JEAN JACOD
PHILIP PROTTER

Une remarque sur les équations différentielles stochastiques à solutions markoviennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 138-139
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__138_0>

UNE REMARQUE SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES A SOLUTIONS MARKOVIENNES

J. JACOD et P. PROTTER(*)

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$(*)\qquad dX_t = f(X_{t-})\, dZ_t, \quad X_0 = x,$$

où Z est une semimartingale sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ et f est une fonction borélienne telle que, pour chaque x, $(*)$ admette une solution (forte) unique X^x. Il est alors bien connu que si Z est à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), les processus X^x sont markoviens homogènes, avec un semi-groupe de transition ne dépendant pas de x.

Ce résultat admet une "réciproque" un peu surprenante, et très simple à démontrer:

THEOREME 1. Supposons que f ne s'annule pas. Si les processus X^x sont tous markoviens homogènes avec le même semi-groupe de transition, alors Z est un PAIS.

Démonstration. Notons Ω' l'espace canonique des fonctions réelles càdlàg sur $\mathbb{R}_+$, avec le processus canonique X', la filtration canonique $(\mathcal{F}'_t)$ et le semi-groupe (θ'_t) des translations. Si P'_x désigne la loi de X^x, notre hypothèse signifie que le terme $(\Omega',\mathcal{F}'_t,\theta'_t,X',P'_x)$ est un processus de Markov au sens de Dynkin (ou Blumenthal-Getoor).

Comme f ne s'annule pas, $(*)$ s'inverse en

$$(1)\qquad Z_t = Z_0 + \int_0^t f(X^x_{s-})^{-1}\, dX^x_s.$$

On peut donc définir sur Ω', et relativement à chaque P'_x, l'intégrale stochastique

$$(2)\qquad Z'_t = \int_0^t f(X'_{s-})^{-1}\, dX'_s,$$

et on a aussi:

(3) la loi de Z' sous P'_x est la loi du processus $Z - Z_0$.

(*)Supported in part by NSF grant #DMS-8805595

D'autre part Z' est une fonctionnelle additive. Pour toute fonction borélienne positive g, la propriété de Markov et (3) impliquent:

$$E'_x[g(Z'_{t+s}-Z'_t)|\mathcal{F}'_t] = E'_x[g(Z'_s)\circ\theta'_t|\mathcal{F}'_t] = E'_{X_t}[g(Z'_s)] = E[g(Z_s-Z_0)].$$

On en déduit que $Z'_{t+s}-Z'_t$ est P'_x-indépendant de $\mathcal{F}'_t$, donc des Z'_r pour $r\leq t$, et aussi que la loi de $Z'_{t+s}-Z'_t$ sous P'_x égale la loi de Z_s-Z_0. Appliquant une nouvelle fois (3), on obtient le résultat. □

REMARQUE. Regardons le cas particulier où $f\equiv 1$. (*) s'écrit

(4) $$X^x_t = x + Z_t - Z_0$$

et le théorème dit que si les X^x sont markoviens homogènes avec tous le même semi-groupe, alors Z (et donc les X^x également) sont des PAIS. Cela ne veut évidemment pas dire que tout processus markovien homogène est un PAIS ! Le "miracle" provient de ce que (4) s'écrit $X^x_t = X^x_0 + Z_t - Z_0$ et que par hypothèse la loi de Z ne dépend pas de $X^x_0=x$: or les seuls processus markoviens homogènes X tels que X_t-X_0 ait une loi indépendante de celle de X_0 sont les PAIS. □

Dans le même ordre d'idées, on a le résultat encore plus élémentaire décrit ci-dessous. Supposons que $(\Omega,\mathcal{F})$ soit muni d'une famille P_z de probabilités sous lesquelles Z soit une semimartingale avec $P_z(Z_0=z) = 1$. Si Z est markovien homogène sous chaque P_z, de transition indépendante de z, il est bien connu que le couple (Z,X^x) est markovien homogène de transition indépendante de (z,x).

THEOREME 2. <u>Si sous chaque</u> P_z <u>et pour chaque</u> x <u>le couple</u> (Z,X^x) <u>est markovien homogène de transition indépendante de</u> (z,x), <u>alors le processus</u> Z <u>est lui-même markovien homogène sous chaque</u> P_z (de transition évidemment indépendante de z).

<u>Démonstration</u>. Soit $(Q_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe des transitions de (Z,X^x). On a $Q_t(z,x;A\times\mathbb{R}) = P_z(Z_t\in A|Z_0=z$ et $X^x_0=x) = P_z(Z_t\in A)$, de sorte que $Q_t(z,x;A\times\mathbb{R}) = R_t(z,A)$ ne dépend pas de x. Il est alors immédiat que Z lui-même est markovien homogène de transitions $(R_t)_{t\geq 0}$. □

Ce résultat ne fait pas vraiment intervenir l'équation (*), et d'ailleurs il n'y a aucune hypothèse sur f ! Seul intervient le fait que les P_z ne dépendent pas de x. Ainsi, assez curieusement, le théorème 2 est beaucoup plus élémentaire que le théorème 1 (qui est d'ailleurs faux sans hypothèse sur f: penser au cas où $f\equiv 0$).