$$r = \lim_{n \to \infty} r_n = 0 \, .$$

Si $(Y_n, n \geq 0)$ est une martingale associée dans les mêmes conditions à la suite $(b_k, k \geq 1)$ et si $s_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k b_k$, la suite $(X_n Y_n, n \geq 0)$ est une martingale si et seulement si pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{n-1}} (X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) dP \\ &= (a_n - \tfrac{r_{n-1}}{q_{n-1}})(b_n - \tfrac{s_{n-1}}{q_{n-1}}) p_n + (\tfrac{r_n}{q_n} - \tfrac{r_{n-1}}{q_{n-1}})(\tfrac{s_n}{q_n} - \tfrac{s_{n-1}}{q_{n-1}}) q_n \\ &= \frac{(q_n r_{n-1} - q_{n-1} r_n)(q_n s_{n-1} - q_{n-1} s_n)}{p_n q_{n-1} q_n} \, . \end{aligned}$$

Les martingales (X_n) et (Y_n) sont donc orthogonales si et seulement si pour tout $n \geq 1$

$$\left(\frac{r_n}{q_n} - \frac{r_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\frac{s_n}{q_n} - \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = 0 \, . \tag{1}$$

Supposons que $(X_n Y_n)$ soit une martingale uniformément intégrable: outre la condition (1), cela implique que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n s_n}{q_n} = 0 \, . \tag{2}$$

Deux cas peuvent se présenter:

- (I) $\boxed{\limsup \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1}$.

On peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_p, p \geq 1)$ telle que

$$\prod_{p=1}^{\infty} \frac{q_{n_p}}{q_{n_p - 1}} > 0 \, ,$$

une suite (r_n) strictement décroissante avec $r_0 = 1$, $r > 0$,

$$r_{n_p} = \frac{q_{n_p}}{q_{n_p - 1}} r_{n_p - 1} \,, \qquad p \geq 1$$

et une suite (s_n) strictement décroissante telle que $s_0 = 1$, que $q_n^{-1} s_n$ soit constant dans chaque intervalle $[n_p, n_{p+1}[$ et que

$$\lim_{p \to \infty} \frac{s_{n_p}}{q_{n_p}} = 0 \,.$$

Dans ce cas,

$$E(X_\infty) < 1 = E(X_\infty Y_\infty) = E(Y_\infty)$$

et la réponse est **non.**

- (II) $\boxed{\limsup \frac{q_{n+1}}{q_n} < 1}$.

S'il existe une infinité de n tels que $q_{n-1} r_n = q_n r_{n-1}$, alors $r = 0$; sinon, à partir d'un certain rang, $q_n^{-1} s_n$ est constant et la condition (2) exige encore $r = 0$. Nécessairement,

$$E(X_\infty) = E(Y_\infty) = E(X_\infty Y_\infty) = 1$$

et la réponse est **oui.**

Exemple de la situation (I): $q_n = (n+1)^{-1}$.
Exemple de la situation (II): $q_n = 2^{-n}$.

- - - - -

Pour retrouver le cadre de [2], il suffit d'utiliser la filtration $(\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{2n})$. L'intérêt est qu'alors la martingale déduite de X peut éventuellement engendrer toute la filtration.

RÉFÉRENCES

[1] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve. *Equivalent martingale measures and optimal market completions.*

[2] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve. *Retraction of equivalent martingale measures and optimal market completions.*

Département de Mathématiques
Université d'Orléans
F-45067 Orléans Cedex 2