Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Aimé Fuchs
Giorgio Letta

Un résultat élémentaire de fiabilité. Application à la formule de Weierstrass sur la fonction gamma

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 316-323
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__316_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Un résultat élémentaire de fiabilité.
Application à la formule de Weierstrass sur la fonction gamma.

A. Fuchs
Département de Mathématique
et Informatique
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cédex

G. Letta
Dipartimento di Matematica
Via Buonarroti, 2
I-56100 Pisa

Résumé. — On expose un résultat élémentaire concernant la distribution de n instants de panne indépendants, de même loi exponentielle (ou géométrique). A l'aide de ce résultat, on retrouve la célèbre formule de Weierstrass donnant une représentation de la fonction gamma comme produit infini.

Dans le présent article nous étudions un problème élémentaire de fiabilité, qui consiste à déterminer la distribution des instants de panne de n instruments, installés simultanément à l'instant 0 et fonctionnant indépendamment les uns des autres, dont les durées de vie sont supposées avoir une même loi exponentielle, ou bien une même loi géométrique.

Parmi les applications du résultat relatif au cas exponentiel, nous exposons notamment un résultat concernant la désintégration radioactive, ainsi qu'une démonstration probabiliste, très simple, de la formule classique de Weierstrass donnant une représentation de la fonction gamma comme produit infini.

1. Distribution de n instants de panne exponentiels.

Dans ce paragraphe nous étudions le cas où les durées de vie des n instruments sont supposées avoir une même loi exponentielle.

Commençons par introduire quelques notations. Si x est un élément de $\mathbf{R}^n$, nous désignerons par x^* l'élément de $\mathbf{R}^n$ obtenu "en rangeant les coordonnées de x par ordre de grandeur croissante". De manière formelle, x^* est défini en posant $x_i^* = x_{\sigma(i)}$ pour tout indice i, où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ des indices, telle que l'on ait

$$x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}.$$

(Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de σ). Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, nous désignerons par X^* le vecteur aléatoire défini par

$$X^*(\omega) = (X(\omega))^*.$$

En outre, nous désignerons par $\widetilde{X}$ le vecteur aléatoire (dit "des espacements") dont les composantes sont données par

$$\widetilde{X}_1 = X_1^*, \qquad \widetilde{X}_2 = X_2^* - X_1^*, \ldots, \widetilde{X}_n = X_n^* - X_{n-1}^*.$$

On aura donc, en particulier :

$$\widetilde{X}_1 = X_1^* = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i, \qquad X_n^* = \sup_{1 \leq i \leq n} X_i = \Sigma_{i=1}^n \widetilde{X}_i.$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant (voir, par ex., [1], I.6, p. 19) :

(1.1) THÉORÈME. — *Soit X un n-échantillon de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors le vecteur aléatoire $\widetilde{X}$ admet comme loi la mesure produit*

$$\mathcal{E}(n\lambda) \otimes \mathcal{E}((n-1)\lambda) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(\lambda).$$

(1.2) COROLLAIRE. — *Si X est un n-échantillon de $\mathcal{E}(\lambda)$, la variable aléatoire*

$$\sup_{1 \leq i \leq n} X_i = X_n^* = \Sigma_{i=1}^n \widetilde{X}_i$$

admet comme loi le produit de convolution des lois $\mathcal{E}(k\lambda)$, avec $1 \leq k \leq n$.

On peut imaginer que les n composantes $X_1, \ldots, X_n$ de l'échantillon X considéré dans le théorème (1.1) représentent les instants de panne de n instruments, installés simultanément à l'instant 0 et fonctionnant indépendamment les uns des autres. La variable aléatoire $\widetilde{X}_1 = X_1^*$ représente alors le premier instant de panne. En outre, pour tout indice i (compris entre 2 et n), X_i^* représente le i-ème instant de panne, et $\widetilde{X}_i$ le temps qui le sépare de l'instant de panne immédiatement antérieur.

2. Applications diverses.

Comme première application du corollaire (1.2), on peut démontrer la proposition suivante :

(2.1) PROPOSITION. — *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Posons, pour tout n,*

$$Z_n = \sup_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Alors :

(a) On a

$$E[Z_n] = \frac{1}{\lambda} \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{1}{\lambda} \log n, \qquad \mathrm{Var}[Z_n] = \frac{1}{\lambda^2} \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{\lambda^2} \zeta(2).$$

(b) La suite $(Z_n/E[Z_n])_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers la constante 1.

Démonstration. — La première assertion découle directement du corollaire (1.2). La deuxième est une conséquence de la première, grâce au lemme suivant.

(2.2) LEMME. — *Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{L}^2$, telle que l'on ait*

$$\lim_n |E[Z_n]| = \infty, \qquad \sup_n (\mathrm{Var}[\mathrm{Z_n}]/|\mathrm{E}[\mathrm{Z_n}]|) < \infty.$$

Dans ces conditions, la suite $(Z_n/E[Z_n])_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers la constante 1.

Démonstration. — On a en effet

$$E[(Z_n/E[Z_n]-1)^2] = \mathrm{Var}[Z_n]/|E[Z_n]|^2 \to 0.$$

Une autre interprétation possible de l'échantillon X considéré dans le théorème (1.1) consiste à imaginer que ses n composantes $X_1, \ldots, X_n$ représentent les instants de désintégration de n noyaux d'un certain élément radioactif, dont $1/\lambda$ est la durée moyenne de vie. Avec cette interprétation, si l'on se donne un nombre réel p, avec $0 < p < 1$, et si l'on considère l'entier k déterminé par la relation

$$k-1 < pn \leq k,$$

on voit que la variable aléatoire

$$X_k^* = \Sigma_{i=1}^k \widetilde{X}_i$$

(qu'on pourra appeler le *quantile empirique d'ordre p* de l'échantillon X) représente le premier instant où le nombre de noyaux déjà désintégrés est supérieur ou égal à pn. Le théorème (1.1) permet d'en calculer aisément l'espérance et la variance :

$$E[X_k^*] = \frac{1}{\lambda}\Sigma_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{\lambda}\Sigma_{h=n-k+1}^n \frac{1}{h},$$
$$\mathrm{Var}[X_k^*] = \frac{1}{\lambda^2}\Sigma_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2}\Sigma_{h=n-k+1}^n \frac{1}{h^2}.$$

Il en résulte la proposition suivante :

(2.3) PROPOSITION. — *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Etant donné un nombre réel p, avec $0 < p < 1$, posons $q = 1-p$ et désignons par Q_n (pour tout $n \geq 1$) le quantile empirique d'ordre p de l'échantillon de composantes $X_1, \ldots, X_n$.*

On a alors (lorsque n tend vers l'infini)

$$E[Q_n] \sim \frac{1}{\lambda}\int_{qn}^{n} \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{\lambda}\log q,$$
$$\mathrm{Var}[Q_n] \sim \frac{1}{\lambda^2}\int_{qn}^{n} \frac{1}{x^2}dx = \frac{p}{\lambda^2 qn}.$$

Par conséquent, la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers la constante $-\frac{1}{\lambda}\log q$.

On remarquera que la constante $-\frac{1}{\lambda}\log q$ est le quantile d'ordre p de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$: on sait donc que la convergence de (Q_n) vers cette constante a lieu aussi au sens de la convergence presque sûre (voir [2], Th. 8.3, p. 83).

3. Application à la formule de Weierstrass sur la fonction gamma

Comme autre application du corollaire (1.2), nous allons exposer une démonstration probabiliste de la célèbre formule de Weierstrass donnant une représentation de la fonction gamma comme produit infini. A cet effet, nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

(3.1) PROPOSITION. — *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Posons, pour tout n,*

$$Z_n = \sup_{1\leq i\leq n} X_i, \qquad V_n = Z_n - \log n,$$

et désignons par G_n la fonction de répartition de V_n.

La suite (G_n) converge alors en croissant vers la fonction de répartition de la loi de Gumbel, c'est-à-dire vers la fonction G définie par

$$G(x) = \exp[-\exp(-x)].$$

Démonstration. — On a en effet, pour tout nombre réel x, dès que n est assez grand

$$G_n(x) = P\{Z_n \leq x + \log n\} = [P\{X_1 \leq x + \log n\}]^n = [1 - \frac{1}{n}\exp(-x)]^n \uparrow G(x).$$

(3.2) COROLLAIRE. — *Dans les mêmes hypothèses, désignons par F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire centrée*

$$U_n = Z_n - E[Z_n].$$

La suite (F_n) converge alors en croissant vers la fonction de répartition F d'une variable aléatoire U de la forme

$$U = V - \gamma,$$

où V admet comme loi la loi de Gumbel (et γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni).

Démonstration. — Posons, pour tout n,

$$\gamma_n = E[Z_n] - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

On a alors

$$U_n = (Z_n - \log n) - (E[Z_n] - \log n) = V_n - \gamma_n.$$

En outre, la suite (γ_n) converge en croissant vers γ.

Il en résulte, grâce à la proposition précédente,

$$F_n(x) = G_n(x + \gamma_n) \uparrow G(x + \gamma) = F(x).$$

Le corollaire est ainsi démontré.

Il est clair maintenant que, dans les hypothèses du corollaire précédent, la transformée de Laplace de U_n, c'est-à-dire la fonction $\mathcal{L}_{U_n}$ définie sur $]0,\infty[$ par

$$\mathcal{L}_{U_n}(t) = E[\exp(-tU_n)] = \int_0^\infty P\{\exp(-tU_n) > y\}dy =$$

$$\int_0^\infty F_n(-t^{-1}\log y)dy = t\int_{\mathbb{R}} \exp(-tx)F_n(x)dx,$$

converge en croissant (lorsque n tend vers l'infini) vers la transformée de Laplace de U. Nous voulons montrer que *la formule de Weierstrass n'est que la traduction explicite de ce résultat.*

En effet, puisque la loi de Z_n est égale, d'après le corollaire (1.2), au produit de convolution des lois $\mathcal{E}(k)$, avec $1 \leq k \leq n$, sa transformée de Laplace est égale au produit des transformées de Laplace de ces lois. En d'autres termes, on a

$$\mathcal{L}_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}(1+t/k)^{-1},$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}_{U_n}(t) = \mathcal{L}_{Z_n}(t)\exp(tE[Z_n]) = \prod_{k=1}^{n}[(1+t/k)^{-1}\exp(t/k)].$$

On a en outre

$$\mathcal{L}_V(t) = t\int_{\mathbb{R}}\exp(-tx)G(x)dx = t\Gamma(t),$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}_U(t) = t\Gamma(t)\exp(\gamma t).$$

On voit donc que, pour tout nombre réel $t > 0$, la relation

$$\mathcal{L}_{U_n}(t) \uparrow \mathcal{L}_U(t)$$

s'écrit explicitement de la manière suivante :

$$\prod_{k=1}^{n}[(1+t/k)^{-1}\exp(t/k)] \uparrow t\Gamma(t)\exp(\gamma t).$$

Ce n'est qu'une manière différente d'écrire la formule de Weierstrass (voir [3], p. 236) :

$$1/\Gamma(t) = t\exp(\gamma t)\prod_{k=1}^{\infty}[(1+t/k)\exp(-t/k)].$$

4. Distribution de n instants de panne géométriques

Dans ce paragraphe nous étudions le même problème du paragraphe 1, mais dans le cas où les durées de vie des n instruments sont supposées avoir une même loi géométrique. (Nous entendrons par loi géométrique *de paramètre* q la loi de l'instant du premier succès dans un processus de Bernoulli où la probabilité de succès est égale à $1-q$).

Nous commencerons par un lemme, concernant l'absence de mémoire de la loi géométrique, dont la démonstration est immédiate..

(4.1) LEMME. — *Sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *soient* X *un* n*-échantillon de la loi géométrique de paramètre* q *et* U *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{N}$, *indépendante de* X. *Posons*

$$H = \{U < \inf_{1 \le i \le n} X_i\}$$

et désignons par Y *le vecteur aléatoire de composantes*

$$Y_1 = X_1 - U, \ldots, Y_n = X_n - U.$$

Alors, selon la mesure de probabilité

$$P_H = P(\cdot \mid H),$$

Y *est indépendant de* U *et est encore un échantillon de la loi géométrique de paramètre* q.

Voilà un autre lemme qui nous sera utile :

(4.2) LEMME. — *Sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *soient* U, V *deux variables aléatoires indépendantes, ayant des lois géométriques de pramètres* q, r *respectivement.*

Alors, selon la mesure de probabilité $P(\cdot \mid \{U < V\})$, *la loi de* U *est la loi géométrique de paramètre* qr.

Démonstration. — Pour tout entier k strictement positif, on a

$$\begin{aligned} P(\{U = k\} | \{U < V\}) &= (P\{U < V\})^{-1} P\{U = k, k < V\} \\ &= (P\{U < V)^{-1}(1-q)q^{k-1}r^k \\ &= c(qr)^{k-1}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $c = (P\{U < V\})^{-1}(1-q)r$. Il en résulte qua la loi de U selon $P(\cdot \mid \{U < V\})$ est géométrique de paramètre qr. On remarquera, en passant, que cette conclusion fournit, comme sous-produit, $c = 1 - qr$, donc

$$P\{U < V\} = (1-q)r/c = (1-q)r/(1-qr).$$

Nous allons maintenant énoncer l'analogue du théorème (1.1). Il ne s'agira pas d'une pure transcription de (1.1) (avec remplacement de la loi exponentielle par la loi géométrique). L'énoncé suivant comporte en effet une différence substantielle : la mesure de probabilité P y est remplacée par la mesure de probabilité conditionnelle relative à l'hypothèse que deux instruments différents ne tombent jamais en panne au même instant. (Dans le cas exponentiel, cette condition était remplie presque sûrement, de sorte qu'aucun conditionnement n'était nécessaire).

(4.3) THÉORÈME. — *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit X un n-échantillon de la loi géométrique de paramètre q. Considérons la variable aléatoire J définie par*

$$J = \sum_{j=1}^{n} j I_{A_j}, \text{ avec } A_j = \{X_j < \inf_{i \neq j} X_i\}.$$

Posons en outre

$$H = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \{X_i \neq X_j\}, \qquad P_H = P(\cdot \mid H).$$

Alors :

(a) La variable aléatoire J est indépendante de X_1^*.

(b) Selon P_H, la variable aléatoire J est indépendante de X^* (donc aussi de $\widetilde{X}$).

(c) Selon P_H, les variables aléatoires $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n$ sont indépendantes , et leurs lois sont géométriques, de paramètres $q^n, q^{n-1}, \ldots, q$ respectivement.

Démonstration. — Il est bien connu que la loi de la variable aléatoire $X_1^* = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i$ est la loi géométrique de paramètre q^n. Pour prouver l'assertion (a), il suffit donc de vérifier que, pour tout entier j compris entre 1 et n, la loi, selon $P(\cdot \mid \{J = j\})$, de X_1^* (ou – ce qui revient au même – de X_j) est encore la loi géométrique de paramètre q^n. Or, ceci s'obtient en appliquant le lemme (4.2) aux deux variables aléatoires $U = X_j$, $V = \inf_{i \neq j} X_i$ (qui sont géométriques de paramètres q, q^{n-1}). L'assertion (a) est donc prouvée.

Pour prouver l'assertion (b), remarquons que l'on a, pour tout entier j compris entre 1 et n,

$$H \cap \{J = j\} = H \cap \{X_j = X_1^*\}.$$

Il en résulte (puisque la loi de X est symétrique)

$$P(H \cap \{J = i, X^* \in A\}) = P(H \cap \{J = j, X^* \in A\})$$

pour toute partie A de $\mathbb{N}^n$ et tout couple i, j d'indices compris entre 1 et n. Cela prouve l'assertion (b).

L'assertion (c) est évidente pour $n = 1$. En supposant qu'elle soit vraie pour $n - 1$, nous la démontrerons pour n. Grâce à (b), il nous sera permis, dans cette démonstration, de remplacer P_H par la mesure de probabilité

$$Q = P_H(\cdot \mid \{J = 1\}) = P_{\{J=1\} \cap H}.$$

Désignons par Y le vecteur aléatoire de composantes

$$Y_1 = X_2 - X_1, \ldots, Y_{n-1} = X_n - X_1,$$

et posons

$$K = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n-1} \{Y_i \neq Y_j\}.$$

On a alors $\{J = 1\} \cap H = \{J = 1\} \cap K$. En outre, sur l'ensemble $\{J = 1\}$, le vecteur aléatoire de composantes

$$X_1, \widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_{n-1}$$

coïncide avec $\widetilde{X}$.

Il résulte du lemme (4.1) que, selon la mesure de probabilité

$$P_{\{J=1\}} = P(\cdot \mid \{J = 1\}),$$

le vecteur aléatoire Y est indépendant de X_1 et constitue un $(n-1)$-échantillon de la loi géométrique de paramètre q : l'hypothèse de récurrence entraîne alors que, selon la mesure de probabilité

$$P_{\{J=1\}}(\cdot \mid K) = P_{\{J=1\} \cap K} = Q,$$

le vecteur aléatoire $\widetilde{Y}$ admet comme loi le produit des lois géométriques de paramètres $q^{n-1}, \ldots, q$. Il reste à prouver que, selon la même mesure de probabilité Q, la variable aléatoire X_1 est indépendante de $\widetilde{Y}$ et admet comme loi la loi géométrique de paramètre q^n. Or ceci est immédiat : en effet, puisque la variable aléatoire X_1 est indépendante de Y selon $P_{\{J=1\}}$, elle l'est aussi selon Q (car K appartient à la tribu engendrée par Y). Par conséquent, la loi de X_1 selon Q est identique à celle selon $P_{\{J=1\}}$, c'est-à-dire (voir démonstration de (a)) à la loi géométrique de paramètre q^n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, New York 1971.

[2] C. FOURGEAUD et A. FUCHS, *Statistique*, deuxième édition, Dunod 1972.

[3] E.T. WHITTAKER and G.N. WATSON, *A course of Modern Analysis*, fourth edition, Cambridge Univ. Press 1940.