PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur deux estimations d'intégrales multiples

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 425-426
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__425_0>

SUR DEUX ESTIMATIONS D'INTÉGRALES MULTIPLES

par P.A. Meyer

Cette note contient une démonstration plus simple d'un lemme de Ben Arous sur les intégrales multiples d'Ito et de Stratonovich (*cf. Flots et séries de Taylor stochastiques*, *ZW* 81, 1989, p.29-77).

Nous considérons un mouvement brownien N-dimensionnel (X_t^i), $i = 1, \ldots, N$, et nous posons $X_t^0 = t$. Soit λ une application de $1, \ldots, m$ dans $\{0, \ldots, N\}$. Nous considérons l'intégrale multiple d'Ito arrêtée à t, sur le m-simplexe croissant

$$I_\lambda(t) = \int_{\Sigma_m(t)} dX_{s_1}^{\lambda(1)} \ldots dX_{s_m}^{\lambda(m)}$$

et l'intégrale analogue de Stratonovich $S_\lambda(t)$. Nous appelons n le nombre des indices λ_i non nuls, p le nombre des indices nuls. Ceux ci se présentent en blocs de $p_0, \ldots, p_k$ zéros, entre lesquels s'intercalent des blocs $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ d'indices non nuls. Les entiers p_0 et p_k peuvent être nuls, mais on peut imposer aux autres d'être > 0. Nous avons $p = p_0 + \ldots + p_k$. Le premier résultat de Ben Arous calcule la norme^2 de l'intégrale d'Ito :

$$\| I_\lambda(t) \|^2 = \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!} \prod_i \frac{(2p_i)!}{(p_i!)^2} \leq 2^{2p} \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!} . \tag{1}$$

DÉMONSTRATION. Nous commençons par effectuer les intégrations déterministes, ce qui nous donne pour $I_\lambda(t)$

$$\int \frac{t_0^{p_0}}{p_0!} \int_{t_0}^{t_1} dX_{s_1^1}^{\alpha_1(1)} \ldots dX_{s_{n_1}^1}^{\alpha_1(n_1)} \frac{(t_2-t_1)^{p_1}}{p_1!} \int_{t_1}^{t_2} dX_{s_1^2}^{\alpha_2(1)} \ldots dX_{s_{n_2}^2}^{\alpha_2(n_2)} \ldots$$

Nous calculons le carré de la norme de I_λ par la formule d'isométrie ordinaire, ce qui remplace les exposants $p_0, \ldots, p_k$ par $2p_0, \ldots, 2p_k$, et fait apparaître au dénominateur le facteur $\prod_i (p_i!)^2$. Chaque dX_s est remplacé par le ds correspondant.

On remplace alors à nouveau $(t_{i+1} - t_i)^{2p_i}$ par $(2p_i)! \int_{t_i}^{t_{i+1}} du_1 \ldots du_{2p_i}$, ce qui fait apparaître le produit des $(2p_i)!$ au numérateur. Il reste alors une intégrale multiple déterministe étendue à un simplexe de dimension $n + 2p = m + p$, dont la valeur est $t^{n+2p}/(n+2p)!$.

Posons $c(p) = (2p)!/(p!)^2$. Pour passer de $c(p)$ à $c(p+1)$ on le multiplie par $2(2 - 1/p+1) \leq 4$, d'où la majoration de (1). De plus ce facteur est fonction croissante de p, donc l'inégalité $p \leq q$ entraîne $c(p)c(q) \leq c(p-1)c(q+1)$. On en déduit que la norme est maximale lorsque l'intégrale contient un seul bloc de p zéros, placé n'importe où.

Passons à la majoration de la norme de $S_\lambda(t)$

$$\| S_\lambda(t) \|^2 \leq 2^{2m} \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!} . \tag{2}$$

On sait que l'intégrale de Stratonovich se déduit de l'intégrale d'Ito en ajoutant à celle-ci des termes contractés. Ceux-ci étant affectés de coefficients positifs, on a avantage à augmenter le nombre des contractions, donc la norme est maximale lorsque tous les indices non nuls sont identiques, et on est ramené à considérer un seul mouvement brownien X. D'autre part, la remarque faiteplus haut dit que les normes augmentent lorsqu'on regroupe tous les zéros. On a donc une norme maximale en évaluant la norme^2 de l'intégrale de Stratonovich

$$\oint_{0<s_1\ldots<s_n<u_1\ldots<u_p<t} dX_{s_1}\ldots dX_{s_n}\,du_1\ldots du_p = \frac{1}{n!}\frac{1}{(p-1)!}\int_0^t X_u^n\,du\,(t-u)^{p-1}$$

Nous évaluons la norme^2 de la dernière intégrale par l'inégalité de Schwarz

$$\Big(\int_0^t (t-u)^{p-1}\,du\Big)\Big(\int_0^t (t-u)^{p-1}\,\mathbb{E}[X_u^{2n}]\,du\Big)$$

et comme $\mathbb{E}[X_u^{2n}] = u^n\,(2n)!/2^n n!$ on obtient en fin de compte une majoration de $\|S_\lambda(t)\|^2$ en

$$\frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!}\,\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,\frac{(n+2p)!}{p!(n+p!)}$$

Le second facteur peut être majoré par 2^n d'après la formule de Stirling et le dernier par 2^{n+2p}, ce qui donne une croissance totale en 2^{2m}, un peu meilleure que la croissance en $(5/2)^{2m}$ indiquée par Ben Arous.