Paul-André Meyer

Application du « bébé Fock » au modèle d'Ising

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 52-60
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__52_0>

APPLICATION DU "BÉBÉ FOCK" AU MODÈLE D'ISING

par P.A. Meyer

Le calcul exact de la fonction de partition du modèle d'Ising à deux dimensions est un tour de force mathématique dû à Onsager (Phys. Rev. 65, 1944). Une version améliorée et très simplifiée a été donnée par Bruria Kaufman (Phys. Rev. 76, 1949). Ici je me suis beaucoup servi d'exposés de D. Bennequin à Strasbourg.

Cet exposé (fait au petit séminaire de probabilités quantiques de Paris VI) n'apprendra rien au lecteur au sujet du modèle d'Ising lui même, ou des transitions de phase. J'ai seulement cherché à étudier la manière dont la transformation de Jordan–Wigner, c'est à dire le passage des bosons discrets aux fermions discrets (sur le "bébé Fock" longuement étudié dans les volumes précédents) permet de se tirer d'un calcul de valeurs propres qui autrement serait inextricable.

Le problème. On considère un réseau rectangulaire avec n colonnes et m lignes. En chaque site est placé un spin classique, pouvant prendre les valeurs ± 1. On obtient ainsi une "configuration" σ, dont l'énergie est définie (à une constante additive près) par

$$H(\sigma) = u \sum_{ij} \sigma_i^j \sigma_{i+1}^j + v \sum_{ij} \sigma_i^j \sigma_i^{j+1}$$

où u et v sont deux constantes négatives (l'énergie est plus petite si les spins sont alignés). On convient d'enrouler la configuration sur un tore : $\sigma_i^{m+1} = \sigma_i^1$ et $\sigma_{n+1}^j = \sigma_1^j$, en espérant que l'"effet de bord" disparaîtra quand on passera au continu.

Sur l'ensemble des configurations, on est amené (suivant les règles de la mécanique statistique) à introduire la loi qui attribue à chaque configuration σ la probabilité $\frac{1}{Z} e^{-H(\sigma)/kT}$. La quantité que l'on veut calculer est Z, c'est à dire après un changement de notation, où l'on considère une configuration σ comme un ensemble de m lignes, qui sont des trajectoires possibles ω_j d'un jeu de Bernoulli à n coups

$$Z = \sum_{\omega_1,\dots,\omega_m} e^{\lambda \sum_{ij} \omega_j(i)\,\omega_j(i+1) + \beta \sum_{ij} \omega_j(i)\,\omega_{j+1}(i)}$$

où cette fois les deux constantes sont positives. La notation λ est provisoire.

Calculs préliminaires sur le "bébé Fock". Soit Ω l'espace probabilisé des parties de pile ou face de longueur n. Le bébé Fock est l'espace de Hilbert $\Gamma = L^2(\Omega)$, réel ou bien complexe, muni d'une conjugaison naturelle. La dimension de Γ est donc 2^n. Comme l'espace probabilisé Ω est un produit de n espaces de Bernoulli élémentaires isomorphes à $\mathbb{C}^2$, Γ est isomorphe à $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Nous désignons par $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les trois matrices de Pauli;

celles ci peuvent opérer sur chaque facteur du produit tensoriel, ce qui permet de définir en chaque "site" $k = 1, \dots, n$ les opérateurs $\sigma_x(k)\dots$ sur Γ.

Chaque espace de Bernoulli $\mathbb{C}^2$ a une base notée e_+, e_-, et la base correspondante du produit tensoriel Γ est indexée par tous les systèmes possibles de n signes $\pm$, c'est à dire par les trajectoires ω de pile ou face. Notons en passant que les éléments de base comportant un nombre pair (impair) de signes $-$ engendrent le sous-espace pair Γ_+ (impair Γ_-), de dimension 2^{n-1}, les deux sous espaces propres de *l'opérateur de parité* $P = \sigma_z \otimes \dots \otimes \sigma_z$.

Introduisons les deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes (la seconde est diagonale)

$$a_\omega^{\omega'} = e^{\lambda \sum_i \omega(i)\omega'(i)} \quad ; \quad b_\omega^{\omega'} = \delta_\omega^{\omega'} e^{\beta \sum_i \omega(i)\omega'(i+1)} .$$

On va partir de la relation (évidente si l'on prend la peine d'écrire ce qu'est la trace d'un produit)

$$Z = \mathrm{Tr}((\mathbf{AB})^m) .$$

Donc en principe "il suffit" de calculer les 2^n valeurs propres ξ_α de la matrice $\mathbf{AB}$, et alors $Z = \sum_\alpha \xi_\alpha^m$. La méthode va consister d'abord à exprimer $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ au moyen de produits tensoriels de matrices de Pauli (calculs sur le bébé Fock commutatif), puis à passer au bébé Fock anticommutatif (transformation de Jordan–Wigner), puis à ramener au moyen de la théorie des matrices de spin le calcul des 2^n valeurs propres à celui des $2n$ valeurs propres d'une rotation dans un espace à $2n$ dimensions — calcul lui même non trivial, mais faisable.

Nous verrons plus loin que $\mathbf{A}$ est autoadjointe > 0 (sur Γ considéré comme espace de Hilbert complexe). Il sera utile de remarquer que, pour une telle matrice $\mathbf{A}$, les valeurs propres de $\mathbf{AB}$ sont les mêmes que celles de $\mathbf{A}^{-1/2}(\mathbf{AB})\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{1/2}$, et d'ailleurs on a une relation simple entre les vecteurs propres des deux matrices.

Expression de $\mathbf{B}$. On considère la matrice de Pauli $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on remarque

$$\sigma_z(k)\omega = \pm\omega \quad \text{si} \quad \omega(k) = \pm 1$$

et donc $\sigma_z(k)\sigma_z(k+1)\omega = \omega$ si $\omega(k) = \omega(k+1)$, et $-\omega$ sinon. On en déduit

$$\mathbf{B} = e^{\beta \sum_j \sigma_z(j)\sigma_z(j+1)} . \tag{1}$$

C'est une matrice réelle symétrique inversible.

Expression de $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}$ est un produit tensoriel $W \otimes \dots \otimes W$, où W est la matrice 2×2 (dans la base naturelle e_+, e_- du jeu de Bernoulli)

$$W e_+ = e^\lambda e_+ + e^{-\lambda} e_- \ , \ W e_- = e^{-\lambda} e_+ + e^\lambda e_- .$$

Soit σ_x la matrice de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors la matrice $W' = \rho e^{\alpha\sigma_x}$ vaut

$$W' e_+ = \rho \,\mathrm{Ch}\,\alpha e_+ + \rho \,\mathrm{Sh}\,\alpha e_- \ , \ W e_- = \rho \,\mathrm{Sh}\,\alpha e_+ + \rho \,\mathrm{Ch}\,\alpha e_- .$$

On a donc $W' = W$ à condition que

(2) $$\mathrm{Th}\,\alpha = e^{-2\lambda}\ ,\ \rho = (2\,\mathrm{Sh}\,2\lambda)^{1/2}\ .$$

Ceci étant fait, on a

(3) $$\mathbf{A} = \rho^n e^{\alpha \sum_j \sigma_x(j)}\ .$$

C'est aussi une matrice réelle symétrique inversible.

Conventions. Afin de retrouver la transformation de Jordan–Wigner sous sa forme habituelle, nous allons dans la suite des calculs *échanger les matrices σ_x et σ_z* dans les expressions (1) et (3), ce qui revient à tout conjuguer par un automorphisme réel de Γ et ne modifie pas les valeurs propres.

Nous allons simplifier les notations pour les matrices de Pauli, en les écrivant x, y, z. Enfin, nous oublierons désormais le facteur scalaire ρ^n de la matrice $\mathbf{A}$. Celui-ci n'intervient que dans le calcul final de limite thermodynamique.

Fermionisation. On introduit maintenant des opérateurs de fermions. On considère les $2n$ matrices de Dirac suivantes (matrices de carré $\mathbf{I}$ qui anticommutent); on pourra aussi les noter γ_i, avec $1 \le i \le p = 2n$)

$$\begin{aligned} X_1 &= x \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots, & Y_1 &= y \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots \\ X_2 &= z \otimes x \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots, & Y_2 &= z \otimes y \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots \\ X_3 &= z \otimes z \otimes x \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots, & Y_2 &= z \otimes z \otimes y \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots \mathit{etc.} \end{aligned}$$

On a alors, comme $xy = iz$

$$X_1 Y_1 = iz \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \ldots\ ,\ X_2 Y_2 = \mathbf{I} \otimes iz \otimes \mathbf{I} \ldots\ ,$$

donc (3) devient (en tenant compte de l'échange entre x et z et de la disparition du facteur scalaire)

(4) $$\mathbf{A} = e^{-i\alpha \sum_j X_j Y_j}\ .$$

Les n produits $X_i Y_j$ commutent. On peut remarquer que les X_k sont réelles symétriques (autoadjointes), les iY_k sont réelles antisymétriques (les Y_k sont autoadjointes), et les produits $iX_j Y_k$ sont réels symétriques (complexes autoadjoints) de carré $\mathbf{I}$.

Passons à $\mathbf{B}$. Comme $yz = ix$ on a

$$Y_1 X_2 = ix \otimes x \otimes \mathbf{I} \ldots = i\sigma_x(1)\sigma_x(2)\ ,\ Y_2 X_3 = \mathbf{I} \otimes ix \otimes x \otimes \mathbf{I} \ldots = i\sigma_x(2)\sigma_x(3) \ldots$$

donc d'après (1) (avec remplacement de z par x) on a *presque*

$$\mathbf{B} = e^{\beta \sum_j \sigma_x(j)\sigma_x(j+1)} = e^{-i\beta \sum_j Y_j X_{j+1}}$$

car il y a une différence dans le dernier terme : $Y_n X_1$ vaut

$$iy \otimes z \otimes z \ldots \otimes z \otimes y \quad \text{au lieu de} \quad i \otimes x \otimes \mathbf{I} \ldots \otimes \mathbf{I} \otimes x\ .$$

Pour rétablir la valeur correcte il faut remplacer $Y_n X_1$ par $-Y_n X_1 P$ où $P = z \otimes z \ldots \otimes z$ est la *parité* (cet opérateur est aussi égal à $(-i)^n X_1 Y_1 \ldots X_n Y_n$, le produit de toutes les "matrices de Dirac"). Il va falloir se débarrasser de cette désagréable singularité. On remarque que les produits $X_j Y_j$ et $Y_j X_{j+1}$ laissent fixes les deux espaces $\Gamma_\pm$, et il en est de même de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Introduisons les deux matrices

$$\mathbf{B}_+ = e^{-i\beta \sum_{j=1}^{n-1} Y_j X_{j+1} + i\beta Y_n X_1} \quad ; \quad \mathbf{B}_- = e^{-i\beta \sum_{j=1}^{n} Y_j X_{j+1}} \quad ;$$

nous avons alors $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\pm$ sur $\Gamma_\pm$. Les deux matrices ainsi obtenues n'ont plus de terme singulier, mais il faudra prendre garde à séparer leurs vecteurs propres pairs et impairs (*i.e.* dans Γ_+ et Γ_-).

Spineurs Nous allons présenter sommairement l'essentiel de la théorie des matrices de spin. Cette présentation n'indique pas certaines subtilités commodes pour traiter le groupe orthogonal en dimension impaire (par exemple, nous ne "tordons" pas les automorphismes intérieurs).

Nous appellerons "premier chaos" $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des combinaisons linéaires complexes des matrices de Dirac $\gamma_k = X_k$, $\gamma_{n+k} = Y_k$. Les produits de 2, de 3... matrices de Dirac distinctes engendrent le second, le troisième... chaos, et quand on a atteint au niveau $2n$ le produit de toutes les matrices de Dirac on a construit une base de l'espace des opérateurs sur Γ.

Le premier chaos est muni d'une forme bilinéaire complexe naturelle (U, V), donnée par l'anticommutateur $\{U, V\} = UV + VU = 2(U, V)\mathbf{I}$. Nous étendons alors le sens du mot "matrice de Dirac" en appelant ainsi tout élément γ du premier chaos tel que $\gamma^2 = \mathbf{I}$. On peut remarquer que les matrices de Dirac X_i, Y_j sont autoadjointes en tant qu'opérateurs sur Γ : donc le premier chaos est stable par passage à l'adjoint, et admet aussi une structure hermitienne.

Etant donné un opérateur linéaire inversible R sur Γ, on dira que R appartient au *groupe de Clifford* G si l'automorphisme intérieur $\mathcal{I}_R = R^{-1} \bullet R$ préserve le premier chaos $\mathcal{C}_1$. On désigne alors par $\mathcal{O}(R)$ la transformation linéaire induite sur $\mathcal{C}_1$. Il est clair que G est bien un groupe. Les deux remarques suivantes sont évidentes

— Comme l'automorphisme intérieur préserve l'anticommutateur $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathcal{C}_1$, il préserve aussi la forme bilinéaire, donc $\mathcal{O}(R)$ est une *transformation orthogonale complexe* sur $\mathcal{C}_1$. Pour faire court, on appellera ces transformations des *rotations*.

— Si l'on connaît $\mathcal{O}(R)$, on connaît aussi $\mathcal{I}_R$ puisque $\mathcal{C}_1$ engendre toute l'algèbre. Sachant que $\mathcal{I}_A = I$ si et seulement si A est un multiple scalaire de l'identité, on voit que $\mathcal{I}_R$ détermine R à un facteur scalaire près.

EXEMPLE. Soit $R = \gamma$ une matrice de Dirac ($\gamma \in \mathcal{C}_1$, $\gamma^2 = \mathbf{I}$). Nous pouvons la considérer comme premier élément d'une base $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ de $\mathcal{C}_1$, orthonormale pour la forme bilinéaire complexe, et cette base est formée de matrices de Dirac. Il est alors facile de calculer $\mathcal{O}(R)$: c'est la transformation $\Sigma_\gamma = -S_\gamma$, où S_γ est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à γ. Comme nous sommes en dimension paire, il s'agit d'une transformation orthogonale directe. A cause du signe $-$, nous dirons que c'est la *Σymétrie d'axe* γ. Nous venons de voir que tout élément du premier chaos, non isotrope (*i.e.* de carré non nul) appartient au groupe G, la transformation associée étant une Σymétrie.

Un théorème classique de Cartan affirme que toute transformation orthogonale directe (inverse) est un produit d'un nombre pair (impair) de symétries. Elle est donc aussi produit d'un nombre pair (impair) de Σymétries. Il en résulte deux choses

— L'application $R \longmapsto \mathcal{O}(R)$ de G sur le groupe orthogonal est surjective.

— Tout élément du groupe de Clifford est de la forme $R = t\gamma_1 \ldots \gamma_k$, où les γ_i sont des matrices de Dirac et t est un scalaire. De plus, k est pair (impair) si $\mathcal{O}(R)$ est directe (inverse).

On peut réduire l'ambiguïté concernant t de la manière suivante. La parité P anticommute à toutes les matrices du premier chaos. Si l'on calcule $PRP^{-1}R$, on trouve que c'est un opérateur scalaire égal à $\pm t^2$. On peut donc normaliser R en lui imposant que ce scalaire soit égal à ± 1, mais cela ne détermine t qu'au signe près, et on ne peut pas lever cette dernière ambiguïté. On dira malgré tout que R ainsi normalisée est "la" matrice de spin représentant $\mathcal{O}(R)$. "La" matrice de spin associée au produit de deux rotations est le produit des matrices de spin correspondantes.

Le premier miracle qui va permettre d'avancer le calcul est que : *les matrices* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_\pm$ *sont des matrices de spin,* d'où le même résultat pour leur produit. Cela va ramener (n° suivant) le calcul de leurs 2^n valeurs propres à celui des $2n$ "angles de rotation" du produit de deux rotations simples. Le second miracle tient à la structure particulière de ces rotations, et permet de conclure.

Valeurs propres d'une matrice de spin. Considérons d'abord un opérateur J sur Γ de carré $-\mathbf{I}$, et l'opérateur

$$R = e^{\frac{\theta}{2}J} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}J \quad \text{(Euler)} \qquad ; \quad R^{-1} = e^{-\frac{\theta}{2}J} ,$$

où θ peut être complexe. On a pour tout opérateur H sur Γ

$$R^{-1}HR = \cos^2\frac{\theta}{2}H - \sin^2\frac{\theta}{2}JHJ + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(HJ - JH) .$$

On retrouve donc H (bien sûr !) si H et J commutent, et si elles anticommutent on trouve

$$R^{-1}HR = \cos\theta H + \sin\theta HJ .$$

En particulier, prenons pour J le produit $\gamma_k\gamma_\ell$ de deux éléments d'une base de matrices de Dirac (cela s'appliquera à X_kY_k et à Y_kX_{k+1}), et pour H une matrice γ_j. Alors la valeur de $R^{-1}\gamma_jR$ est

$$\gamma_j \quad \text{si} \quad j \neq k,\ell\,, \ \cos\theta\gamma_k + \sin\theta\gamma_\ell \quad \text{si} \quad j = k\,, \ -\sin\theta\gamma_k + \cos\theta\gamma_\ell \quad \text{si} \quad j = \ell\,.$$

On trouve donc un élément du premier chaos, et on voit que R appartient au groupe de Clifford, et constitue l'une des deux matrices de spin associées à la rotation d'angle (complexe) θ dans le plan de γ_k et γ_ℓ. En fait, la présence des demi-angles $\theta/2$ dans l'expression de R fait que l'on obtient les deux matrices de spin inséparablement. Les valeurs propres de J sont i et $-i$, chacune avec la multiplicité 2^{n-1} (on le voit en se plaçant dans le cas concret de X_1Y_1, le cas général étant isomorphe), celles de R sont donc $e^{\pm i\theta/2}$ avec la même multiplicité.

L'étape suivante consiste à prendre pour R une matrice de la forme $e^{i\sum_k \theta_k X_kY_k/2}$, qui est un produit de n matrices de spin, donc une matrice de spin. Il est facile de construire ici une base de vecteurs propres de la forme $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$, où pour chaque k a_k est un vecteur propre de la rotation correspondante. Il en résulte que les valeurs propres de R sont exactement les 2^n nombres de la forme $e^{\frac{i}{2}\sum_k \pm\theta_k}$, tandis que les valeurs propres de la rotation induite sur le premier chaos sont exactement les $2n$ nombres $\pm i\theta_1, \ldots, \pm i\theta_n$.

La troisième étape devrait être le résultat général suivant : si une rotation (directe) sur le premier chaos admet les $2n$ valeurs propres $\chi_1, \chi_1', \ldots, \chi_n, \chi_n'$ satisfaisant à $\chi_k\chi_k' = 1$ (nous écrivons χ_k et χ_k' plutôt que $e^{\pm i\theta_k}$, parce que dans le cas du modèle d'Ising les χ_k seront réels), alors les 2^n valeurs propres de "la" matrice de spin associée sont les nombres

$$\sqrt{\chi_1}^{\pm 1} \cdots \sqrt{\chi_n}^{\pm 1} ,$$

où l'on note une fois pour toutes $\sqrt{\chi_k}$ l'une des deux racines carrées. On n'a donc qu'une ambiguïté de signe globale, correspondant à l'ambigïté sur "la" matrice de spin. Il est facile d'établir ce résultat lorsque la rotation $\mathcal{O}(R)$ est le produit de n rotations d'angles (complexes) $\theta_1, \ldots, \theta_n$ dans n plans non isotropes orthogonaux. On peut en effet choisir une base orthonormale de matrices de Dirac $(\gamma_1, \gamma_1'), \ldots, (\gamma_n, \gamma_n')$ adaptée à ces n plans, et l'on peut se ramener par un isomorphisme au cas où les matrices de Dirac sont $X_1, Y_1 \ldots X_n, Y_n$.

Pour passer au cas général, il faudrait savoir que toutes les rotations complexes A (directes) admettent une telle représentation. Ce résultat est bien connu pour les rotations réelles, mais je ne suis malheureusement pas arrivé à trouver une référence dans les "classiques", Artin, Dieudonné, Bourbaki... D'après les informations que j'ai pu recueillir, il semble que ce résultat soit faux. Une rotation plane étant diagonalisable, il impliquerait que toute matrice orthogonale complexe est diagonalisable, ce qui n'a pas lieu. En revanche, "presque toutes" les rotations complexes sont de ce type, et cela suffit pour que la formule concernant les valeurs propres soit correcte.

On peut s'en tirer à la main dans le cas particulier présenté ici. car les rotations du premier chaos auxquelles nous avons affaire ne sont pas arbitraires : nous verrons qu'elles sont représentées dans la base des X_k, Y_k par des matrices *autoadjointes cycliques,* et la décomposition suivant des plans orthogonaux peut s'établir par un argument fait sur mesure. Enfin, Bakry a suggéré de faire tout le raisonnement dans le cas où les constantes α et β sont imaginaires pures ; on n'a pas alors affaire à des rotations hyperboliques, mais à de vraies rotations, et on peut appliquer les théorèmes classiques. On fait un prolongement analytique tout à la fin, dans la formule donnant la trace.

Calcul des valeurs propres de A et $\mathbf{B}_{\pm}$. Nous allons appliquer cela au modèle d'Ising. Pour y voir clair, nous écrirons explicitement les matrices de rotation sur le premier chaos pour $n = 3$ ($n = 2$ ne suffit pas ; nous aurons donc des matrices 6×6), dans la base (X_k, Y_k).

Voici d'abord la représentation de la matrice de spin $\mathbf{A}^{1/2} = e^{-i\frac{\alpha}{2}\sum_k X_k Y_k}$

$$(5) \qquad \mathcal{O}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathrm{a} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ch}\,\alpha & -i\,\mathrm{Sh}\,\alpha \\ i\,\mathrm{Sh}\,\alpha & \mathrm{Ch}\,\alpha \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une rotation autoadjointe, de valeurs propres $e^{\pm\alpha}$, chacune de multiplicité n

Ensuite, nous décrivons $\mathbf{B}_\pm$. La plus simple est $\mathbf{B}_-$ qui n'a pas de singularité, et pour bien la voir il faut écrire toute la matrice 6×6, en notant le changement de signe dans les coins

$$\mathcal{O}(\mathbf{B}_-) = \begin{pmatrix} \mathrm{Ch}\,2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & i\,\mathrm{Sh}\,2\beta \\ 0 & \mathrm{Ch}\,2\beta & -i\,\mathrm{Sh}\,2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\,\mathrm{Sh}\,2\beta & \mathrm{Ch}\,2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Ch}\,2\beta & -i\,\mathrm{Sh}\,2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\,\mathrm{Sh}\,2\beta & \mathrm{Ch}\,2\beta & 0 \\ -i\,\mathrm{Sh}\,2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Ch}\,2\beta \end{pmatrix}$$

C'est encore une rotation autoadjointe. Elle s'écrit comme une matrice 3×3 de matrices 2×2

$$(6) \qquad \mathcal{O}(\mathbf{B}_-) = \begin{pmatrix} \mathrm{b} & \mathrm{c}^* & \mathrm{c} \\ \mathrm{c} & \mathrm{b} & \mathrm{c}^* \\ \mathrm{c}^* & \mathrm{c} & \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

avec

$$(7) \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ch}\,2\beta & 0 \\ 0 & \mathrm{Ch}\,2\beta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{c} = \begin{pmatrix} 0 & i\,\mathrm{Sh}\,2\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathcal{O}(\mathbf{B}_-)$ apparaît en fait comme une *matrice cyclique* de matrices 2×2. En dimension $n > 3$, la structure de $\mathcal{O}(\mathbf{B}_-)$ resterait celle d'une matrice cyclique autoadjointe de matrices 2×2, mais avec une première ligne $(\mathrm{b}, \mathrm{c}, 0, \ldots, 0, \mathrm{c}^*)$ comportant un certain nombre de matrices 2×2 nulles.

Matrices cycliques. Une matrice cyclique, scalaire d'abord, (que nous prenons autoadjointe ici, mais cette propriété joue un très petit rôle) est une matrice du type (ici en 3×3 avec u réel)

$$M = \begin{pmatrix} u & v & \bar{v} \\ \bar{v} & u & v \\ v & \bar{v} & u \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont les nombres réels $u + v\varepsilon + \bar{v}\varepsilon^2$ où ε est ici une racine 3^{e} de l'unité, le vecteur propre correspondant étant (la colonne) $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$.

Le cas qui nous intéresse est celui d'une matrice cyclique (autoadjointe) de matrices 2×2

$$(8) \qquad M = \begin{pmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{v}^* \\ \mathrm{v}^* & \mathrm{u} & \mathrm{v} \\ \mathrm{v} & \mathrm{v}^* & \mathrm{u} \end{pmatrix}$$

La recherche des valeurs/vecteurs propres se fait comme dans le cas scalaire : les $2n$ valeurs propres sont celles des n matrices 2×2 $M(\varepsilon) = \mathrm{u} + \mathrm{v}\varepsilon + \mathrm{v}^*\varepsilon^{n-1}$. Appelons $\chi(\varepsilon), \chi'(\varepsilon)$ les deux valeurs propres de $M(\varepsilon)$, et $g(\varepsilon), g'(\varepsilon)$ les vecteurs propres correspondants, qui sont des colonnes à deux éléments. Alors les vecteurs propres correspondant de la matrice cyclique sont les deux "colonnes" (écrites ici en lignes pour raison de place) $(g(\varepsilon), \varepsilon g(\varepsilon), \ldots, \varepsilon^{n-1}g(\varepsilon))$ et $(g'(\varepsilon), \varepsilon g'(\varepsilon), \ldots, \varepsilon^{n-1}g'(\varepsilon))$. Notons que les vecteurs correspondant à deux racines de l'unité différentes sont orthogonaux pour la forme bilinéaire sur le premier chaos. On a donc une décomposition de celui-ci en une somme de n plans orthogonaux. Mais alors ces plans ne peuvent être isotropes, la rotation est du type considéré plus haut, et de plus le produit des deux valeurs propres $\chi(\varepsilon)$ et $\chi'(\varepsilon)$ est égal à 1, comme il convient à une rotation plane.

Pour diagonaliser une rotation cyclique, on est donc ramené à trouver les valeurs/vecteurs propres de n matrices 2×2 $M(\varepsilon)$, et on sait du même coup trouver les valeurs propres de la matrice de spin correspondante.

Valeurs propres de AB. Il faut se rappeler que l'on s'intéresse, non pas aux valeurs propres de $\mathcal{O}(\mathbf{B}_-)$, mais à celles de $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{1/2})\mathcal{O}(\mathbf{B}_-)\mathcal{O}(\mathbf{A}^{1/2})$. Cette matrice (que je noterai ρ_-) est elle aussi cyclique autoadjointe, avec une écriture (8) donnée par

$$\mathrm{u} = \mathrm{aba}\ , \ \mathrm{v} = \mathrm{aca}\ , \ \mathrm{v}^* = \mathrm{ac}^*\mathrm{a}$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{aba} = \operatorname{Ch} 2\beta \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} 2\alpha & -i \operatorname{Sh} 2\alpha \\ i \operatorname{Sh} 2\alpha & \operatorname{Ch} 2\alpha \end{pmatrix} \ ; \tag{9}$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{aca} = -\operatorname{Sh} 2\beta \begin{pmatrix} \operatorname{Sh}\alpha \operatorname{Ch}\alpha & -i \operatorname{Ch}^2\alpha \\ i \operatorname{Sh}^2\alpha & \operatorname{Sh}\alpha \operatorname{Ch}\alpha \end{pmatrix} .$$

Ainsi, pour trouver les valeurs propres de la rotation ρ_- (qui sont réelles), on est ramené à déterminer les valeurs propres des matrices 2×2 autoadjointes

$$\mathrm{u} + \mathrm{v}\varepsilon + \mathrm{v}^*\bar{\varepsilon}\ , \tag{10}$$

où ε parcourt l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Les matrices $\mathcal{O}(\mathbf{B}_+)$ et ρ_+ ont une forme un peu différente, à partir des mêmes éléments $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$. On a une matrice autoadjointe, mais non cyclique : il y a changement de signe chaque fois qu'un coefficient passe d'une ligne à la ligne suivante

$$\mathcal{O}(\mathbf{B}_+) = \begin{pmatrix} \mathrm{b} & \mathrm{c}^* & -\mathrm{c} \\ \mathrm{c} & \mathrm{b} & \mathrm{c}^* \\ -\mathrm{c}^* & \mathrm{c} & \mathrm{b} \end{pmatrix} . \tag{11}$$

et ρ_+ a la même forme, en remplaçant $\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{c}^*$ par $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{v}^*$ comme ci-dessus. On sait encore trouver les valeurs propres, qui sont celles des matrices $\mathrm{u} + \mathrm{v}\varepsilon + \mathrm{v}^*\bar{\varepsilon}$, mais cette fois ε doit être une racine n-ième de -1.

On a vu aussi comment reconstituer à partir de là toutes les valeurs propres de **AB** :

Les valeurs propres de **AB** correspondant aux vecteurs propres impairs provenant de $\mathbf{B}_-$, sont de la forme

$$\chi_1^{\pm 1/2} \cdots \chi_n^{\pm 1/2} \tag{12}$$

où pour chaque j, χ_j est *l'une* des deux valeurs propres (inverses l'une de l'autre) de l'une des matrices 2×2

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v}\varepsilon + \mathbf{v}^*\bar{\varepsilon}$$

ε désignant une racine n–ième de l'unité. On ne doit garder dans (12) que les combinaisons de signes comportant un nombre *impair* de signes $-$. Cela donne donc bien 2^{n-1} valeurs propres.

Les valeurs propres de $\mathbf{AB}$ correspondant aux vecteurs propres pairs sont de la forme (12), ε étant cette fois dans (13) une racine n–ième de -1, et seules les combinaisons de signes comportant un nombre pair de signes $-$ étant conservées.

On a donc finalement toutes les 2^n valeurs propres cherchées.

Calcul final des valeurs propres. Il reste donc seulement à calculer les valeurs propres (13), ce qui est un intéressant exercice de trigonométrie hyperbolique. Les valeurs propres de $M(\varepsilon)$ doivent être de la forme $\chi, \chi' = e^{\pm 2\gamma}$, et nous avons $2\,\mathrm{Ch}\,2\gamma = \chi + \chi' = \mathrm{Tr}\, M(\varepsilon)$. Calculons donc cette trace. Nous prenons ε, qui est une racine de l'unité, sous la forme $e^{i\lambda}$, et nous avons alors aisément

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M(\varepsilon) = \mathrm{Ch}\,2\beta\,\mathrm{Ch}\,2\beta - \mathrm{Sh}\,2\beta\,\mathrm{Sh}\,2\alpha\cos\lambda\,.$$

Il en résulte une très jolie propriété géométrique : 2γ est le troisième côté du triangle hyperbolique admettant l'angle λ compris entre les côtés 2β et 2α. Ce calcul suffit si l'on ne désire que les valeurs propres ; B. Kaufman cherche aussi les vecteurs propres et doit se fatiguer davantage.

Il resterait à atteindre le but de tout ce calcul, c'est à dire étudier le comportement asymptotique pour n grand et mettre en évidence la transition de phase du modèle d'Ising.