SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Théorie des processus de production

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 52-104
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__52_0>

THÉORIE DES PROCESSUS DE PRODUCTION

par C. Dellacherie

URA D1378, L.A.M.S., Université de Rouen
B.P. 118, 76134 MONT SAINT AIGNAN Cedex

Ce travail, inachevé (en gros, un tiers de ce qui est prévu est écrit), est l'aboutissement d'une longue reflexion sur

les fondements d'une théorie non linéaire du potentiel.

On ne trouvera ici que les deux premiers chapitres, rédigés de manière à peu près définitive si bien qu'ils forment un tout relativement indépendant de l'introduction présente, provisoire.

La démarche axiomatique adoptée va en sens inverse du cheminement historique de la théorie linéaire[1]: partant des objets les plus élémentaires de la théorie, nous nous arrêterons juste en deçà d'un monde de ramifications qu'il reste à explorer[2]. Il y a à cela des raisons mathématiques, explicitées plus loin, et des raisons historiques personnelles.

Au départ, il y a eu une impulsion de Meyer qui, lors de la rédaction des chapitres sur les maisons de jeux de Dubins et Savage[3] du volume III de "Probabilités et Potentiel", avait remarqué qu'on y avait un opérateur de réduite mais point d'opérateur de potentiel. Captivé alors par les problèmes de théorie descriptive, je n'avais pris garde sur le moment à ce manque ; puis, sans doute rebuté et dépité par le maquis dans lequel j'étais arrivé (dont témoigne le terrible mot "ambimesurabilité" introduit au §I), je me suis tourné vers le côté que j'appelai purement algébrique de la théorie, à cause du rôle primordial joué par les opérations élémentaires "+" et "∨".

---

1 Schématiquement, de la théorie du potentiel newtonien à celle des noyaux élémentaires de Choquet-Deny.

2 Déjà abordé par d'autres venus d'ailleurs (équations aux dérivées partielles, équations d'évolution, etc.).

3 Et donc de théorie sous-linéaire élémentaire du potentiel.

Puis, après un premier jalon [Della 1][4], et quelques balbutiements qui n'ont pas laissé de traces écrites, il y eut deux interventions décisives :

d'une part, celle de Mokobodzki, qui, ayant déjà lui aussi tâté le terrain, m'a convaincu que les théorèmes à la Hunt sur les principes de la théorie linéaire passaient à une théorie souslinéaire élémentaire, d'où [Della 2],

d'autre part, celle de Bénilan, qui, explorant déjà le domaine en partant d'un autre bout, celui des équations d'évòlution non linéaires, m'a amené à adopter le point de vue pris ici,

abandonner tout soupçon véritable de linéaire[5] ;

les deux ensemble m'ayant finalement amené à

privilégier les générateurs infinitésimaux[6]

après la publication de [Della 3][7].

Enfin, la mise au point finale a été influencée par la notion de *modèle simple de Leontieff* en économie mathématique : c'est linéaire, en dimension finie[8], mais l'intuition en non linéaire s'y sent à l'aise alors que le modèle probabiliste, véhiculant son linéaire obligé, est plutôt un handicap. Ce point de vue est reflété par les néologismes introduits : progression, producteur, amendeur, etc.

---

4 Renvoie à la bibliographie en fin d'introduction ; le texte lui-même ne comporte qu'un renvoi, celui à [Zinsmeister], dont nous conseillons vivement la lecture à tous ceux qui seraient curieux d'apprendre ce qu'est une dérivation en théorie descriptive des ensembles, et comment cela s'emploie sur plusieurs champs de bataille de l'analyse, y compris celui évoqué aux **I-22** et **I-26**.

5 Nous utiliserons abondamment l'addition, mais pas de manière essentielle : on aurait pu employer à la place toute autre application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, et séparément strictement croissante et surjective.

6 Alors que les générateurs infinitésimaux sont les êtres les plus délicats possibles en théorie, linéaire ou non, du potentiel *non* élémentaire, ce sont les êtres les plus simples, et fondamentaux du point de vue "algébrique", dans le cas élémentaire, et cela est souvent obscurci par l'interprétation probabiliste.

7 Dans lequel une trop belle part était encore faite à l'addition, et qui, contrairement aux notes présentes, éludait tout souci de mesurabilité.

8 "En dimension fini" renvoie à "espace d'états fini", si bien que les fonctions sur lesquelles on opère *sont des éléments de* $\mathbb{R}^n$ *et non* des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$!

Voyons de plus près de quoi il s'agit. On a un ensemble fini E "d'activités", identifié au segment $\{1,\cdots,n\}$ de $\mathbb{N}$. Chaque activité i fabrique un produit $\pi(i)$ en utilisant comme matières premières tous les produits fabriqués par les activités. Dans le modèle *simple* de Leontieff, on suppose que chaque produit est fabriqué *par une et une seule* activité[9], si bien qu'on peut identifier l'espace des produits avec celui des activités, donc avec $\{1,\cdots,n\}$. Si l'activité générale est, à un certain moment, à un niveau u, qu'on repère dans $\mathbb{R}^E=\mathbb{R}^n$, il en résulte sur le marché une présence de produits Au, repérée aussi[10] dans $\mathbb{R}^n$. Alors, si niveau d'activité et présence de produits sur le marché sont des grandeurs extensives, et mesurées avec le même étalon (par exemple, des quantités), la différence $u-Au=Nu$ est la part de produits disparue sous forme de matières premières[11].

> C'est N et non $A=I-N$ qui est croissant. Par ailleurs, ce n'est pas tout à fait le générateur "infinitésimal" qui s'introduit naturellement, mais son opposé. Nous notons cet opposé quand même A, mais nous appellerons cela plus tard un ***dériveur*** (ou un ***producteur***, voir ci-dessous la nuance) au lieu d'une dérivation, d'autant plus qu'en théorie descriptive, à la suite de Cantor, c'est N qui serait plutôt appelé une dérivation...

On retrouve, quand A est un opérateur linéaire, une situation familière en économie mathématique linéaire (et en théorie du potentiel élémentaire, ou des chaînes de Markov). Ceci dit, un des problèmes fondamentaux que peut se poser un planificateur est le suivant, où u_o et f_o sont des paramètres :

> pour une demande $f\geq f_o$ sur le marché, à quel niveau $u\geq u_o$ doit être l'activité pour assurer $Au\geq f$?

---

9 En linéaire, il n'y a guère de différence "mathématique" entre l'étude d'un modèle simple de Leontieff et celle d'une chaîne de Markov (à espace d'états fini) menée sous l'angle de la théorie du potentiel ; si on complique le modèle en supposant la production alternative (i.e. π non injective), on se retrouve dans une situation semblable à celle des maisons de jeux, tandis qu'on sort sans doute du domaine de la théorie du potentiel si on suppose la production jointe (i.e. π est "multivoque").

10 A ce stade, $\mathbb{R}$ pourrait être remplacé par n'importe quel ensemble totalement ordonné, en particulier $\mathbb{Z}$ qui, une fois n'est pas coutume, serait beaucoup plus avenant que $\mathbb{R}$ par la suite.

11 Malgré le "à un certain moment" ci-dessus, on n'aborde pas du tout ici la dynamique du processus ; il s'agit d'un bilan global fait au bout d'une certaine période.

C'est un problème de programmation, linéaire si la situation est supposée telle, qui, par ailleurs, n'est pas loin des systèmes rencontrés en analyse numérique quand on discrétise certains problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Maintenant, en se départant de toute hypothèse linéaire, il est tout à fait naturel de supposer que notre opérateur de production A est continu[12] sur son domaine (un pavé de $\mathbb{R}^n$) et vérifie la condition ($\mathcal{D}$) suivante :

($\mathcal{D}$) si le niveau u^i *de l'activité* i *augmente tandis que* u^j *ne change pas pour* $j \neq i$, *alors la présence* Au^j *de chaque* $j \neq i$ *sur le marché, si elle change, ne peut que diminuer (car* i *utilise les* j *comme matières premières, et* j *n'est fabriqué que par* j *).*

Le planificateur, lui, espère être dans le cas ($\mathcal{P}$) suivant :

($\mathcal{P}$) pour toute demande "raisonnable" f *sur le marché, il pourra toujours augmenter continûment l'activité de production à partir de son niveau actuel* u_o *pour (au moins) la satisfaire.*

Quand cela est axiomatisé, en dimension finie, ($\mathcal{D}$) donne la notion de *dériveur* introduite au §I, et quand s'y ajoute ($\mathcal{P}$), on obtient celle de *producteur* du §II.

Et lorsque l'on regarde ce que cela donne en linéaire, en dimension finie, on voit que A est une matrice dont tous les coefficients hors de la diagonale sont négatifs ssi ($\mathcal{D}$) est satisfaite, et telle que de plus il existe $u>0$ tel que $Au \geq 0$ ssi de plus ($\mathcal{P}$) est satisfaite (ce qui force les éléments diagonaux à être positifs). On retrouve, au signe près les générateurs infinitésimaux en dimension finie, et aussi des notions très proches des "M-", "P-", "Q-" matrices de [Berman-Plemmons] : un livre comportant, outre une excellente bibliographie, un bon tour d'horizon de l'usage des "matrices positives" en analyse numérique, programmation linéaire, économie mathématique, chaînes de Markov...et rien en théorie du potentiel, vingt ans après la parution de [Choquet-Deny] et [Beurling-Deny].

Mais revenons à notre système en non linéaire :

$$(*) \qquad u \geq u_o \quad , \quad Au \geq f_o$$

en supposant que les références dans les échelles de lecture du

---

12 C'est ici que s'insinue le caractère "élémentaire" de notre théorie ; en non linéaire, la situation n'est pas automatiquement élémentaire si on se place en dimension finie : il existe de nombreuses fonctions croissantes à une variable qui ne sont pas continues, mais il n'y en a pas de linéaire...

niveau des activités et de la présence de produits soient telles que $A0=0$. Si on prend $f_o=0$, et $u_o\geq 0$, on cherche les u produisant quelque chose de positif partout (en bref, les plans) et supérieurs à u_o : si A est un producteur, un tel plan existera toujours, et il y en aura même un plus petit Ru_o, vérifiant donc

$$Ru_o \geq u_o \quad , \quad ARu_o \geq 0,$$

et satisfaisant de plus la "condition aux limites"

$$ARu_o = 0 \quad \text{sur} \quad \{Ru_o > u_o\} \cup \{u_o = 0\}.$$

Autrement dit, Ru_o est la *réduite* de u_o. Si on prend $u_o=0$ et $f_o\geq 0$, on recherche les plans pouvant satisfaire une demande f_o ; on verra que, dès qu'il existe un tel plan, il en existe un plus petit Gf_o, et que celui-ci vérifie "l'équation de Poisson"

$$AGf_o = f_o.$$

Autrement dit, Gf_o est le *potentiel* de f_o. En fait, on peut toujours ramener la résolution du système (*) à un calcul de potentiel, quitte à faire un changement simple d'opérateur et de référence (mais non linéaire, même en linéaire), ce que j'ai appelé la *forme canonique* dans ces notes, mais que j'ai employée avec parcimonie pour rester proche de la formulation linéaire.

Je crois que j'en ai assez dit pour que le lecteur ait une bonne idée de ce qui l'attend dans les deux premiers chapitres rédigés, qui ont de toute manière leur introduction propre. Par ailleurs, à la fin de cette introduction, on trouvera une table des matières[13] et un index terminologique[14] provisoires.

En guise des autres chapitres encore en gestation, voici un peu plus que quelques mots sur ce qu'ils devraient contenir.

§III : Le but final serait l'extension de la correspondance existant, en linéaire, entre générateurs infinitésimaux bornés vérifiant un certain principe de domination et semigroupes uniformément continus de noyaux positifs. La tâche n'est pas simple : les producteurs sont [un peu moins que] continus pour la convergence uniforme, alors que les noyaux sont continus pour la

---

13 La pagination est établie à partir de la première page du texte proprement dit.

14 Les numéros renvoient au numéro de chapitre si nécessaire, et au numéro en marge du texte, indépendants de la pagination.

convergence simple ; de plus, on ne dispose pas ici des théorèmes de Banach-Steinhaus ou Banach-Schauder souvent utilisés en linéaire dans ce genre d'étude. Pour le moment, je sais le faire dans le cas où les producteurs sont lipschitziens (c'est déjà presqu'écrit dans [Della 3]), mais encore mal dans le cas où ils sont seulement continus (pour la convergence uniforme).

§IV: quoique le titre ressemble au précédent, le point de vue est différent. En linéaire, les résolvantes font partie des outils essentiels de la théorie *non* élémentaire : elles sont, au contraire des générateurs infinitésimaux, très régulières, et elles jettent un pont entre l'élémentaire et le non élémentaire du fait qu'écrire la formule (non valable en non linéaire)

$$\forall p,q>0 \qquad V_p - V_q = (q-p) V_p V_q$$

revient à écrire la formule (valable en non linéaire)

$$\forall p,q>0 \qquad [\, I - (p-q)\, V_p]\, [\, I + (p-q)\, V_q) = I$$

Cela signifiera pour nous, dans notre jargon, que le dériveur élémentaire $I - (p-q) V_p$ est inversible et que, si l'ambimesurabilité ne joue pas de mauvais tour, son inverse est égal à son potentiel. Le chapitre est alors essentiellement consacré à l'étude de principes tournant autour de celui de domination ou du maximum. On établira en particulier l'analogue non linéaire des ***petits*** théorèmes de Meyer et de Hunt (caractérisation des noyaux ***bornés*** vérifiant le principe complet du maximum, renforcé ou non). Cela est déjà écrit dans [Della 3][15].

§V: on devrait y trouver la démonstration, promise depuis quelques temps, d'une version non linéaire du "grand" théorème de Hunt. C'était pour moi la pierre de touche du fait que partir des modèles simples d'une théorie du potentiel en non linéaire avait un quelconque avenir; mais je ne m'étais jamais résolu à rédiger cela avant d'avoir engrangé les prémices. Ce §V est annoncé par la fin du §II : l'énoncé du théorème y est écrit...

§VI : on devrait y trouver ce qu'on peut faire, en non linéaire, dans l'esprit de [Choquet-Deny] (dualité des principes de domination et du balayage), en gardant cependant le point de vue générateur plutôt qu'opérateur potentiel : du point de vue de l'économie mathématique, c'est de la théorie des prix, ou plus

---

15 A l'ambimesurabilité près...

exactement, de celle de la valeur au sens de Ricardo, qu'il s'agit ici. Puis, dans l'esprit de [Beurling-Deny], on devrait parler de l'usage des contractions en théorie du potentiel symétrique et donc, si l'on veut, des circuits électriques passifs contenant des résistances non linéaires. Il est possible que, comme chez mes illustres prédécesseurs, cela ne soit fait qu'en dimension finie.

§VII : je voudrais ici écrire un chapitre sur les équations d'évolution associées aux producteurs en dimension finie. Il s'agirait donc de l'étude de systèmes différentiels

$$\dot{u}_t + Au_t = f$$

où la donnée est $f \in \mathbb{R}^n$ et l'inconnue $t \mapsto u_t$ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, tandis que A est un producteur bijectif. Donc, par rapport à la littérature classique existante, des conditions de monotonie sur l'opérateur A qui font que, si on peut linéariser, on est dans le cas "simple" d'un point asymptotique à l'infini, mais une condition de régularité sur A (seulement la continuité) qui fait qu'a priori on n'est même pas sûr de l'unicité de la solution. Bien entendu, on espère qu'il y a unicité et que la solution est de la forme $t \mapsto P^f_t u_o$ pour un semi-groupe[16] (P^f_t), qui se refuse en général à être prolongé en un groupe.

Est lié à la plupart de ces chapitres non écrits le souci de compréhension du lien unissant, en non linéaire, résolvantes et semi-groupes.

> C'est bien plus compliqué qu'en linéaire : plus de transformée de Laplace. Par contre, on a encore une version non linéaire du théorème de Hille-Yosida fondée sur une version de la formule d'inversion de Hille, et une version du théorème de Trotter-Kato. Voir [Crandall], et attendre le livre de Bénilan-Crandall-Pazy qui, étant donné les préoccupations actuelles de Bénilan et de son école de Besançon, devrait pencher un peu du côté de la théorie du potentiel

Et ce, dans notre cadre, voisin mais différent de celui des spécialistes d'équations d'évolution dans les espaces de Banach généraux[17] : chez nous, on travaille dans le plus mauvais Banach concret, $\mathcal{L}_\infty$, à défaut de travailler dans un espace de fonctions

---

16 Pour f quelconque : un bienfait du non linéaire...

17 Eventuellement uniformément convexes, ou réticulés de type L^p avec $p<+\infty$, etc., pour les meilleurs résultats sur les générateurs, soit des espaces trop réguliers pour nous...

non bornées ; la propriété de productivité est, quand elle est comparable, plus faible que celle d'accrétivité ; mais, par contre, on a de la croissance...

A vrai dire, rien de ce qui est présenté ici n'est techniquement difficile[18], même s'il m'a fallu parfois un temps considérable pour secouer le joug de la tradition linéaire[19]. Pour tout ce qui laisse en dehors les problèmes de mesurabilité, l'ascèse non linéaire permet souvent de deviner de meilleurs énoncés, de trouver de meilleures démonstrations, que dans le cas linéaire. Il en résulte, du moins je l'espère, un effet esthétique indéniable. Ceci dit, je suis conscient qu'il y a pour le moment trop peu de chair mathématique sur ce squelette axiomatique, mais il y en a quand même suffisamment pour rendre pertinente la question suivante :

> la théorie des processus de Markov a connu son heure de gloire en fournissant, si je puis dire, une explication "sensible" aux principes "ésotériques" de la théorie du potentiel linéaire ; maintenant que le potentiel semble échapper au linéaire, si jamais phénix renaît de ses cendres, qu'y a-t-il derrière?

---

18 Il en eût été autrement si j'avais su réellement attaquer les problèmes de mesurabilité ; mais cela n'aurait plus été reconnu comme de la théorie du potentiel. Après tout, les probabilistes ont longtemps manipulé leurs temps d'arrêt sans savoir qu'ils étaient mesurables, et encore, tout juste de l'autre côté de la porte justement close ici par notre axiome d'ambimesurabilité.

19 Six jours pour trouver le bon énoncé **II-14** de la propriété de "support" de la réduite, six ans pour trouver la bonne démonstration du principe complet du maximum en **I-20**.

BIBLIOGRAPHIE PROVISOIRE

BERMAN (A.), PLEMMONS (R.J.) :
Nonegative matrices in the mathematical sciences.
Academic Press 1979.

BEURLING (A.), DENY (J.) :
Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire.
Acta Math. 99, 1958, 203-224.

CRANDALL (M.G.) :
Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators. Proc. Symposia pure Maths. vol 45, part 1, AMS, Providence 1986.

CHOQUET (G.), DENY (J.) :
Modèles finis en théorie du potentiel.
J. Analyse Mathématique (Jerusalem), 1956/57

DELLACHERIE (C.) :
Les sous-noyaux élémentaires. Colloque J. Deny.
L.N. in Math. 1096, 183-222, Springer 1984.

Les principes complets du maximum relatifs aux sousnoyaux bornés. Sém. Initiation à l'Analyse. 23e année, 1983/84, 16 p, Publ. Univ. Paris VI.

Théorie élémentaire du potentiel non linéaire.
Ibid., 25e année, 1985/86, 32 p

MEYER (P.-A.), DELLACHERIE (C.) :
Probabilités et Potentiel. Chapitres IX à XI.
Théorie discrète du potentiel. Hermann 1983.

DENY (J.) :
Les noyaux élémentaires.
Sém. Brelot-Choquet-Deny. 4e année, 1959/60, 11 p

ZINSMEISTER (M.) :
Les dérivations analytiques.
Sém. Proba. XXIII, L.N. in Math. 1372, 21-46, Springer 1989.

TABLE DES MATIÈRES PROVISOIRE

THÉORIE DES PROCESSUS DE PRODUCTION
MODÈLES SIMPLES DE LA THÉORIE DU POTENTIEL NON LINÉAIRE

EN PRÉPARATION

INDEX PROVISOIRE

MODÈLES SIMPLES DE LA THÉORIE DU POTENTIEL NON LINÉAIRE

par C. Dellacherie

On se donne au départ un ensemble E fini ou infini[1], muni d'une tribu $\mathcal{E}$ admettant les points pour atomes, et donc égale à $\mathcal{P}(E)$ si E est dénombrable ; le cas $\mathcal{E}=\mathcal{P}(E)$ nous sera aussi utile pour E quelconque : des procédés d'extension à $\mathcal{P}(E)$ nous permettront, en travaillant d'abord sur $\mathcal{P}(E)$, d'aborder séparément les délicats problèmes de mesurabilité rencontrés pour $\mathcal{E}\neq\mathcal{P}(E)$.

1 On entendra par *opérateur* une application A d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}^E$ dans $\overline{\mathbb{R}}^E$; le domaine (de définition) d'un opérateur A sera noté $\mathcal{D}(A)$ et son image $\mathcal{I}(A)$. On dira qu'une partie $\mathcal{D}$ de $\overline{\mathbb{R}}^E$ est *normale* (relativement à la tribu $\mathcal{E}$) si

a) elle est réticulée,
b) tous ses éléments sont $\mathcal{E}$-mesurables,
c) elle contient toute fonction $\mathcal{E}$-mesurable coincée entre deux de ses éléments.

Le choix du qualificatif "normal" indique clairement que, du côté des fonctions auxquelles seront appliqués les opérateurs, nous ne regarderons pas de propriété de régularité plus fine que la mesurabilité.

I. DÉRIVEURS SIMPLES. RÉDUITES ET POTENTIELS. PRINCIPES DE DOMINATION ET DU MAXIMUM.

On se donne un opérateur A, de domaine $\mathcal{D}(A)$ normal. On va introduire successivement des axiomes portant sur A (axiomes de dérivation, de simplicité et d'ambimesurabilité), en illustrant leurs utilité et usage au fur et à mesure. Cette liste d'axiomes

---

[1] Autrement dit, nous pensons que ce que nous allons présenter est intéressant et non trivial dans l'un et l'autre cas.

sera complétée au §II par l'axiome de dérivation à la frontière et surtout par l'axiome de productivité. L'axiome d'ambimesurabilité est essentiellement technique ; il est sans objet dans le cas où E est dénombrable. Lorsque A est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$, l'axiome de dérivation, joint à la continuité de A qui implique l'axiome de simplicité, assure que l'on a affaire à une théorie élémentaire du potentiel : A est de la forme $\lambda(I-N)$ où λ est un réel ≥ 0, I est l'identité et N un noyau borné ; les axiomes d'ambimesurabilité et de dérivation à la frontière sont toujours vérifiés, et l'axiome de productivité assure alors l'existence d'une fonction excessive (éventuellement invariante) strictement positive.

En théorie linéaire, "élémentaire" renvoie à : générateur infinitésimal -A borné, semi-groupe uniformément continu, noyau potentiel élémentaire au sens de Choquet-Deny, soit, après changement d'échelle, à : semi-groupe discret, chaîne de Markov.

L'AXIOME DE DÉRIVATION

2 Pour $u \in \overline{\mathbb{R}}^E$ et $x \in E$, $\varepsilon_x u$ et u^x sont des notations pour $u(x)$; on pose, pour u et x fixés,

$$\mathfrak{F}(u,x)=\{v\in\overline{\mathbb{R}}^E :\ u^x=v^x\}$$
$$\mathfrak{V}(u,x)=\{v\in\overline{\mathbb{R}}^E :\ u^y=v^y \text{ pour tout } y\neq x\}$$

($\mathfrak{F}$ pour "fixé en x" et $\mathfrak{V}$ pour "varie en x"). Le lecteur regardera ce que cela donne pour E fini afin de retrouver des choses bien familières sous ces notations barbares.

3 On dira que A est un *dériveur* s'il vérifie l'axiome suivant :

Ax 1 : pour $u,v\in\mathcal{D}(A)$, $u\leq v$ partout implique $Au\geq Av$ sur $\{u=v\}$

qui équivaut à : $v\mapsto\varepsilon_x Av$ est décroissante sur $\mathcal{D}(A)\cap\mathfrak{F}(u,x)$[2]
et implique : $A(u\wedge v)\geq(Au)\wedge(Av)$, $A(u\vee v)\leq(Au)\vee(Av)$.

4 **Stabilité** de l'ensemble des dériveurs.

a) Si A est un dériveur, il en est de même de son opérateur *dual*[3] B défini par $Bu=-A(-u)$, qu'on verra apparaître de temps à

---

2 Plus loin, l'axiome de productivité impliquera que $v\mapsto\varepsilon_x Av$ est croissante sur $\mathcal{D}(A)\cap\mathfrak{V}(u,x)$.

3 La terminologie provient de la théorie descriptive des ensembles

autre par la suite (parfois implicitement, en raisonnant par "symétrie"). Tous les axiomes seront "symétriques", *sauf*, hélas, celui d'ambimesurabilité ; on verra pourquoi en temps utile.

b) L'ensemble $E\times\bar{\mathbb{R}}$ étant muni de la tribu produit $\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, on appelle *changement d'échelle* une application mesurable Φ d'une partie mesurable U de $E\times\bar{\mathbb{R}}$ dans $E\times\bar{\mathbb{R}}$ telle que, pour tout $x\in E$, la coupe U_x de U selon x soit un intervalle non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ et que, pour $(x,t)\in U$, on ait $\Phi(x,t)=(x,\Phi_x(t))$ où Φ_x est un homémorphisme croissant de U_x sur un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$. La composition à droite ou à gauche d'un dériveur avec un changement d'échelle ayant un domaine approprié[4] redonne un dériveur. Parmi les changements d'échelle on trouve les opérateurs de multiplication par une fonction $\mathcal{E}$-mesurable >0 : ce sont ceux qu'on rencontre en théorie linéaire. Les notions introduites dans ce §I sont "invariantes" par changement d'échelle.

c) L'ensemble des dériveurs de même domaine $\mathcal{D}$ est stable pour les sup et inf (ponctuels) et plus généralement pour les liminf et limsup de familles quelconques.

d) Si $A_1,\cdots,A_n$ sont n dériveurs de même domaine et $H(x,t_1,\cdots,t_n)$ est, pour tout $x\in E$, une fonction croissante en $t_1,\cdots,t_n$ définie sur un produit d'intervalles approprié, alors l'opérateur qui à u associe $x\mapsto H(x,\varepsilon_xA_1u,\cdots,\varepsilon_xA_nu)$, que l'on notera plus simplement $H(A_1,\cdots,A_n)$, est un dériveur sur son domaine de définition. Sont de ce type les dériveurs de la forme $\varphi_1A_1+\varphi_2A_2$, où les φ_i sont des fonctions ≥ 0, utilisés en théorie linéaire.

5 **Exemples** de dériveurs.

Comme on verra de nombreux exemples au fil des pages, je serai ici relativement succinct.

a) Si N est un opérateur croissant $(u\leq v\Rightarrow Nu\leq Nv)$ sur $\mathcal{D}(N)\subseteq\mathbb{R}^E$ normal, alors I-N est un dériveur. En particulier, en théorie linéaire, si (V_p) est une résolvante (de noyaux ≥ 0), $\Lambda_p=p(I-pV_p)$ est un dériveur pour tout $p>0$ et, si (P_t) est un semi-groupe (de noyaux ≥ 0), alors $\Lambda_t=(I-P_t)/t$ est un dériveur pour tout $t>0$.

[4] Il nous arrivera souvent d'utiliser cette formule pour éviter la tâche à la fois pénible et pédante de préciser certains domaines de définition (cf le début de ce b)).

b) si, aux $\Lambda_{\bullet}$ précédents, on applique limsup, liminf, (quand $p\to+\infty$ et $t\to 0$), on retrouve les exemples fondamentaux donnés en théorie [non élémentaire] du potentiel [linéaire] par Mokobodzki auquel nous avons emprunté l'axiome 1.

c) Soient $\mathcal{D}$ une partie normale de $\bar{\mathbb{R}}^E$ et φ une fonction réelle sur un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi(u)$ soit définie pour tout $u\in\mathcal{D}$. Alors $A: u\mapsto\varphi(u)$ est un dériveur sur $\mathcal{D}$, d'un type assez dégénéré (on a $A(u\wedge v)=Au\wedge Av$ et $A(u\vee v)=Au\vee Av$), souvent utilisé en addition à un autre dériveur comme terme "perturbateur". Plus généralement, on peut se donner une fonction φ sur une partie appropriée de $E\times\bar{\mathbb{R}}$ et définir un dériveur A en posant

$$\varepsilon_x Au = \varphi(x,u(x)).$$

pour $u\in\mathcal{D}$ et $x\in E$.

6 **Extension** d'un dériveur.

On suppose que A vérifie **Ax 1**, mais, exceptionnellement, on ne suppose pas ici que $\mathcal{D}(A)$ est normal. On va étendre A en un dériveur (et même deux !) défini sur $\bar{\mathbb{R}}^E$.

Posons, pour tout $u\in\bar{\mathbb{R}}^E$ et tout $x\in E$,

$$\varepsilon_x A^{\vee}u = \sup\{\varepsilon_x Av,\ v\geq u,\ v^x=u^x,\ v\in\mathcal{D}(A)\}$$
$$\varepsilon_x A^{\wedge}u = \inf\{\varepsilon_x Av,\ v\leq u,\ v^x=u^x,\ v\in\mathcal{D}(A)\}$$

où, comme d'ordinaire, $\sup\emptyset=-\infty$ et $\inf\emptyset=+\infty$. On a $A^{\vee}u\leq A^{\wedge}u$ avec égalité pour $u\in\mathcal{D}(A)$, et on vérifie sans peine que $A^{\vee}$ (resp $A^{\wedge}$) est la plus petite (resp grande) extension de A en un dériveur sur $\bar{\mathbb{R}}^E$. Dans le cas $A=I-N$, avec N croissant, on retrouve les extensions style intégrales supérieure, inférieure.

Remarque. Si l'extension algébrique est facile, on se doute que, sauf cas particuliers [E dénombrable convient magnifiquement !], cela deviendra inextricable quand des hypothèses de mesurabilité amèneront des restrictions sur $\mathcal{I}(A)$.

7 Nous terminons cette présentation de **Ax 1** par une conséquence simple mais fondamentale, qu'on appellera *prototype du principe de domination.*

Proposition. *Si on a* $u\leq v$ *sur* $\{Au>Av\}$, *alors on a*

$$Au\leq A(u\wedge v) \quad \text{et} \quad A(u\vee v)\leq Av$$

D/ Je me contente de démontrer la première inégalité. D'après **Ax 1** on a $A(u\wedge v)\geq Au$ sur $\{u\leq v\}$ et $A(u\wedge v)\geq Av$ sur $\{v\leq u\}$; donc, si $\{Au>Av\}$ est inclus dans $\{u\leq v\}$, on a $A(u\wedge v)\geq Av\geq Au$ sur $\{v<u\}$, d'où

la conclusion (le mieux est de faire un dessin).

Le nom donné sera justifié au 20. Pour le moment, je me borne à noter que, si A est injectif et d'inverse G croissant (ce qui est par exemple le cas, d'après le théorème de point fixe de Banach, lorsqu'on a A=I-N avec N contraction stricte croissante sur $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$), alors 7 entraine ce qu'on attend:

$$u \leq v \text{ sur } \{Au > Av\} \text{ implique } u \leq v \text{ partout.}$$

L'AXIOME DE SIMPLICITÉ

8 Cet axiome est ce qui distingue une théorie "élémentaire" du potentiel d'une théorie plus sophistiquée.

On dira que le dériveur A est *simple* s'il vérifie l'axiome suivant, où $1_{\{x\}}$ est l'indicatrice de $\{x\}$ et λ appartient à $\mathbb{R}$:

Ax 2: pour $u \in \mathcal{D}(A)$ et $x \in E$ fixés, $\lambda \mapsto \varepsilon_x A(u+\lambda 1_{\{x\}})$ est s.c.s. à droite et s.c.i. à gauche sur son domaine.

Soit, avec un léger abus de langage, A est s.c.s. à droite et s.c.i. à gauche sur chaque $\mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{B}(u,x)$ (cf 2 pour la notation)[5].

On ne perdrait pas grand chose en supposant dans **Ax 2** que $\lambda \mapsto \varepsilon_x A(u+\lambda 1_{\{x\}})$ est continue. Nous ne l'avons pas fait afin de pouvoir dire ci-dessous que I-N est un dériveur simple si N est croissant, en toute généralité.

Nous allons voir que **Ax 2** est assez faible pour passer aux extensions à $\overline{\mathbb{R}}^E$. La démonstration que nous donnons n'utilise pas dans toute sa force l'hypothèse que $\mathcal{D}(A)$ est normal ; mais le fait que $\mathcal{D}(A)$ soit (conditionnellement) dénombrablement réticulé joue un rôle essentiel.

9 **Proposition.** *Soit* A *un dériveur simple. Alors les extensions* $A^\vee$ *et* $A^\wedge$ *sont aussi des dériveurs simples.*

<u>D</u>/ On va montrer que, pour $x \in E$ et $u \in \overline{\mathbb{R}}^E$ fixés, $\varepsilon_x A^\vee$ (resp $\varepsilon_x A^\wedge$) est s.c.s. à droite (resp s.c.i. à gauche) sur $\mathfrak{B}(u,x)$; l'inégalité $A^\vee \leq A^\wedge$ permettant alors de conclure. Par symétrie, on peut se contenter de s'occuper de $A^\vee$. Soit, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, u_t la fonction égale à $u(x)+t$ en x et à $u(y)$ pour $y \neq x$, et soit v_t un élément de $\mathcal{D}(A)$ majorant u_t, égal à u_t en x, et tel que l'on ait

---

5 Nous avons déjà dit que l'axiome de productivité entraînera la croissance en λ ; il entrainera donc aussi la continuité en λ.

$\varepsilon_x A \vee u_t = \varepsilon_x A v_t$. L'existence de v_t est assurée par le fait que $\mathcal{D}(A)$ est dénombrablement réticulé ; on peut même supposer, alors que t décrit une suite tendant vers 0, que la suite (v_t) associée est décroissante, minorée par $v_0 = v$. Comme v est alors majorée par la limite de la suite, et égale à celle-ci en x, on conclut grâce à la proposition suivante (et **Ax 1** évidemment).

Et qu'il est assez fort pour assurer une propriété de semi-continuité le long des familles monotones, généralisant celle de son énoncé :

10 **Proposition.** *Soit* A *un dériveur simple. Si* (v_i) *est une famille filtrante décroissante (resp croissante) dans* $\mathcal{D}(A)$, *de limite* v *appartenant à* $\mathcal{D}(A)$, *alors on a*

$$Av \geq \limsup Av_i \quad \textit{(resp } Av \leq \liminf Av_i \textit{)}.$$

D/ On traite le cas décroissant. Fixons $x \in E$ et, pour chaque i, soit w_i l'élément de $\mathcal{D}(A)$ défini par

$$w_i(x) = v_i(x) \quad , \quad w_i(y) = v(y) \text{ pour } y \neq x$$

On a $\varepsilon_x A w_i \geq \varepsilon_x A v_i$ par **Ax 1**, et $\varepsilon_x A v \geq \limsup \varepsilon_x A w_i$ par **Ax 2**.

11 Si N est un opérateur croissant sur un domaine normal $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^E$, alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, le dériveur $\lambda(I-N)$ est simple ; il sera dit ***élémentaire***, conformément à la tradition linéaire. En linéaire, un dériveur sur $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ est élémentaire s'il est continu (pour la convergence uniforme). En non linéaire, ce n'est pas le cas en général : E étant fini, de cardinal n, un dériveur simple sur $\mathbb{R}^n$, continu, et même markovien (cf II-7), peut ne pas être élémentaire même lorsque E n'a qu'un point, ne pas vouloir le devenir, après changement d'échelle à droite et à gauche, quand E n'a que deux points...

On a cependant, que E soit fini ou non :

12 **Proposition :** *Soit* A *un dériveur de domaine* $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$, *à valeurs dans* $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$. *Si* A *est lipschitzien (pour la norme uniforme), alors* A *est élémentaire. Plus précisément,* $N = I - tA$ *est croissant pour* $t \leq \Lambda_A^{-1}$ *où* Λ_A *est la meilleure constante de Lipschitz de* A.

D/ On doit montrer l'existence d'un $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $N = I - tA$ soit croissant. Soient $u, v \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ tels que $u \leq v$, fixons $x \in E$ et soit w la fonction égale à v(x) en x et à u(y) pour $y \neq x$. On a $u \leq w \leq v$ et, d'après **Ax 1**, $Aw^x \geq Av^x$. Evaluons Nv-Nu au point x : on a

$$Nv^x - Nu^x = (v^x - u^x) - t(Av^x - Au^x) \geq (w^x - u^x) - t(Aw^x - Au^x)$$

Si k est une constante de Lipschitz pour A, on a

$$|Aw^x - Au^x| \le k\|w-u\| \quad \text{avec} \quad \|w-u\| = (w^x-u^x)$$

d'où la conclusion.

LE THÉORÈME FONDAMENTAL.

Nous allons montrer que les axiomes 1 et 2 suffisent pour définir les notions fondamentales de potentiel et de réduite. En vérité, c'est vraiment le cas pour E fini ou dénombrable ; dans le cas général, où il faut, pour être réaliste, introduire une structure mesurable distincte de $\mathcal{P}(E)$, on va à la rencontre de difficiles problèmes de mesurabilité. Cependant comme, du côté algébrique, il n'y a pas de difficulté à étendre un dériveur simple à $\bar{\mathbb{R}}^E$ tout entier, ma philosophie est la suivante :

on prolonge à $\bar{\mathbb{R}}^E$, on travaille dans $\bar{\mathbb{R}}^E$, et on revient comme on peut au domaine restreint de départ.

Conformément à cette doctrine, nous supposons dans ce qui suit, et ce, jusqu'à la rubrique "**l'axiome d'ambimesurabilité**", *que tous les dériveurs simples considérés sont définis sur un même domaine $\mathcal{D}$ normal relativement à $\mathcal{E}=\mathcal{P}(E)$:* tout élément de $\bar{\mathbb{R}}^E$ coincé entre deux éléments de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{D}$.

13 **Théorème.** *Soient* $u_o, f_o \in \bar{\mathbb{R}}^E$. *Si le système d'inégalités*

$$(*) \qquad u \ge u_o \qquad Au \ge f_o$$

a une solution dans $\mathcal{D}$, alors il en a une plus petite $\tilde{u}$ dans $\mathcal{D}$, et cette dernière vérifie, pour tout $x \in E$,

$$\tilde{u}(x) = u_o(x) \quad \text{ou} \quad A\tilde{u}(x) = f_o(x)$$

(autrement dit, les contraintes sont serrées). De plus, on a

$$A\tilde{u} = f_o \quad sur \quad \{\tilde{u} > u_o\} \cup \{Au_o \le f_o\}$$

D/ Soit $\mathcal{U}$ la famille, non vide par hypothèse, des solutions de $(*)$ dans $\mathcal{D}$. $\mathcal{U}$ est stable pour l'opération $\wedge$ d'après l'axiome 1, et, d'après la proposition **10**, son enveloppe inférieure $\tilde{u}$ est encore solution de $(*)$. Si les contraintes n'était pas serrées en x pour $\tilde{u}$, on pourrait baisser légèrement la valeur de $\tilde{u}$ en x, sans rien changer ailleurs : cela augmenterait $A\tilde{u}^y$ pour $y \ne x$ d'après **Ax 1**, sans diminuer beaucoup $A\tilde{u}^x$ d'après **Ax 2**, d'où $\tilde{u}$ ne pourrait être la solution minimale de $(*)$. Ainsi, on a $A\tilde{u}^x = f_o^x$ pour tout x tel que $\tilde{u}^x > u_o^x$; par ailleurs, pour un x tel que $\tilde{u}^x = u_o^x$, on a $A\tilde{u}^x \le Au_o^x$ d'après **Ax 1**, et donc $A\tilde{u}^x = f_o^x$ si $Au_o^x \le f_o^x$.

Remarques. a) Par symétrie, on a un résultat analogue avec les inégalités dans l'autre sens : si le système d'inégalités

(∗∗) $\qquad u \le u_1 \qquad Au \le f_1$

a une solution, il en a une maximale, pour laquelle les contraintes sont serrées.

b) L'étude des systèmes "doubles" du type $u_0 \le u \le u_1$, $f_0 \le Au \le f_1$, bien plus délicate en général, se ramène trivialement aux cas précédents si on a $Au_0 \le f_1$ ou $Au_1 \ge f_0$.

c) Supposons les éléments de $\mathcal{D}$ finis et A de la forme I-N, N croissant : u est solution de (∗) ssi on a $u \ge u_0 \vee (f_0 + Nu)$, et la solution $\tilde{u}$ vérifie $\tilde{u} = u_0 \vee (f_0 + N\tilde{u})$, soit encore est un point fixe de l'opérateur $w \mapsto u_0 \vee (f_0 + Nw)$. Ainsi, quand A est élémentaire, on peut déduire **13** du théorème de point fixe de Tarski. On reviendra sur cette présentation de (∗), sans supposer I-A croissant, au **14**.

AVATARS DU THÉORÈME FONDAMENTAL

Voici d'abord, à titre d'illustration, une version apparemment plus sophistiquée de **13**, mais que le calcul non linéaire permet de dégonfler.

13a **Proposition.** *Soient* $A_1, \dots, A_n$ *des dériveurs simples,* $f_1, \dots, f_n$ *des éléments de* $\bar{\mathbb{R}}^E$ *et* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *des fonctions réelles continues de domaine approprié dans* $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$. *Si l'ensemble des solutions dans* $\mathcal{D}$ *du système de* n *inéquations*

$$A_i u \ge \varphi_i(f_i, u) \qquad \text{pour} \qquad i = 1, \dots, n$$

n'est pas vide et est minoré dans $\mathcal{D}$*, alors il a un plus petit élément* $\tilde{u}$*, qui vérifie les contraintes serrées.*

D/ Comme chaque $u \mapsto -\varphi_i(f_i, u)$ est un dériveur simple (cf 5), on peut, si on ne rencontre pas de $\infty - \infty$ (voir la remarque sinon), changer les dériveurs A_i et supposer les inéquations de la forme $A_i u \ge 0$, lesquelles se ramènent à la seule $Au \ge 0$ où $A = \inf(A_1, \dots, A_n)$. Alors, si on note u_0 un minorant de l'ensemble des solutions, on est ramené à l'énoncé du théorème avec $f_0 = 0$.

Remarque. Si on veut garder au calcul toute sa souplesse, on ne peut pas exclure l'apparition de "$\infty - \infty$" lorsqu'on manipule des inégalités, et on a alors trois solutions : ou bien on invente une opération "barbare" remplaçant la soustraction, ou bien, ce qui revient à peu près au même, on fait d'abord un changement d'échelle à l'arrivée pour que toutes les valeurs soient finies, qu'on corrige par le changement inverse à la fin, ou bien encore on laisse tout cela au lecteur, ce qui nous arrivera de temps en temps sans le dire...

14 Et maintenant, voici au contraire une forme plus ramassée de **13**, que nous appellerons sa *forme canonique*, et que, malgré son élégance, nous emploierons peu par la suite du fait que, pour rester lisible, nous tenons à rester proche de l'héritage linéaire dans la présentation des applications de **13** (même si cela amènera un certain nombre de redites, qui ne seront pas toutes volontaires !).

Nous supposons pour simplifier $\mathcal{I}(A)$ contenu dans $\mathbb{R}^E$, hypothèse qui n'est pas invariante par tout changement d'échelle à gauche mais qui nous évite d'introduire une opération "barbare" à la place de la soustraction (cf la remarque précédente). On définit alors un opérateur M sur $\mathcal{D}$ par $M=I-A$, et, laissant au lecteur le soin de traduire nos deux premiers axiomes en terme de M au lieu de A - il ne sera sans doute pas très surpris de rencontrer des propriétés de croissance -, nous constatons alors que (*) s'écrit maintenant sous la forme d'une seule inégalité

$$u \geq u_o \vee (f_o + Mu)$$

qui, pour u_o et f_o fixés, invite à introduire les opérateurs M° et A° sur $\mathcal{D}$ définis par

$$M^\circ u = u_o \vee (f_o + Mu) \quad , \quad A^\circ u = u - M^\circ u$$

Maintenant, on vérifie sans peine que A° est un dériveur simple, et (*) a alors la *forme canonique*

$$A^\circ u \geq 0$$

dont toute solution majore u_o (qu'on ait un "0" à droite n'a rien de remarquable en non linéaire ; c'est une trace de l'emploi de la soustraction). Dire qu'une solution u de notre système (*) initial vérifie les contraintes serrées équivaut alors à dire que u est un point fixe de M° ou encore que u vérifie l'égalité dans notre (*) final.

INTRODUCTION AUX APPLICATIONS

Afin de présenter quelque chose de substantiel au lecteur avant qu'il ne soit lassé par un défilé d'axiomes, nous esquissons, avant d'aborder au **21** l'ambimesurabilité, les principales applications du théorème fondamental à une théorie "simple" du potentiel non linéaire. Nous reviendrons plus loin sur la plupart d'entr'elles (il nous reste des axiomes à énoncer !). Nous avons cependant pris soin de rédiger de sorte que, à l'exception de **18**, tout puisse s'appliquer plus tard sans changement aux dériveurs simples ambimesurables. Cela amènera quelques apparitions de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{E}$ apparemment superfétatoires ; signalons au passage que, suivant un abus de notation maintenant usuel, nous noterons souvent "$f\in\mathcal{E}$" le fait qu'une fonction f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{E}$-mesurable.

15 On appellera *référence* (relative à A) tout couple (η,ξ) de fonctions tel que $\eta\in\mathcal{D}$ et $A\eta=\xi$; bien entendu, η, pour A donné, détermine ξ, et il nous arrivera de définir une référence par sa première composante. En linéaire, on ne considère jamais (sans l'avouer !) que la référence (0,0), puisqu'on peut toujours s'y ramener par translation. Ici aussi, quand "$\infty-\infty$" ne joue pas le trouble-fête, un changement d'échelle par translation à droite et à gauche permet de ramener une référence quelconque à (0,0), mais au prix d'un "léger" changement de dériveur simple (qu'on verra apparaître au **19**), qui, sauf lorsqu'il simplifie les notations, nous semble plutôt opacifier la situation en masquant une part de la structure.

On se donne une référence (η,ξ) *fixée jusqu'à* 21.

LA NOTION DE RÉDUITE

16 Soit $w\in\mathcal{D}$ tel que $w\geq\eta$. Si le système suivant

$$u\geq w(\geq\eta) \quad , \quad Au\geq\xi$$

a une solution dans $\mathcal{D}$, sa plus petite solution est appelée la *η-réduite* $R^{\eta}w$ (au dessus) de w. Il est clair que l'opérateur R^{η} ainsi défini est *croissant*. Le fait que les contraintes soient serrées s'écrit ici (en tenant compte du "De plus" de **13**)

$$AR^{\eta}w=\xi \quad \text{sur} \quad \{R^{\eta}w>w\}\cup\{w=\eta\}$$

si bien que $R^{\eta}w$ est aussi la plus petite solution du système

$$\text{(Red)} \qquad u\geq w \quad , \quad Au=\xi \text{ sur } \{u>w\}$$

Au II-**13**, les axiomes ultérieurs assureront que $R^{\eta}w$ est toujours défini pour $w\geq\eta$ (on peut alors prolonger R^{η} à $\mathcal{D}$ tout entier en posant $R^{\eta}w=R^{\eta}(w\vee\eta)$), et que $\inf_{x\in E}(R^{\eta}w^{x}-w^{x})=0$ (et même mieux). Il y a aussi une notion symétrique de η-réduite au dessous de w, que nous utiliserons peu ; de manière générale, il est de tradition en théorie du potentiel de privilégier les systèmes (*) par rapport aux systèmes (**), et cela sera amplifié par l'axiome d'ambimesurabilité que, bon gré mal gré, nous adopterons[6].

16a A titre d'illustration, et en supposant $(\eta,\xi)=(0,0)$ afin de retrouver la situation familière en linéaire (on écrira alors R au lieu de R^{η}), nous allons étudier le problème suivant : soient $e\in\mathcal{D}$ telle que $Re=e$ (i.e. $e\geq 0$ et $Ae\geq 0$) et B un dériveur simple de domaine $\mathcal{D}(B)=\{h\in\mathcal{D}:\ 0\leq h\leq e\}$, vérifiant pour tout $h\in\mathcal{D}(B)$

(H) $\qquad Bh\leq h \quad , \quad Rh=h \Rightarrow Bh=h.$

On se demande si l'on a, pour tout $u,v\in\mathcal{D}(B)$,

(C) $\qquad [\,u\leq v \text{ sur } \{Bu>0\}\,] \Rightarrow [\,Ru\leq Rv\,].$

Voici, provenant de la théorie linéaire mais restant pertinent ici, l'exemple fondamental d'un tel dériveur : on suppose que e est fini, et, ayant fixé un $t\in[0,1[$, on pose

$$Bh=\frac{1}{1-t}(h-tRh),\ \text{d'où}\ \ \{Bh>0\}=\{tRh<h\}\ \text{et}\ h=(1-t)Bh+tRh$$

Dans ce cas, le membre de gauche de (C) implique $u\leq(1-t)v+tRu$ et donc, si R est convexe, $Ru\leq(1-t)Rv+tRu$ d'où $Ru\leq Rv$ (c'est la démonstration "magique" de Mokobodzki en linéaire), mais, sans hypothèse additionnelle, (C) peut être grossièrement faux même pour E réduit à deux points. Les résultats du genre (H)⇒(C) sont importants pour certains problèmes d'optimisation (problème de l'arrêt optimal en théorie des chaînes de Markov, etc.), mais comme on verra mieux que (H)⇒(C) au **II-14** quand on disposera de l'axiome de productivité, ce qui suit est plutôt un exercice.

Voyons de plus près ce que donne le cas général. Supposons qu'il existe $u,v\in\mathcal{D}(B)$ tel que (C) soit faux ; quitte à remplacer v par $v\wedge u$, on peut supposer que l'on a $v\leq u$, $v=u$ sur $\{Bu>0\}$ et $Rv\neq Ru$, puis, quitte à remplacer v par $\tilde{v}=Rv$ et u par $\tilde{u}=u\vee Rv$, on peut supposer que $v=Rv$: le seul point non évident est que $u=v$ sur $\{Bu>0\}$ implique $\tilde{u}=\tilde{v}$ sur $\{B\tilde{u}>0\}$, mais, sur $\{u\leq Rv\}$, on a $\tilde{u}=\tilde{v}$ tandis que sur $\{u>Rv\}$ on a $B\tilde{u}\leq Bu$ d'après **Ax 1** et donc, comme $u=v$ sur $\{Bu>0\}$, on a $\{B\tilde{u}\leq 0\}$ sur $\{u>Rv\}=\{\tilde{u}>\tilde{v}\}$. Ceci fait, comme on a $Rv=v$ et donc $Bv=v\geq 0$, $\{Bu>0\}$ contient $\{Bu>Bv\}$, et, d'après **7**,

---

[6] C'est prêcher pour sa chapelle : cette tradition existe chez les spécialistes de théorie du potentiel proches des probabilistes, mais on peut trouver une tradition inverse chez ceux qui, comme Bénilan, sont spécialistes d'équations d'évolution.

[u=v sur $\{Bu>Bv\}$] implique $Bu\leq B(u\wedge v)=Bv$. Ainsi, on a $v=Rv\leq u$ et $Bv\geq Bu$ et $Rv\neq Ru$. De $BRu=Ru\geq v$ on déduit que la v-réduite $w=R_B^v u$ de u relative à B est $\leq Ru$, et, d'après la dernière assertion de **13**, on a $Bw=v$. Finalement, si (C) n'est pas vrai il existe dans $\mathcal{D}(B)$ un couple v,w tel que

$$(\Gamma) \qquad v\neq w \quad \text{et} \quad v=Rv\leq w \quad \text{et} \quad Bw=Bv=v$$

Par conséquent (C) est vrai si $B^2h=Bh$ implique $Bh=h$ (dans le cas de l'exemple, cela revient à dire que si $h=(1-t)a+tRh$ avec $a=Ra$, alors $h=Rh$, ce qui est manifestement le cas si R est convexe), et a fortiori si B est injectif (dans le cas de l'exemple, c'est vrai si e est borné et R est sur $\mathcal{D}(B)$ une contraction au sens large, pour la norme uniforme). Nous laissons au lecteur le soin d'établir, par un chemin analogue à celui menant de non (C) à (Γ) - qu'on retrouvera en partie quand, disposant de l'axiome de productivité, on étudiera l'injectivité des dériveurs - que (Γ) est vrai si B n'est pas injectif si bien que la propriété (Γ) est équivalente à la non injectivité de B (ainsi, dans le cas de l'exemple, B est injectif si R est convexe, ce qui ne semble pas évident a priori).

LA NOTION DE POTENTIEL

17 Soit $f\in\mathcal{E}$ tel que $f\geq\xi$. Si le système suivant

$$u\geq\eta \quad , \quad Au\geq f\,(\geq\xi)$$

a une solution dans $\mathcal{D}$, sa plus petite solution est appelée le *η-potentiel* $G^\eta f$ de f. Il est clair que l'opérateur G^η défini ainsi est *croissant*. Les contraintes serrées donnent ici

$$AG^\eta f = f$$

si bien que l'opérateur G^η est un inverse à droite croissant (partiellement défini) de A, et que $G^\eta f$ est aussi la plus petite solution de "*l'équation de Poisson*"

$$(\text{Pot}) \qquad u\geq\eta \quad , \quad Au=f$$

On laisse au lecteur la joie de découvrir qu'au prix d'un changement non linéaire de dériveur (et de référence), la résolution de tout système (*) se ramène au calcul d'un potentiel.

17a A titre d'illustration, et en supposant $(\eta,\xi)=(0,0)$ afin de retrouver la situation familière en linéaire (on écrira alors G au lieu de G^η), nous allons faire un calcul de potentiels qui, si on peut le développer complètement par linéarité, donne une formule bien connue en linéaire, du type "équation résolvante".

On suppose les éléments de $\mathcal{D}$ finis et on se donne un second dériveur simple B sur $\mathcal{D}$ tel que $B0=0$ et que $\Psi=B-A$ soit croissant : par exemple, si A est de la forme $I-N$ avec N croissant, alors $B=I-sN$, avec $s\in\mathcal{E}$ compris entre 0 et 1, convient. On va montrer que, pour tout $f\in\mathcal{D}(G_A)$, on a $f+\Psi G_A f\in\mathcal{D}(G_B)$ et

$$(\alpha)\qquad G_A f = G_B(f+\Psi G_A f)\quad \text{où}\quad \Psi=B-A$$

Posons $u=G_A f$; on a $u\geq 0$ et $Au=f$. De l'identité $Bu=f+\Psi u$ on déduit que $v=G_B(f+\Psi u)$ existe et est majoré par u. Mais, de $Bv=f+\Psi u$ et $v\leq u$, on déduit, grâce à la croissance de Ψ, $Bv\geq f+\Psi v$, d'où $Av\geq f$ et donc $v\geq u$ par minimalité de u. Ainsi (α) est établi. L'analogue (β) de (α), mais avec les rôles de A et B inversés, soit $G_B f=G_A(f-\Psi G_B f)$, est fausse en général. Evidemment, (α) et (β) sont vraies en toute généralité si A et B sont des opérateurs inversibles quelconques d'inverses G_A et G_B.

17b Toujours à titre d'illustration, nous complétons ici ce qui a été dit au **16a** dans le cas de l'exemple, i.e. dans le cas où, pour un $t\in]0,1[$ et pour tout $h\in\mathcal{D}(B)$, on a $Bh=\frac{1}{1-t}(h-tRh)$. On pose $\tilde{\mathcal{D}}(B)=\{f\in\mathcal{E}: f\leq e\}$, on prolonge, sans changer de notation, R à $\tilde{\mathcal{D}}(B)$ en posant $Rf=R(f\vee 0)$ et finalement B comme on devine. On peut écrire, pour $f,\alpha\in\tilde{\mathcal{D}}(B)$ tels que $B\alpha\leq f$, une formule explicite donnant le α-potentiel de f relatif à B:

$$G_B^{\alpha} f = (1-t)f + tRf$$

En effet, désignons par φ le membre de droite : d'une part un calcul simple montre que $B\varphi=f$; d'autre part, si on a $Bh\geq f$ pour un $h\in\tilde{\mathcal{D}}(B)$, alors de $h=(1-t)Bh+tRh$ on déduit $h\geq(1-t)f+tRh$ qui, associé à $h\leq(1-t)h+tRh$, donne $h\geq f$ d'où $Rh\geq Rf$ et finalement $h\geq\varphi$. Ainsi, pour $h\in\tilde{\mathcal{D}}(B)$ tel que $Bh\geq\alpha$, le α-potentiel de Bh est égal à $(1-t)Bh+tRBh$. Comme $h=(1-t)Bh+tRh$, on a donc $RBh=Rh$ pour tout $h\in\mathcal{D}(B)$ si B est injectif sur $\mathcal{D}(B)$; on peut en déduire une autre démonstration, plus simple et plus puissante, de la propriété $(H)\Rightarrow(C)$ du **16a** quand B est injectif.

POTENTIEL GÉNÉRALISÉ

Cette rubrique, consacrée à l'extension de la définition de l'opérateur η-potentiel, peut être sautée sans grand dommage ; de toute manière, elle ne passera pas en général à travers le filtre de l'ambimesurabilité.

18 Soit $f \leq \xi$ tel que le système symétrique de celui de **17**

$$u \leq \eta \quad , \quad Au \leq f \ (\text{ou } Au = f)$$

ait une solution; étendant sans ambigüité la terminologie de **17**, nous noterons $G^{\eta}f$ la plus grande solution de ce système appelée *η-potentiel* de f (mais on réservera la notation $\mathcal{D}(G^{\eta})$ au domaine de G^{η} tel que défini en **17**). Soit alors $\mathcal{D}^{g}(G^{\eta})$ [domaine généralisé du η-potentiel] l'ensemble des $f \in \overline{\mathbb{R}}^{E}$ telles que $G^{\eta}(f \wedge \xi)$ et $G^{\eta}(f \vee \xi)$ existent ; pour $f \in \mathcal{D}^{g}(G^{\eta})$ on dira qu'une solution de

$$(\text{Gen}) \qquad G^{\eta}(f \wedge \xi) \leq u \leq G^{\eta}(f \vee \xi) \quad , \quad Au = f$$

est un *η-potentiel généralisé* de f. Il est clair que, pour $f \leq \xi$ ou $f \geq \xi$, la fonction $G^{\eta}f$ est la seule solution du système ; dans le cas général, le système a une plus petite solution notée $G^{\eta}_{\leftarrow}f$ (c'est le potentiel de f relativement à la référence $G^{\eta}(f \wedge \xi)$), et une plus grande notée $G^{\eta}_{\rightarrow}f$ (potentiel de f relativement à la référence $G^{\eta}(f \vee \xi)$). Les opérateurs $G^{\eta}_{\leftarrow}$ et $G^{\eta}_{\rightarrow}$ ainsi définis sur $\mathcal{D}^{g}(G^{\eta})$ sont croissants, et sont tous deux des inverses à droite de A sur $\mathcal{D}^{g}(G^{\eta})$; contrairement au cas linéaire, ils sont généralement différents (déjà quand E n'a que deux points).

A titre d'exercice, le lecteur pourra s'amuser à montrer qu'une bonne part de (α) de **17a** est encore valable si on y remplace les potentiels par des potentiels généralisés.

PROBLÈME DE DIRICHLET. RÉDUCTION

Quoiqu'il s'agisse d'un sujet important, nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser par la suite cette rubrique.

19 Afin de simplifier la présentation, nous supposerons ici que les éléments de $\mathcal{D}$ sont finis et que la référence (η,ξ) est égale à $(0,0)$; nous omettrons alors de noter la référence dans les notations de réduites et de potentiels. On peut toujours se ramener à ce cas, si (η,ξ) est finie, quitte à considérer le dériveur simple $\hat{A}$ tel que $\mathcal{D}(\hat{A}) = \mathcal{D}(A) - \eta$ et $\hat{A}v = A(v+\eta) - \xi$: on a alors

$$\eta = R^{\eta}\eta = G^{\eta}\xi \ , \quad \hat{R}h = R^{\eta}(h+\eta) - \eta \ , \quad \hat{G}h = G^{\eta}(h+\eta) - \eta \ , \quad \text{etc.}$$

Soient F une partie de E et $w \in \mathcal{D}$ tel que $w \geq 0$; considérons le système de trois inégalités

$$u \geq 0 \qquad u \geq w \text{ sur } F \qquad Au \geq 0 \text{ sur } E \setminus F$$

qui s'écrit encore sous la forme (1), (2) ou (3) suivante, où J_T est l'opérateur de multiplication par l'indicatrice de $T \subseteq E$ (avec $0 \times \infty = 0$) et où $\bar{T}$ désigne le complémentaire $E \setminus T$ de T :

(1) $\quad u \geq J_F w \geq 0 \qquad (J_F + J_{\bar F} A)u \geq 0$

(2) $\quad u \geq 0 \qquad (J_F + J_{\bar F} A)u \geq J_F w \geq 0$

(3) $\quad u \geq J_F w \geq 0 \quad Au \geq f$, où $f=0$ sur F et $=-\infty$ sur $\bar F$

la dernière forme servant au **23** à vérifier l'ambimesurabilité. Si $\tilde A$ est le dériveur $J_F + J_{\bar F} A$, on reconnait en (1) (resp en (2)) le système définissant la réduite $\tilde R J_F w$ (resp le potentiel $\tilde G J_F w$) de $J_F w$ relativement à $\tilde A$. Ainsi, si (1) a une solution (ce qui est le cas si Rw existe), le système a une plus petite solution notée $H_F w$ (en linéaire, H_F est le noyau harmonique associé à F), égale à $\tilde R J_F w$ et à $\tilde G J_F w$, et qui vérifie donc

(Dir) $\qquad H_F w = w$ sur $F \qquad AH_F = 0$ sur $E \setminus F$

Autrement dit, $H_F w$ est la solution du problème de Dirichlet pour la donnée frontière $w \geq 0$ sur F (et la référence (0,0)). L'opérateur croissant H_F ainsi défini est appelé *opérateur de réduction sur* F. On a évidemment $H_F w \leq R(J_F w)$ pour tout $w \geq 0$; plus remarquable est le fait qu'on ait

$$H_F w = RJ_F w \quad \text{si} \quad Aw \text{ est } \geq 0$$

en effet, si Aw est ≥ 0, on a nécessairement $w = H_F w = RJ_F w$ sur F, d'où $AH_F w \geq ARJ_F w$ sur F et donc partout, chacun d'eux valant 0 sur $E \setminus F$. En théorie linéaire, cette égalité joue un rôle important parce qu'elle permet, pour w excessive (i.e. $w \geq 0$ et $Aw \geq 0$), de remplacer le calcul non linéaire de $RJ_F w$ par le calcul linéaire de $H_F w$; évidemment, cela est perdu dans notre contexte... mais on y gagnera une bien plus simple démonstration du principe de domination que celle donnée traditionnellement en linéaire (qui repose sur un calcul du genre de celui vu au **17a**).

Le superprincipe de domination

On va retrouver ici, comme application du prototype 7 et de la définition 17 des potentiels, l'analogue du principe complet du maximum en théorie linéaire [élémentaire] sous-markovienne. Comme nous n'avons pas fait d'hypothèse "sous-markovienne" (cf cependant II-7, et la remarque b) ci-dessous), cela prend ici la forme d'un principe de domination "super". Bien entendu, il y a un énoncé symétrique en regardant en dessous de la référence au lieu de au dessus.

20 **Théorème.** *Soient* $v \in \mathcal{D}$ *majorant* η *et* $u = G^\eta f$ *avec* $f \in \mathcal{E}$ *majorant* $\xi = A\eta$. *Si on a* $u \leq v$ *sur* $\{Au > Av\}$, *on a* $u \leq v$ *partout.*

D/ D'après la proposition **7**, on a $Au \le A(u \wedge v)$, donc $u \wedge v$ est comme u solution du système (en w) $w \ge \eta$, $Aw \ge Au (\ge \xi)$. D'où on a $u = u \wedge v$ par minimalité de l'η-potentiel $u = G^{\eta}Au$.

Remarques. a) Si on a $Av \ge \xi$, il suffit évidemment d'avoir $u \le v$ sur $\{Au > \xi\}$ pour conclure. On établira plus tard, avec des hypothèses additionnelles, que les fonctions $v \ge \eta$ telles que [$u \le v$ sur $\{Au > \xi\}$] implique [$u \le v$ partout] sont celles telles que $Av \ge \xi$.

b) Soit (v_t) une application croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{D}$ telle que $v_0 = v$ et $Av_t \ge Av$ pour tout $t \ge 0$. Alors on a $u \le v_t$ partout dès qu'on a $u \le v_t$ sur $\{Au > Av\}$. Si on suppose que A vérifie $A(w+c) \ge Aw$ pour tout $w \in \mathcal{D}$ et tout $c \in \mathbb{R}_+$ (ce qui revient à dire, en linéaire, que N est sousmarkovien si $A = I - N$ avec N croissant), on peut prendre v_t égal à $v+t$, et on retrouve alors l'énoncé familier du principe complet du maximum. Ce remplacement du "$v_t = v+t$" classique par "$t \mapsto v_t$" croissant sera précisé et systématisé au **II-4** lorsque nous aborderons l'axiome de productivité.

c) On montrera plus tard, avec des hypothèses additionnelles assez fortes, que les opérateurs croissants vérifiant divers principes de domination sont des opérateurs potentiels.

L'AXIOME D'AMBIMESURABILITÉ

21 On revient au cas général : la tribu $\mathcal{E}$ n'est pas forcément égale à $\mathcal{P}(E)$, et le domaine $\mathcal{D}(A)$ de notre dériveur simple A est normal par rapport à $\mathcal{E}$. Se pose alors la question : est-ce-que le système en u, de paramètres $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f_0 \in \mathcal{E}$,

$$(*) \qquad u \ge u_0 \qquad Au \ge f_0$$

ayant par hypothèse une solution dans $\mathcal{D}(A)$, a une solution minimale dans $\mathcal{D}(A)$? Nous préférons remplacer cette question par une variante plus exigeante et plus aisée à la fois. Désignant par $\tilde{A}$ une extension de A en un dériveur simple sur $\overline{\mathbb{R}}^E$, nous regardons le système en u, de paramètres $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f_0 \in \mathcal{E}$,

$$(\tilde{*}) \qquad u \ge u_0 \qquad \tilde{A}u \ge f_0$$

ayant par hypothèse une solution $v_0 \in \mathcal{D}(A)$, et nous nous demandons quand sa solution minimale $\tilde{u}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^E$, qui existe d'après **13**, appartient à $\mathcal{D}(A)$ (elle sera alors évidemment solution minimale dans $\mathcal{D}(A)$ pour $(*)$).

22 On va d'abord exhiber un procédé par récurrence transfinie pour "construire" $\tilde{u}$. Pour $x \in E$ et $u \in \overline{\mathbb{R}}^E$ tel que $u_0 \le u \le v_0$, soit

$$\tau_u^x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists r \in \mathbb{Q}_+\ r \le t \text{ et } \varepsilon_x \tilde{A}(u + r\,1_{\{x\}}) \ge f_o^x - \tfrac{1}{n}\}$$

en convenant que $\inf \emptyset = v_o^x - u_o^x$ (définition qui se simplifie en

$$\tau_u^x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \varepsilon_x \tilde{A}(u + t\,1_{\{x\}}) \ge f_o^x\}$$

si $\lambda \mapsto \varepsilon_x \tilde{A}(u+\lambda 1_{\{x\}})$ est continue ; cette forme simple ne suffit pas en général pour étudier plus loin la mesurabilité de $x \mapsto \tau_u^x$). On a $\tau_u^x \le v_o^x - u_o^x$ d'après **Ax 1**, et $\tau_u^x \le \tilde{u}^x - u^x$ pour $u \le \tilde{u}$. On définit ensuite un élément u_x de $\overline{\mathbb{R}}^E$ par

$$u_x \quad = u + \tau_u^x 1_{\{x\}}$$

et enfin, faisant varier $x \in E$, à $u \in \overline{\mathbb{R}}^E$ tel que $u_o \le u \le v_o$, on associe son "dérivé"[7] $u' \in \overline{\mathbb{R}}^E$ défini par

$$u' = \sup_{x \in E} u_x$$

Pour $u_o \le u \le \tilde{u}$, on a $u \le u' \le \tilde{u}$, et $u = u'$ ssi $u = \tilde{u}$ (la nécessité résulte de **Ax 2**). On peut alors définir une suite transfinie croissante (u_i) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}^E$ coincés entre u_o et $\tilde{u}$ en partant de u_o et en posant $u_{i+1} = u_i'$ pour tout ordinal i et $u_j = \sup_{i<j} u_i$ si j est limite. On a $u_i = \tilde{u}$ si $u_i = u_{i+1}$, et comme, pour une raison évidente de cardinalité, la suite (u_i) finit par stationner, on est sûr d'atteindre "un jour" $\tilde{u}$ de cette façon.

Et nous serions (trivialement) assurés de l'appartenance de $\tilde{u}$ à $\mathcal{D}(A)$ si nous étions dans la situation suivante :

(a) $u \in \mathcal{D}(A)$ implique $u' \in \mathcal{D}(A)$,

(b) la suite (u_i) stationne à partir d'un ordinal $i < \Omega$[8].

Mais, si (a) se vérifie assez bien, (b) est très coriace...

Dans un contexte que nous ne développerons pas ici, il existe des théorèmes puissants, en théorie descriptive des ensembles, permettant d'établir le stationnement de suites transfinies à partir d'un "petit" ordinal sur une fonction ayant une "honnête" mesurabilité (cf [Zinsmeister]). Ils sont malheureusement mal adaptés à la situation présente (mais sont efficaces dans d'autres situations en théorie du potentiel : cf **24**) ; probablement, les problèmes de mesurabilité que nous nous posons ici ne peuvent pas avoir de solution satisfaisante au sein de la théorie des ensembles habituelle.

---

7 Réminiscent de "dérivé d'un ensemble" au sens de Cantor dans un espace topologique ; à ce propos, le lecteur pourra s'amuser à retrouver la dérivation de Cantor comme exemple d'action d'un dériveur élémentaire sur-additif, l'adhérence d'une partie étant la réduite de son indicatrice relativement à la référence (0,0).

8 Une des notations classiques pour aleph_1.

Prenant nos désirs pour des réalités, nous prendrons donc comme axiome la propriété convoitée, puis, à la rubrique suivante nous exhiberons une classe assez large de dériveurs simples vérifiant cet axiome.

23 Nous dirons que A est *mesurable* si $u \in \mathcal{D}(A)$ implique $Au \in \mathcal{E}$, ce qui implique au 22 la $\mathcal{E}$-mesurabilité de $x \mapsto \tau_u^x$ pour $u \in \mathcal{D}(A)$, et que A est *uniformément mesurable* s'il vérifie plus généralement

Si $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est une famille* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}$*-mesurable d'éléments de* $\mathcal{D}(A)$*, alors* $(Au_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est aussi* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}$*-mesurable*

propriétés d'allure assez familière en théorie de la mesure pour paraître naturelles.

C'est là faire l'autruche : notre uniforme mesurabilité est trop faible pour correspondre à la notion ayant même nom en théorie descriptive des ensembles, tandis que la mesurabilité est trop forte pour inclure les dériveurs élémentaires des maisons de jeu boréliennes à coupes non dénombrables.

Nous laissons le lecteur vérifier que le (a) du 22 est vrai si A est uniformément mesurable. Enfin, la résolution du système (*) ressemblant au calcul d'un inverse, nous dirons que A est *ambimesurable* s'il est uniformément mesurable et s'il vérifie

pour tout $u_o \in \mathcal{D}(A)$, $f_o \in \mathcal{E}$, *si le système* $u \geq u_o$, $Au \geq f_o$ *en* u *a une solution dans* $\mathcal{D}(A)$, *la solution minimale dans* $\bar{\mathbb{R}}^E$ *relative à une extension* $\tilde{A}$ *de* A *en un dériveur simple sur* $\bar{\mathbb{R}}^E$ *est* $\mathcal{E}$*-mesurable*[9].

Ce qui nous permet d'énoncer notre axiome de mesurabilité avec concision mais sans excès de fierté :

Ax 3 : Le dériveur simple A est ambimesurable

Comme annoncé, nous privilégions (*) par rapport à (**) : il est malheureusement nécessaire de choisir l'un des deux (cf 26). L'axiome 3 sera notre seul axiome "dissymétrique". Par contre, maigre consolation, il est trivialement préservé par les procédés d'extension à $\bar{\mathbb{R}}^E$ vus au 6.

Il reste cependant que cet axiome est bien trop artificiel, et peu performant : A et B étant deux dériveurs simples ambimesurables de même domaine, on est bien incapable de vérifier que $A \wedge B$, ou A+B, etc, en est encore un !

---

[9] Il suffit de le vérifier pour l'extension maximale A^ (cf 6) : en effet celle-ci fournit la plus petite solution minimale.

En particulier, A étant ambimesurable, on est incapable de vérifier que pI+A l'est aussi pour tout p>0 alors que plus tard, si A est un producteur, on définira sa résolvante en prenant les inverses des pI+A ! J'ai pensé un (bon) moment pouvoir remédier à cela en introduisant un paramètre fonctionnel dans le système (*) qui s'écrirait alors, avec un léger changement de notations, $w\geq u$, $Aw\geq\varphi(f,u)$, où $\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ vérifie des hypothèses convenables. Malheureusement, il y a alors conflit entre le §I, qui veut des notions invariantes par changement d'échelle, et le §II qui réclame une certaine régularité de φ pour donner des exemples. Il a donc fallu se débrouiller autrement...

Tous ces défauts disparaîtront à la rubrique suivante, mais au prix de l'introduction d'une propriété de continuité à gauche des dériveurs pour la convergence simple, fréquemment vérifiée (et toujours vérifiée par hypothèse en linéaire). Elle nous a semblé cependant trop forte pour être prise comme axiome : elle écarte certains opérateurs naturels, qui, construits à l'aide du théorème de point fixe de Banach (cf **II-27**), ont peu de chance d'être réguliers pour la convergence simple.

A partir du §II, les opérateurs envisagés auront, sauf mention du contraire, leurs domaine et image inclus dans $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$: ils seront donc, sans avoir à le dire, $\mathcal{E}$-mesurables. De manière générale, nous aurons rarement, sauf si nous la cherchons, l'occasion de nous pencher sur des problèmes de mesurabilité épineux. C'est d'ailleurs là le seul attrait de **Ax 3**.

DÉRIVEURS MESURABLES MONTANTS

Il est grand temps de donner des exemples intéressants de dériveurs ambimesurables, sans l'être de manière évidente. Nous allons d'abord en décrire, puis en construire.

24 Adaptant à notre convenance un vocable usuel, nous dirons qu'un opérateur K, de domaine normal $\mathcal{D}(K)$, est *montant* si

$$u_n\uparrow u \text{ dans } \mathcal{D}(K) \Rightarrow Ku_n\to Ku$$

(la convergence étant *simple*) même si K n'est pas croissant : si K est un dériveur élémentaire I-N, la montée de N, croissant, au sens usuel équivaut à la montée au sens élargi de K. Nous montrerons ci-dessous qu'un dériveur simple, mesurable et montant est ambimesurable.

La classe $\mathfrak{M}$ des dériveurs simples mesurables et montants de même domaine normal $\mathcal{D}$ a largement les propriétés de stabilité, triviales ici, qui nous manquaient à la fin de **23**:

si $H(t_1,\cdots,t_n)$ est une fonction continue croissante de domaine approprié dans $\overline{\mathbb{R}}^n$, on a $H(A_1,\cdots,A_n)\in\mathfrak{M}$ pour $A_1,\cdots,A_n$ dans $\mathfrak{M}$.

qu'on peut aussi compliquer en permettant que H dépende aussi de $x\in E$, tout en étant mesurable en $x,t_1,\cdots,t_n$.

Par ailleurs, $\mathfrak{M}$ est stable pour les limites décroissantes: si (A_n) est une suite dans $\mathfrak{M}$ telle que, pour tout $u\in\mathcal{D}$, A_nu tend simplement en décroissant vers une limite $A_\infty u$, alors on a $A_\infty\in\mathfrak{M}$. Le seul fait non évident est que A_∞ soit montant (d'autant plus que cela a l'air d'aller dans le mauvais sens ; il suffit cependant de penser au cas élémentaire $A_n=I-N_n$, N_n croissant, pour retrouver une situation familière) ; or, pour $u_k\uparrow u$ dans $\mathcal{D}$, on a

$$A_\infty u \le \liminf_k A_\infty u_k \le \limsup_k A_\infty u_k \le \limsup_k A_n u_k = A_n u$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, la première inégalité provenant de **10**, d'où, en faisant tendre n vers $+\infty$, $A_\infty u=\lim_k A_\infty u_k$.

Enfin, si A est montant, la propriété de montée est conservée par les opérateurs associés à A via les systèmes (*). Soit $Z(u,f)$ la plus petite solution, si elle existe, de $w\ge u$, $Aw\ge f$; si on a $u_n\uparrow u$ et $f_n\uparrow f$, alors tous les $Z(u_n,f_n)$ existent si $Z(u,f)$ existe (et ce qui suit établira aussi la réciproque), la suite des $Z(u_n,f_n)$ est croissante par minimalité de $Z(\cdot,\cdot)$, et, comme A est montant, sa limite est solution minimale de $w\ge u$, $Aw\ge f$. Ceci s'applique en particulier aux opérateurs de réduite et de potentiel, et sera de temps en temps utilisé ultérieurement sans crier gare.

Voici le résultat modeste (dans la construction par récurrence transfinie du **22**, nous stationnerons à ω[10]), mais néanmoins très intéressant, d'ambimesurabilité promis ci-dessus :

25 **Théorème.** *Pour que le dériveur simple* A *soit ambimesurable, il suffit qu'il soit mesurable et montant.*

D/ Supposons donc A mesurable et montant. Nous laissons au lecteur la démonstration du fait que A est uniformément mesurable (analogue à celle de la première moitié du théorème de Fubini), et passons à la résolution d'un système (*). Reprenons la suite

---

[10] Une des notations classiques pour $\aleph_0$

transfinie (u_i) vue au 22 et montrons qu'elle stationne dès ω. Nous notons (u_n) la suite obtenue pour $i<\omega$. Par définition, on a $u_\omega = \lim\uparrow u_n$, et donc $Au_\omega = \lim Au_n$ par hypothèse. Par ailleurs, étant donné la définition de l'application $u \mapsto u'$, on a $Au_n^x \geq f_o^x$ pour $x \in \{u_n = u_{n+1}\}$. Donc on a $Au_\omega \geq f_o$ sur $F = \{x : \exists n\ u_n^x = u_\omega^x\}$ tandis que, sur $E \setminus F$, on a $Au_n < f_o$ pour $x \in \{u_n < u_{n+1}\}$, d'où $Au_\omega \leq f_o$. Enfin, fixons $x \in E \setminus F$ et désignons par w_n la fonction égale à u_{n+1} en x et à u_n ailleurs (c'est la fonction qui était notée $u_{n,x}^x$ au 22) : par construction de u_{n+1} on a $Aw_n^x \geq f_o^x$ et donc, comme (w_n) tend en croissant vers u_ω, on a $Au_\omega^x = f_o^x$. Tout compte fait, on a $Au_\omega \geq f_o$ sur F et $Au_\omega = f_o$ sur $E \setminus F$ si bien que u_ω est bien la plus petite solution du système.

26 *Remarque.* Supposons E métrisable compact de tribu borélienne $\mathcal{E}$, et soit (P_n) une suite de noyaux (positifs, bornés) sur $(E, \mathcal{E})$ telle que $\sup_n P_n 1$ soit bornée. Posons $N_n = P_1 \vee \cdots \vee P_n$[11], $A_n = I - N_n$ de domaine $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$. Les dériveurs simples A_n sont continus pour la convergence simple (bornée) et le dériveur simple

$$A = \lim\downarrow A_n = I - \sup_n P_n$$

vérifie les conditions du théorème. C'est, quand chaque P_n est markovien (i.e. $P_n 1 = 1$), le type de dériveur simple qu'on rencontre en théorie des maisons de jeux (à coupes dénombrables). Soit maintenant B le dériveur simple dual de A:

$$B = \lim\uparrow B_n = I - \inf_n P_n$$

où $B_n = P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$. Il est aussi "naturel" que A (par exemple, on le rencontre implicitement, pour E fini, en économie mathématique linéaire), et pourtant il n'est pas forcément ambimesurable. Le mieux qu'on puisse dire en général dans ce cas, à l'aide de la théorie descriptive des ensembles, est que la suite transfinie (u_i) associée en 22 à un système $(*)$ stationne dès Ω, et que u_Ω est une fonction (à surgraphe) analytique, donc universellement mesurable. On comprend donc que que **Ax 3** est trop contraignant, même si, pour E non dénombrable, le théorème ne fournit pas les seuls cas "explicites" de dériveurs simples ambimesurables (cf II-27) ; mais qu'y faire? Si on augmente $\mathcal{D}(A)$ des fonctions analytiques, il faut aussi augmenter $\mathcal{I}(A)$ des différences de telles fonctions, etc : on ne saura finalement plus rien dire, avec les

---

[11] Au sens ponctuel ! N_n n'est pas un noyau.

axiomes habituels de la théorie des ensembles, sur la mesurabilité des solutions de (*).

27 **Exemples.** Soient $\mathfrak{U}$ la classe de tous les noyaux $\mathcal{E}$-mesurables positifs bornés, et $\mathfrak{B}$ la plus petite classe d'opérateurs sur $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ contenant $\mathfrak{U}$ et vérifiant les propriétés de stabilité suivantes (où ■ désigne une classe d'opérateurs dont on teste la stabilité pour une opération)) :

α) Si N_1 et N_2 sont dans ■, le composé $N_1 \circ N_2$ l'est aussi.

β) Si $H(x,t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{E} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est, pour $x \in E$ fixé, une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}^n$ et si $N_1,\dots,N_n$ sont dans ■, alors $H(N_1,\dots,N_n) : u \mapsto (x \mapsto H(x,\varepsilon_x N_1 u,\dots,\varepsilon_x N_n u))$ l'est aussi.

L'ensemble $\mathfrak{C}$ des $\lambda(I-N)$, pour N parcourant $\mathfrak{B}$ et λ parcourant $\mathbb{R}_+$, est une large classe de dériveurs élémentaires mesurables, continus pour la convergence simple. Soient maintenant $\mathfrak{D}$ la classe obtenue en adjoignant à $\mathfrak{C}$ les opérateurs de la forme

$$u \mapsto (x \mapsto \varphi(x,u^x)),\quad \varphi \in \mathcal{E} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ pour } x \in E \text{ fixé,}$$

et $\mathfrak{E}$ celle obtenue en stabilisant $\mathfrak{D}$ pour β) : $\mathfrak{E}$ est une classe plus large de dériveurs simples, mesurables, et continus pour la convergence simple, non élémentaires en général. Enfin, si, pour définir $\mathfrak{B}$, on adjoint aux clauses α) et β) la clause

γ) Si (N_k) est dans ■, alors $\sup_k N_k$ l'est aussi si $\sup_k N_k h$ est bornée pour tout $h \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$.

$\mathfrak{E}$ devient une vaste classe de dériveurs simples, mesurables et montants, et donc ambimesurables, qu'on pourrait encore élargir en remplaçant dans γ) la fonction $(t_k) \mapsto \sup_k t_k$ par n'importe quelle fonction globalement croissante $H(t_1,\dots,t_k,\dots)$ définie sur un domaine approprié de $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, et *globalement montante*, i.e. telle que, si, pour chaque k, (t_k^i) est une suite croissante en i,

$$[\, t_k^i \uparrow_i t_k \text{ pour tout } k \,] \Rightarrow [\, H(t_1^i,\dots,t_k^i,\dots) \uparrow_i H(t_1,\dots,t_k,\dots) \,]$$

et on pourrait de plus permettre à H de dépendre de $x \in E$, etc.

II. PRODUCTEURS. ÉTUDE DE LA RÉDUITE ET DU POTENTIEL. AMENDEURS

L'espace $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ étant désormais noté $\mathcal{D}$ pour alléger, on se donne un dériveur simple A de domaine $\mathcal{D}(A)$ égal à $\mathcal{D}$ et d'image $\mathcal{I}(A)$ incluse dans $\mathcal{D}$. On suppose $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{I}(A)$ inclus dans $\mathcal{D}$ à cause du rôle important que va jouer ici la norme uniforme. *Sauf mention additionnelle, tout ce qui touche à la continuité sera relatif à la convergence uniforme.* En théorie linéaire élémentaire, tous les opérateurs rencontrés sont des noyaux ou des différences de noyaux ; ils sont donc continus pour la convergence simple (*on entendra toujours par convergence simple la convergence simple bornée*). Ici, ce n'est pas toujours le cas (cf I-27), ce qui rend l'étude de la convergence simple plus délicate, sauf évidemment si E est fini.

L'égalité supposée de $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}$, outre qu'elle fixe les idées, permettra d'utiliser des notions familières (la convergence à l'infini dans la définition d'une progression, l'addition dans la définition d'une résolvante, etc.) là où il aurait fallu sinon introduire des notions "barbares"[1]. Du point de vue de la théorie du potentiel, un autre choix naturel possible est $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_+$, avec $A0=0$, mais on perd alors la moitié de la structure vectorielle, ce qui complique l'étude de l'équation résolvante ; de toute manière, on peut facilement ramener le cas $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_+$ au cas $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}$ en prolongeant A par $Au=A(u^+)-u^-$.

Sauf si E est fini[2], les notions considérées ici ne sont plus invariantes par un changement d'échelle quelconque ; nous laissons au lecteur le soin de voir quels changements d'échelle seront licites ici. Cette perte d'invariance est inévitable si E est infini ; en effet, plus d'une proposition à venir (en premier lieu, l'axiome de dérivation à la frontière) aura la forme, avec $T\subseteq E$ et v fonction de u,

$$[\inf_{x\in T} u(x)=0] \Rightarrow [\inf_{x\in T} v(x)=0]$$

---

[1] En fait, le choix même de $\mathcal{D}$ et de la convergence uniforme sont de cet ordre : on a choisi la fonction constante 1 comme étalon et les opérations ordinaires pour définir et effectuer les comparaisons à cet étalon.

[2] Il y a aussi une petite restriction dans ce cas, due à $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}$.

avec des inf qui ne sont généralement pas atteints. Ceci dit, il faut considérer cette perte moins comme un défaut que comme la possibilité d'avoir pu choisir initialement des "systèmes de coordonnées" au départ et à l'arrivée adaptés à la situation.

L'AXIOME DE DÉRIVATION À LA FRONTIÈRE

1 L'axiome suivant, qui est une extension naturelle de **Ax 1**, sera nécessaire pour que **Ax 5** soit pleinement efficient :

Ax 4 : Soient $u, v \in \mathcal{D}$ tel que $u \leq v$, et $T \subseteq E$ non vide. Alors

$$[\inf_{x\in T} (v^x - u^x) = 0] \Rightarrow [\inf_{x\in T} (Av^x - Au^x) \leq 0]$$

Il implique **Ax 1** et lui est évidemment équivalent si E est fini. Son nom provient du fait que, si $\check{E}$ est le compactifié de Stone-Čech de E, et si A est canoniquement prolongé en une application $\check{A}$ de $\mathscr{C}(\check{E})$ dans $\mathscr{C}(\check{E})$, alors $\check{A}$ est un dériveur ssi A vérifie **Ax 4**.

L'axiome de dérivation à la frontière est toujours vérifié si A est élémentaire, et aussi sous une hypothèse raisonnable :

2 **Théorème.** *Le dériveur* A *vérifie* **Ax 4** *s'il est continu.*

D/ On reprend les notations de l'énoncé de l'axiome. Supposons $\inf_{x\in T} (v^x - u^x) = 0$ et posons pour chaque entier n

$$H_n = T \cap \{v \leq u + \tfrac{1}{n}\}$$

ensemble non vide par hypothèse. Posons aussi

$$u_n = u \text{ sur } H_n^c \quad , \quad u_n = v \text{ sur } H_n$$

On a $u_n \leq v$ partout avec égalité sur H_n, et donc $Au_n \geq Av$ sur H_n en vertu de **Ax 1**. Par ailleurs, u_n converge uniformément vers u, et donc Au_n vers Au par continuité. Donc il ne peut exister $\varepsilon > 0$ tel que $\inf_T (Av - Au) \geq \varepsilon$.

Remarque. Tout dériveur continu est simple ; mais, contrairement à la continuité pour la convergence simple, la continuité est sans influence sur l'ambimesurabilité. Par ailleurs **Ax 1**, **Ax 2** et **Ax 5** entraineront conjointement que, pour chaque $x \in \mathcal{D}$, $u \mapsto \varepsilon_x Au$ est continue, et donc que A est continu si E est fini, et pas loin si E est dénombrable (un changement d'échelle permet de majorer en module les éléments de $\mathcal{J}(A)$ par une fonction tendant vers 0 à l'infini). De plus, en théorie linéaire élémentaire, A est toujours continu (par hypothèse ou en conclusion). On pourrait donc croire ne pas perdre grand chose en prenant comme axiome 4 la continuité des dériveurs. Nous ne l'avons pas fait afin que, comme pour l'axiome 2 en **I-8**, tout dériveur élémentaire soit un exemple, mais, surtout à cause de l'impossibilité en général d'étendre alors, avec conservation de l'axiome, le dériveur à $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{P}(E))$, ce qui, étant donnée notre doctrine exposée au **I-13**, aurait constitué une hérésie.

3 **Extension.** Ayant posé $\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{L}_\infty(\mathcal{P}(E))$ pour simplifier, nous allons voir que la restriction à $\bar{\mathcal{D}}$ de l'extension maximale (minimale) $A^\wedge$ ($A^\vee$) de A à $\bar{\mathbb{R}}^E$ vue en **I-6** vérifie **Ax 4** si A le vérifie ; nous les noterons respectivement $\bar{A}$ et $\underline{A}$, et ne regarderons que le cas de $\bar{A}$, privilégié à cause de la note de **I-23**. Supposons qu'on ait $\inf_T(\bar{v}-\bar{u})=0$ pour $T\subseteq E$ non vide et $\bar{u},\bar{v}\in\bar{\mathcal{D}}$ avec $\bar{u}\leq\bar{v}$, et soit (x_n) une suite dans T telle que $\inf_n(\bar{v}(x_n)-\bar{u}(x_n))=0$. Vu la définition de l'extension $\bar{A}$, on peut trouver dans $\mathcal{D}$ des éléments u, v tels que $u\leq\bar{u}$, $v\leq\bar{v}$ et que u et $\bar{u}$, Au et $\bar{A}\bar{u}$, v et $\bar{v}$, Av et $\bar{A}\bar{v}$ soient égaux en x_n pour tout n. D'où la conclusion.

L'AXIOME DE PRODUCTIVITÉ

4 Pour alléger l'écriture, nous poserons désormais, pour $v\in\mathcal{D}$,

$$\iota(v) = \inf_{x\in E} v^x$$

Ceci fait, nous dirons qu'une application $\mathfrak{u}: t\mapsto u_t$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{D}$ est une *ascension issue de* u si on a $u_o=u$ et si $\mathfrak{u}$ est *continue, croissante,* et vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall t>0 \quad \iota(u_t-u_o) > 0 \quad , \quad \lim_{t\uparrow+\infty}\iota(u_t) = +\infty$$

Autrement dit, l'ascension croît strictement au départ de u et s'éloigne à l'infini, uniformément.

L'ascension $\mathfrak{u}$ est appelée une *progression issue de* u (relativement au dériveur A) si elle vérifie

$$\forall t\geq 0 \quad Au_t \geq Au$$

Par exemple, si R^u est défini et continu sur $\mathcal{D}\cap\{v : v\geq u\}$, alors $t\mapsto R^u(u+t)$ est, pour $t\geq 0$, une progression issue de u.

L'ascension $\mathfrak{u}$ est *une progression stricte issue de* u (relativement au dériveur A) si

$$\forall t>0 \quad \iota(Au_t-Au_o) > 0 \quad , \quad \lim_{t\uparrow+\infty}\iota(Au_t) = +\infty$$

Par exemple, une progression relative à A est une progression stricte relative à pI+A, pour tout réel p>0. Autre exemple : si A vérifie **Ax 4**, si G^u est défini et continu sur $\mathcal{D}\cap\{f : f\geq Au\}$, alors $t\mapsto G^u(Au+t)$ est, pour $t\geq 0$, une progression stricte issue de u, **Ax 4** impliquant aisément que l'on a $\iota[G(Au+t)-u]>0$ pour $t>0$.

Nous utiliserons aussi, mais moins souvent, la notion symétrique appelée *régression*: $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathcal{D}$ est une régression (stricte) relative à A si $-t \mapsto -u_{-t}$ est une progression (stricte) relative au dual de A. Le lecteur qui ne s'y retrouverait pas pourra écrire les inégalités afférentes...

5 Nous en arrivons au dernier axiome, indispensable pour faire vraiment de la théorie du potentiel (sans cela, on peut avoir A bijectif, d'inverse décroissant !). Le dériveur A sera dit *productif* s'il vérifie

Ax 5: Il existe, pour tout $u \in \mathcal{D}$, une progression et une régression issues de u.

et *strictement productif* si progression et régression peuvent être prises strictes dans cet énoncé.

Avant de développer les conséquences de l'axiome de productivité, nous allons regarder ce qu'il donne en linéaire et en profiter pour dégager une classe remarquable de dériveurs.

PRODUCTEURS SOUS-MARKOVIENS

6 Regardons donc ce que donne **Ax 5** dans le cas linéaire : si (u_t) est une progression issue de 0 (progression et régression ici donnent la même chose), on a pour $t>0$ fixé et $\varphi = u_t$,

$$(\Phi) \qquad \iota(\varphi) > 0 \quad \text{et} \quad A\varphi \geq 0$$

Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{D}$ vérifie (Φ), alors, par linéarité, on obtient pour tout $u \in \mathcal{D}$ une progression (u_t) issue de u en posant

$$(U) \qquad u_t = u + t\,\varphi$$

On retrouve en (Φ) une condition familière en théorie linéaire : existence de $\varphi \in \mathcal{E}$ excessive ($\varphi \geq 0$ et $A\varphi \geq 0$), strictement positive ; le changement d'échelle à droite J_φ permet alors de supposer que $\varphi = 1$ (situation dite sousmarkovienne). Ici, la condition sur l'image de φ est plus forte : on a $m \leq \varphi \leq M$ avec $0<m<M<+\infty$; c'est un reflet du fait que J_φ doit être compatible avec notre domaine $\mathcal{D}$. Par ailleurs, la progression (u_t) dans (U) est strictement issue de u ssi $\iota(A\varphi)$ est >0, ce qui équivaut à la bornitude du noyau potentiel, et donc à une hypothèse forte de transience.

Revenons à notre situation non linéaire : contrairement à ce qu'il pourrait sembler a priori, la condition que le dériveur A admette une progression du type (U) issue de tout u, avec $\varphi = 1$

(nous ne regarderons que ce cas), est loin d'être artificielle : elle est vérifiée par les dériveurs de maisons de jeux de I-26. Et on verra plus tard que , si A vérifie cette condition sous-markovienne, $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contractions croissantes sur $\mathcal{D}$. Cela justifie pleinement la considération de cette condition que nous reprenons maintenant de manière plus formelle.

7 Adaptant à notre convenance le vocabulaire classique, nous dirons que le dériveur A est *sousmarkovien* (resp est *markovien*) s'il vérifie, pour tout $u\in\mathcal{D}$ et tout $c\in\mathbb{R}_+$,

$$A(u+c) \geq Au \quad (\text{resp } A(u+c) = Au)$$

Il est alors évidemment productif (mais pas forcément élémentaire, même si E est fini), et φA est encore sousmarkovien pour $\varphi\in\mathcal{D}_+$. Nous allons préciser la structure d'un dériveur simple sousmarkovien. Nous montrons d'abord qu'on peut le rendre markovien grâce à un artifice semblable à celui utilisé en théorie des processus de Markov (et aussi, quand E est fini, en économie mathématique linéaire).

Supposons donc notre dériveur A sousmarkovien ; ajoutons un point δ à E, posons $\tilde{E}=E\cup\{\delta\}$ que l'on munit de la tribu $\tilde{\mathcal{E}}$ qu'on devine, et identifions toute fonction u sur E à la fonction sur $\tilde{E}$ égale à u sur E et égale à 0 en δ (la valeur choisie en δ est arbitraire ; cependant le choix intervient aussi dans (V) et (A) ci-dessous) ; on prendra garde que, hors le cas de 0, une fonction constante sur E n'est pas identifiée à une constante sur $\tilde{E}$. Inversement, à v définie sur $\tilde{E}$ on associe v_δ définie sur E par

(V) $$v_\delta(x) = v(x)-v(\delta)$$

si bien qu'on a $v=v_\delta$ pour v définie sur E. On prolonge alors A sur E en un opérateur $\tilde{A}$ sur $\tilde{\mathcal{D}}=\mathcal{L}_\infty(\tilde{\mathcal{E}})$ comme suit : pour $v\in\tilde{\mathcal{D}}$,

(A) $$\varepsilon_\delta\tilde{A}v = 0 \quad , \quad \varepsilon_x\tilde{A}v = \varepsilon_x A v_\delta \quad \text{pour } x\neq\delta$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\tilde{A}$ est un dériveur simple, ambimesurable et markovien, tel que $\tilde{A}u=Au$ pour $u\in\mathcal{D}$, et de trouver la relation simple existant entre les solutions des systèmes (*) pour $\tilde{A}$ et pour A.

Supposons maintenant A markovien. Fixons $x\in E$, puis posons $E_x=E\setminus\{x\}$, muni de la tribu $\mathcal{E}_x$ qu'on devine, et, à $w\in\mathcal{D}_x=\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_x)$, associons $w_x\in\mathcal{D}$ définie par

(W) $$w_x(x)=0 \quad \text{et} \quad w_x(y)=-w(y) \text{ pour } y\neq x$$

(c'est une variante de ce qui précède, x jouant le rôle de δ ;

noter cependant le signe "-" dans (W)) ; définissons enfin une fonction N_x sur $\mathcal{D}_x$ en posant pour $w \in \mathcal{D}_x$

(N) $$N_x w = \varepsilon_x A w_x$$

N_x est croissante d'après **Ax 1**, continue (pour la convergence uniforme) d'après **Ax 2** et le caractère markovien ; de plus on a, avec un léger abus de langage, $\sup_{x \in E} |N_x c| < +\infty$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire (N) sous la forme suivante : pour $u \in \mathcal{D}$,

(N') $\varepsilon_x A u = N_x w$ où $w^y = u^x - u^y$ pour $y \neq x$

Inversement, si l'on se donne, pour chaque $x \in E$, une fonction *croissante continue* N'_x sur $\mathcal{D}_x$, de sorte que $\sup_{x \in E} |N_x c| < +\infty$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, et si on utilise (N') pour définir un opérateur A' sur $\mathcal{D}$, alors A' est une dériveur simple markovien. Nous laissons au lecteur le soin de taquiner l'ambimesurabilité ; par ailleurs nous lui conseillons de regarder le cas où E est fini parce qu'il bénéficie de notations familières, moins barbares que celles que nous avons dû introduire.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES PRODUCTEURS

8 On appellera *producteur* tout opérateur sur $\mathcal{D}$ vérifiant nos cinq (ou quatre, puisque **Ax 4** implique **Ax 1**) axiomes. Un tel opérateur sera, comme il va de soi, un *producteur strict* s'il est strictement productif. Il nous arrivera de rencontrer des opérateurs vérifiant ces axiomes *sauf* peut-être celui d'ambimesurabilité (par exemple, le dual d'un producteur) : on dira que c'est *producteur grossier* (éventuellement strict) ; distinction qui n'aura d'importance que quand nous utiliserons **I-13**, soit, concrètement à partir de **13**.

Pour E réduit à un point, la notion de producteur coïncide avec celle de fonction continue croissante sur $\mathbb{R}$, et le calcul des potentiels revient à inverser celle-ci. Dès que E, fini, a au moins deux points, la structure est si riche que nous y consacrerons plus tard un développement.

Revenons un instant à la forme canonique du théorème fondamental sur les dériveurs simples vue au **I-14** et au **I-23a** : pour $u, f \in \mathcal{D}$ fixés, on a posé successivement pour $w \in \mathcal{D}$

$$Mw = w - Aw \quad , \quad M^\circ w = u \vee (f + Mw) \quad , \quad A^\circ w = w - M^\circ w$$

si bien que le système $w \geq u$, $Aw \geq f$ s'écrit $A^\circ w \geq 0$. On vérifie aisément que A° est un producteur si A en est un ; on verra au courant du **22** qu'il est strict si A l'est.

Nous voyons maintenant quelques propriétés de régularité des producteurs promises depuis longtemps :

9 **Théorème.** *Si* A *est un producteur, alors, pour tout* $x \in E$, *l'application* $v \mapsto \varepsilon_x Av$ *est continue, et, pour chaque* $u \in \mathcal{D}$, *sa restriction à* $\mathfrak{B}(u,x)$ *est croissante (tandis que celle à* $\mathfrak{J}(u,x)$ *est décroissante ; cf* I-2,3*).*

D/ Nous commençons par étudier les restrictions de $v \mapsto \varepsilon_x Av$ aux divers $\mathfrak{B}(u,x)$. D'abord, comme **Ax 1** équivaut à la décroissance de $v \mapsto \varepsilon_x Av$ sur chaque $\mathfrak{J}(u,x)$, l'existence d'une progression issue de u pour chaque u n'est possible que si $v \mapsto \varepsilon_x Av$ est croissante sur chacun des $\mathfrak{B}(u,x)$, et donc continue d'après **Ax 2**. Ceci fait, nous allons montrer à l'aide des progressions que $v \mapsto \varepsilon_x Av$ est continue "à droite" ; on ferait de même, à gauche, à l'aide des régressions. Fixons $u \in \mathcal{D}$, $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ puis choisissons, grâce à la continuité et la croissance de $v \mapsto \varepsilon_x Av$ restreint à $\mathfrak{B}(u,x)$, un $\lambda > 0$ tel qu'on ait

$$0 \le \varepsilon_x Au - \varepsilon_x A(u - \lambda 1_{\{x\}}) < \varepsilon$$

Posons $v = u - \lambda 1_{\{x\}}$ pour simplifier ; on a $v = u$ sauf en x et $v^x < u^x$. Considérons une progression (v_t) issue de v et soit $\tau \in \mathbb{R}_+$ défini par $\tau = \inf\{t \ge 0 : v_t \ge u\}$: par définition d'une progression on a

$$\tau < +\infty \quad , \quad \iota(v_\tau - v) > 0 \quad , \quad Av \le Av_\tau$$

et aussi, comme $u = v$ sauf en x, $\inf_{y \ne x}(v_\tau^y - u^y) > 0$ tandis qu'en x on a $v_\tau^x = u^x$ par continuité de (v_t), d'où finalement $\varepsilon_x Av_\tau \le \varepsilon_x Au$ d'après **Ax 1**. Ainsi, on a $\varepsilon_x Av \le \varepsilon_x Aw \le \varepsilon_x Au$ et donc $0 \le \varepsilon_x Au - \varepsilon_x Aw < \varepsilon$ pour w appartenant au voisinage "droit" $\mathfrak{J}(u,x) \cap \{w : u \le w \le v_\tau\}$ de u dans $\mathfrak{J}(u,x)$. On en déduit que $v \mapsto \varepsilon_x Av$ est continue à droite sur chaque $\mathfrak{J}(u,x)$, et elle est par ailleurs décroissante ; comme elle est continue et croissante sur chaque $\mathfrak{B}(u,x)$, on conclut sans peine qu'elle est continue à droite sur $\mathcal{D}$. C'est fini.

On suppose désormais que A *est un producteur.*

En absence d'injectivité, on peut avoir $u \le v$ et $Au \ge Av$ (en théorie linéaire, v-u est alors une fonction dite défective), et même $u \le v$ et $Au = Av$ (en linéaire, v-u est alors une fonction invariante ≥ 0) ; on verra au **18** que cela caractérise en fait la non injectivité d'un producteur. Le résultat suivant nous permet un modeste contrôle du "débordement" de Au au dessus de Av, plus efficace cependant qu'il n'y paraît ; au **13** une variante nous servira à préciser précieusement le comportement de la réduite tandis qu'une autre au **18** nous servira au §III à démontrer l'injectivité de pI+A pour p>0 (s'il n'est pas grossier !).

10 **Théorème.** *Soient* $u,v\in\mathcal{D}$ *tels que* $u\le v$ *et* $u\ne v$. *On a*

$$\inf_{x\in\{u<v-\varepsilon\}}(Au^x - Av^x) \le 0$$

pour $\varepsilon>0$ *suffisamment petit (a fortiori pour* $\varepsilon=0$*).*

D/ Soient (u_t) une progression issue de u et $\tau=\inf\{t\ge0 : u_t\ge v\}$. On a alors $u_\tau\ge v$ et $\inf(u_\tau-v)=0$. Si l'on prend $2\varepsilon\le\iota(u_\tau-u)>0$, on a plus précisément $\inf_{\{u<v-\varepsilon\}}(u_\tau-v)=0$, d'où, d'après **Ax 4**, $\inf_{\{u<v-\varepsilon\}}(Au_\tau-Av)\le0$, et on conclut grâce à $Au_\tau\ge Au$.

Voici en corollaire (avec $u\wedge v$, u à la place de u, v) une variante de **I-20**; l'hypothèse est bien plus forte qu'en **I-20** si E est infini, mais, en revanche, l'énoncé ne fait pas intervenir la notion de potentiel, ce qui est ici un avantage.

11 **Corollaire.** *Soient* $u,v\in\mathcal{D}$. *Si pour un* $\eta>0$ *on a* $u\le v$ *sur* $\{Au\ge Av-\eta\}$ *alors on a* $u\le v$ *partout.*

D/ L'hypothèse équivaut à $Au+\eta<Av$ sur $\{u\wedge v<u\}$, avec $\eta>0$. D'après **Ax 1**, on a $A(u\wedge v)\ge Av$ sur $\{v\le u\}$, donc $A(u\wedge v)>Au+\eta$ sur $\{u\wedge v<u\}$. Or, d'après **10**, si $\{u\wedge v<u\}$ n'est pas vide, l'inf de $A(u\wedge v)-Au$ est ≤0 sur cet ensemble. D'où la conclusion.

Remarque. Quand E est fini, **Ax 4** ne dit rien de plus que **Ax 1**, l'inf est atteint dans **10**, et on peut prendre $\eta=0$ dans **11** qui eût pu dans ce cas être énoncé à la suite de **I-7**.

12 **Extension.** Nous en arrivons, hélas, à un schisme mettant à mal[3] la doctrine du **I-13**: comme **Ax 5** implique une propriété de continuité d'après **9**, il est utopique de penser qu'en général notre producteur A, même s'il est élémentaire, est *extensible,* i.e. vérifie : la restriction $\bar{A}$ à $\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{L}_\infty(\mathcal{P}(E))$ de son extension maximale A^ est un producteur[4]. Il est très rare que cela crée problème (cela n'arrivera dans ce §II qu'en **23** et **27**, où l'on a eu l'imp-(r)udence de considérer un producteur grossier !) ; par ailleurs, il est clair que *tout producteur sousmarkovien est extensible* et d'extension sousmarkovienne. Voir aussi la remarque de **15**.

---

[3] Quand E n'est pas dénombrable, évidemment

[4] Il en est de même pour l'extension minimale

ÉTUDE DE LA RÉDUITE

La première vertu de la productivité est d'assurer l'existence des réduites et d'en permettre une étude assez fine :

13 **Théorème.** *Quelle que soit la référence* $\eta\in\mathcal{D}$*, la* η*-réduite* $R^\eta w$ *de existe pour tout* $w\in\mathcal{D}$ *majorant* η*. De plus, pour* $w\neq\eta$*, on a*

$$\text{(R)}\qquad \inf_{x\in\{w>\eta+\varepsilon\}}(R^\eta w^x - w^x) = 0$$

pour tout $\varepsilon>0$ *suffisamment petit.*

D/ Soit (η_t) une progression issue de η, et posons, comme nous en avons l'habitude maintenant, $\tau=\inf\{t\geq 0 : \eta_t\geq w\}$: τ est fini, et >0 pour $w\neq\eta$. De $A\eta_\tau\geq A\eta$ on déduit que $R^\eta w$ existe et est majoré par η_τ, et alors (R) résulte immédiatement $\inf(\eta_\tau^x - w^x)=0$ si on prend 2ε majoré par $\iota(\eta_\tau-\eta)>0$.

Le fait que $\inf(Rw-w)=0$ est bien connu en linéaire (et bien trivial dans tous les cas !) ; cependant, la précision que nous apportons dans (R) en prenant l'inf sur $\{w>\eta+\varepsilon\}$ est loin d'être anodine : on va voir qu'elle permet d'améliorer nettement, même en linéaire alors que je ne l'ai jamais vu énoncée dans ce cadre, la solution du problème qu'on se posait au **I-16a**, qui, rappelons-le, a rapport avec des problèmes d'optimisation.

14 **Théorème.** *Soit* $\eta\in\mathcal{D}$ *une référence et soient* $u,v\in\mathcal{D}$ *majorant* η*. Pour qu'on ait* $R^\eta u\leq R^\eta v$*, il suffit que, pour tout* $T\subseteq E$*, on ait*

$$\text{(H)}\qquad \inf_{x\in T}[(R^\eta u^x - u^x)=0] \Rightarrow [\inf_{x\in T}(v^x - u^x)\geq 0]$$

D/ Quitte à remplacer v par $v\wedge u$, on peut supposer $v\leq u$ et donc $R^\eta v\leq R^\eta u$, puis, quitte à remplacer v par $R^\eta v$ et u par $u\vee R^\eta v$, que l'on a $v=R^\eta v$. Si on a $R^\eta v\neq R^\eta u$, on a $v\neq u$ et donc (avec un R^v !) $\inf_{x\in\{u>v+\varepsilon\}}(R^v u^x - u^x)=0$ pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit d'après **13**. Mais comme on a $Av\geq\eta$, $R^v u$ majore $R^\eta u$, et il n'y a plus qu'à prendre T égal à $\{u>v+\varepsilon\}$ pour obtenir une négation de (H).

Remarque. Si E est fini, (H) se simplifie évidemment en "$v\geq u$ sur $\{u=R^\eta u\}$", et on peut ramener notre énoncé à cette forme en considérant le compactifié de Stone-Čech. En fait, tout le sel de ce résultat se trouve déjà dans le cas fini.

Nous terminons cet aperçu sur la réduite par un regard sur sa continuité. Cela sera étendu aux solutions des systèmes (*) généraux au **22** quand A est strict.

15 **Théorème.** *Soit* $\eta\in\mathcal{D}$ *une référence. L'opérateur* R^{η} *est toujours continu à droite sur son domaine ; il est continu si* E *est fini ou si* A *est sousmarkovien [ou encore si* A *est strict].*

D/ Soient $u\in\mathcal{D}$ majorant η et (v_t) une progression issue de $v=R^{\eta}u$. Pour $\tau>0$ on a $\iota(v_{\tau}-u)>0$, et donc $v_{\tau}\geq R^{\eta}(u+\varepsilon)$ pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit ; la continuité à droite de R^{η} résulte alors de celle de la progression. Si A est sousmarkovien, les progressions du type $t\mapsto w+t$ sont uniformes en w ; on en déduit que R^{η} est uniformément continu à droite, et comme il est croissant, qu'il est continu. Enfin, lorsque E est fini, A est continu, donc montant ainsi que R^{η} (cf **I-24**), lequel, comme E est fini, est alors continu à gauche, et on conclut encore grâce à la croissance de R^{η}.

Remarque. Si A n'est pas strict, il est difficile, hors le cas E fini, de dégager une propriété simple et générale entraînant la continuité de la réduite, quoiqu'on voie bien ce qui est en jeu: avoir un "champ" $(t,u)\mapsto\pi(u,t)$ de progressions, $\pi(u,\cdot)$ étant issue de u parcourant $\mathcal{D}$ et ayant en t une croissance "uniforme" en u. C'est le même genre de difficulté que celle, non explicitée, du **3**, mais en plus simple sans doute.

INJECTIVITÉ ET SURJECTIVITÉ

La situation est bien plus complexe qu'en théorie linéaire Par exemple, même quand E est réduit à un point, une fonction qui se trouve coincée entre deux η-potentiels n'est pas en général un η-potentiel ; ou encore, si E est fini, il n'y a pas de lien entre injectivité et surjectivité. Par contre, il reste que surjectivité et injectivité ont, chacun de leur côté, à voir avec les propriétés de monotonie de A.

La plupart des énoncés seront suivis de remarques en petits caractères où l'on explore la situation lorsqu'on a affaire à un producteur grossier. Elles sont là moins pour ce que nous en ferons que pour les consigner, et on peut donc les sauter sans vergogne.

Nous commençons par établir un résultat sur $\mathcal{I}(A)$; on pose

$$[u,v]=\{w\in\mathcal{D}:\ u\leq w\leq v\}\ \text{ pour } u,v\in\overline{\mathbb{R}}^{E} \text{ avec } u\leq v$$

Dans tout ce qui suit, pour $\eta\in\mathcal{D}$, G^{η} désigne l'opérateur à valeur dans $[\eta,+\infty]$ défini au **I-17** (et non l'extension définie au **I-18** ; distinction nécessaire à cause de l'ambimesurabilité qui jouera, en particulier dans **16**, un grand rôle muet).

16 **Théorème.** *1) Pour tout* $\eta\in\mathcal{D}$ *et tout* $v\in\mathcal{D}$ *tel que* $A\eta\leq Av$, *le domaine de* G^{η} *contient* $[A\eta,Av]$. *Par conséquent, pour* $u\leq v$, $\mathcal{I}(A)$ *contient* $[u,v]$ *dès que* u *et* v *lui appartiennent.*

2) Pour tout $\eta\in\mathcal{D}$, G^{η} *est un inverse à droite, croissant, de* A *sur* $\mathcal{I}(A)\cap[A\eta,+\infty]$.

D/ La première moitié de 2) entraine le reste. Soit $f\in\mathcal{D}$ coincée entre $A\eta$ et Av. Pour que $G^{\eta}f$ existe, il suffit qu'il existe $w\in\mathcal{D}$ tel que $w\geq\eta$ et $Aw\geq f$, a fortiori tel que $w\geq\eta$ et $Aw\geq Av$. Et pour cela, il suffit de considérer une progression (v_t) issue de v et de prendre $w=v_t$ avec t assez grand pour que l'on ait $v_t\geq\eta$.

Remarques. a) Il manque à $\mathcal{I}(A)$ d'être réticulé pour être normal ; dans le cas linéaire, que $\mathcal{I}(A)$ soit réticulé équivaut presque à la propreté du noyau potentiel.

b) La connexité par arcs *croissants* de $\mathcal{I}(A)$ impliquée par l'énoncé dépend crucialement de l'ambimesurabilité. Il existe sans doute un grossier producteur injectif, d'inverse continu et croissant, n'ayant pas cette propriété.

17 **Corollaire.** *Le producteur* A *est surjectif ssi on a*

$$\forall f\in\mathcal{D}\quad \exists u,v\in\mathcal{D}\quad Au\leq f\leq Av$$

De plus, s'il est surjectif, et si son dual est ambimesurable alors, pour tout $\eta\in\mathcal{D}$, *il existe un inverse à droite de* A *sur* $\mathcal{D}$, *croissant, envoyant* $A\eta$ *sur* η.

D/ Le "ssi" est conséquence de **16**, lequel entraîne aussi, quand $u\mapsto -A(-u)$ est un producteur, que, pour tout $\eta\in\mathcal{D}$, les opérateurs potentiel généralisé $G^{\eta}_{\leftarrow}$ et $G^{\eta}_{\rightarrow}$ définis au **I-18** sont des inverses à droite ayant les propriétés requises.

Nous passons maintenant à l'injectivité, et établissons une caractérisation promise plus haut.

18 **Théorème.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) Le producteur A *est injectif*

2) Pour tout $u,v\in\mathcal{D}$ *on a*: $[u\leq v \text{ et } Au=Av]\Rightarrow[u=v]$

3) Pour tout $u,v\in\mathcal{D}$ *on a*: $[u\leq v \text{ et } Au\geq Av]\Rightarrow[u=v]$

D/ 1)⇒2) est trivial. Quant au reste, nous montrons

(*non 1*))⇒(*non 3*))⇒(*non 2*))

Si, A n'étant pas injectif, on a $A\hat{u}=A\hat{v}$ avec $\hat{u}\neq\hat{v}$, alors $u=\hat{u}\wedge\hat{v}$ et $v=\hat{u}\vee\hat{v}$ vérifient $u\neq v$, $u\leq v$ et $Au\geq Av$, d'où la première implication. Soient enfin u et v tels que $u\neq v$, $u\leq v$ et $Au\geq Av$, et soit w la u-réduite $R^{u}v$ de v ; comme w est $\geq v$, on a $u\neq w$, $u\leq w$, et de $Av\leq Au$

on déduit Aw=Au d'après la toute dernière assertion de **I-13.**

Remarques. Nous détaillons en quatre remarques, la preuve de

$$(non\ 1))\Rightarrow(non\ 3))\Rightarrow(non\ 2))\Rightarrow(non\ 1))$$

afin de voir agir de près nos cinq axiomes sur 1)⇒3).

a) **Ax 1** intervient pour déduire Au≥Av de Au=Av. **Ax 2** et **Ax 1** assurent que, si $\tilde{A}$ est une extension de A en un dériveur simple sur $\bar{\mathbb{R}}^E$, alors $\tilde{R}^u v$ existe s'il existe $h\in\bar{\mathbb{R}}^E$ tel que h≥v et $\tilde{A}h\geq Au$. De **Ax 5** on n'utilise que la part sur le comportement à l'infini pour pouvoir dire qu'on a un tel h dans $\mathcal{D}$; du coup, **Ax 4**, qui a affaire avec le comportement local, est sans usage ici.

b) Le "1)⇒2)" est essentiel ici pour boucler la boucle, mais aura peu d'importance par la suite, au contraire du "1)⇒3)" qui nous sera vite indispensable.

c) Enfin, **Ax 3** intervient pour assurer que $\tilde{R}^u v$ appartient à $\mathcal{D}$. Il existe sans doute un producteur grossier et injectif ne vérifiant pas le "1)⇒3)".

d) Cependant, si B est un producteur grossier, injectif, d'inverse K sur $\mathcal{I}$(B) *croissant*, alors il est clair que "1)⇒3)" est vrai.

19 **Corollaire.** *Si* A *est injectif, son inverse* G *défini sur* $\mathcal{I}$(A) *est croissant, et recolle tous les* G^η *pour* η *parcourant* $\mathcal{D}$. *On dira alors que* G *est* l'opérateur potentiel de A.

D/ La croissance peut se déduire de la propriété de recollement, qui est évidente, mais je donne aussi une preuve à partir de **18.** Si on a $f,g\in\mathcal{I}(A)$ avec f≤g, et si u=Gf, v=Gg, alors, d'après **Ax 1**, on a A(u∧v)≥f=Au et donc u∧v=u d'après "1)⇒3)" de **18.**

Remarques. a) Comme G est croissant, montant si A l'est, G est continu pour la convergence simple si A et son dual sont montants, donc si A est continu pour la convergence simple. De plus si E est fini, $\mathcal{I}$(A) est un ouvert de $\mathcal{D}=\mathbb{R}^n$ d'après le théorème de Jordan-Brouwer (coup de marteau-pilon sur une noisette récalcitrante), A étant injectif et continu. Noter qu'en linéaire, pour E infini, $\mathcal{I}$(A) est "ouvert pour l'ordre" lorsque G est propre.

b) Que G recolle les G^η dépend crucialement de l'ambimesurabilité. Il existe sans doute un producteur grossier, injectif (même bijectif), d'inverse croissant et qui ne recolle pas les potentiels.

c) On a ainsi prouvé la réciproque de la remarque **18-d)** : si B est un producteur grossier et injectif, tel que "1)⇒3)" soit vrai, son inverse K sur $\mathcal{I}$(B) est croissant.

20 On va maintenant regarder l'influence de l'injectivité de A sur un système (*) général, en $w \in \mathcal{D}$,

$$w \geq u, \ Aw \geq f \quad \text{avec } u,f \in \mathcal{D}$$

qui, s'il a une solution dans $\mathcal{D}$, en a, d'après **I-13** (et **Ax 3**), une plus petite, vérifiant les contraintes serrées. Cette plus petite solution sera notée ici $Z^u f$; elle est croissante en u et f sur son domaine $\mathcal{D}(Z)$.

Corollaire. *Si* A *est injectif,* $Z^u f$ *est, pour tout* $(u,f) \in \mathcal{D}(Z)$, *l'unique* $v \in \mathcal{D}$ *solution du système vérifiant partout*

$$v = u \text{ ou } Av = f$$

i.e. les contraintes serrées de (*).

D/ Soit $v \in \mathcal{D}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. On a $v \geq Z^u f$, $v = Z^u f$ et donc $Av \leq AZ^u f$ sur $\{v=u\}$, tandis que, sur $\{v>u\}$, on a $Av=f$ et donc aussi $Av \leq AZ^u f$. D'où v=u d'après "1)⟹3)" de **18**.

Remarques. a) En particulier, si (η,ξ) est une référence avec $\eta \in \mathcal{D}$ fixé, alors, pour $w \in \mathcal{D}$ majorant η, la réduite $R^\eta w$ est le seul $v \in \mathcal{D}$ vérifiant $v \geq w$, $Av \geq \xi$ et $Av = \xi$ sur $\{v>w\}$.

b) En terme de forme canonique (cf **8**), on voit aisément que cela équivaut au fait que $A°$ est injectif si A l'est pour un (u,f) ou pour tout $(u,f) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

c) Si on sait G croissant, l'unicité de la solution dans $\mathcal{D}$ ne dépend pas de **Ax 3** d'après la remarque **18**-d).

BIJECTIVITÉ ET CONTINUITÉ DU POTENTIEL

Le résultat suivant est, après l'existence de la réduite, la deuxième vertu de la productivité : permettre (plus tard) de définir la résolvante d'un producteur.

21 **Théorème.** *Le producteur* A *est strict si et seulement s'il est bijectif et d'inverse* G *continu.*

D/ Nous commençons par établir le "seulement si". Supposons que A ne soit pas injectif ; d'après **18** il existe alors $u,v \in \mathcal{D}$ tels que $u \leq v$, $u \neq v$, et $Au \geq Av$. Soit (u_t) une progression stricte issue de u et soit $\tau = \inf\{t \geq 0 : u_\tau \geq v\}$, qui est >0. Il résulte de **Ax 4** que $\iota(Au_\tau - Av)$ est ≤ 0, ce qui, comme Au_τ majore Av, contredit le fait que (u_t) soit une progression stricte issue de u. La surjectivité résulte immédiatement, d'après **18**, du fait que l'image par A d'une stricte progression ou régression s'éloigne résolument vers l'infini. Terminons avec la continuité de G. Fixons $f\in\mathcal{D}$, posons $u=Gf$ et recollons en une seule fonction $\mathfrak{u}$: $t\mapsto u_t$, $t\in\mathbb{R}$, une progression et une régression strictes issues de u; pour $\varepsilon>0$ fixé, il existe $\delta>0$ tel qu'on ait $\|u_t-u\|<\varepsilon$ pour $|t|\le\delta$, et, si $f_{\mp\delta}=Au_{\mp\delta}$, on a $u_{-\delta}\le Gh\le u_{+\delta}$ pour $f_{-\delta}\le h\le f_{+\delta}$ du fait que G est croissant d'après **19**. Il n'y a plus qu'à remarquer que, $\mathfrak{u}$ étant strict, $\iota(f_{+\delta}-f)$ et $\iota(f-f_{-\delta})$ sont >0. Passons au "si". Si on sait de plus que G est croissant, c'est trivial, et a été déjà vu au **4**. Vérifions donc que G est croissant. Soient $u,v\in\mathcal{D}$ tels que $Au\le Av$ et $u\wedge v\ne u$, et soient (v_t) une progression issue de v et $\tau=\inf\{t: v_t\ge u\}$: on a $\iota(Av_\tau-Au)\le 0$ d'après **Ax 4** et a fortiori $\iota(Av-Au)=0$. Soit $\varepsilon>0$, posons $w=G(Av+\varepsilon)$ et appliquons ce qui précède à u et w: de $\iota(Aw-Au)>0$ on déduit $u\le w$, d'où finalement $u\le v$ par continuité de G en faisant tendre ε vers 0.

21a *Remarques.* a) Une subtilité utilisée au **23**: la preuve du "si" ne fait pas intervenir **Ax 3**.

Il en est de même du "seulement si" *quand on sait déjà que* A est surjectif (ce qui importe est que $\mathcal{I}(A)$ soit ouvert), et que son inverse G est croissant.

b) La preuve généralise celle du théorème d'inversion d'une fonction monotone injective d'une variable. On peut pousser la comparaison plus loin: soit φ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, non nécessairement injective, mais telle que $\varphi(-\infty)=-\infty$ et $\varphi(+\infty)=+\infty$ pour fixer les idées, d'inverse généralisé ψ sur $\varphi(\mathbb{R})$ défini par

$$\psi(t)=\inf\{s: \varphi(s)\ge t\}$$

(qui peut s'interpréter comme le potentiel du dériveur φ pour la référence $-\infty$). On sait qu'il y a correspondance (qu'on ne cherchera pas rigoureuse ici) entre les points de croissance stricte de φ (resp ψ) et les points de continuité de ψ (resp φ). Pour notre producteur A, un point de croissance stricte est un u d'où sont issues une progression et une régression strictes, et il lui correspond un point de continuité du potentiel ; à une certaine stricte croissance du potentiel impliquée par **Ax 4** fait miroir une certaine continuité de A (cf **9**) impliquée par **Ax 5**.

22 **Corollaire.** *Si* A *est un producteur strict, alors le système* (*)

$$w\ge u \quad , \quad Aw\ge f$$

en $w\in\mathcal{D}$ *a, pour tout* $u,f\in\mathcal{D}$, *une unique solution* Z^uf *vérifiant*

$$w=u \quad \text{ou} \quad Aw=f$$

De plus l'application croissante $(u,f)\mapsto Z^uf$ *est continue.*

D/ Comme $G^u(f\vee u)=G(f\vee u)$ est solution du système, la première partie résulte de 20. La seconde se démontre plus aisément en utilisant la forme canonique. Considérons donc, pour $u,f\in\mathcal{D}$, le producteur A_f^u défini par

$$A_f^u w = w - u\vee(f+w-Aw)$$

si bien que $Z^u f$ est le u-potentiel de 0 relatif à A_f^u. Montrons d'abord que A_f^u est strict. Fixons w et soit (w_t) une progression stricte issue de w relative à A; on va vérifier que (w_t) en est encore une relative à A_f^u (on ferait de même avec une régression). En arrangeant un peu les termes, on trouve que $A_f^u w_t - A_f^u w$ est égal à la somme de (w_t-w) et de l'expression E suivante

$$[u\vee(f+w_t-Aw)-u\vee(f+w_t-Aw_t)] - [u\vee(f+w_t-Aw)-u\vee(f+w-Aw)]$$

où $a=f+w_t-Aw$ majore $b=f+w_t-Aw_t$ et $c=f+w-Aw$. On a

$E=0$ si $u\geq b\vee c$; $E=(Aw_t-Aw)$ si $u\leq b\wedge c$; $E=(c-u)\geq 0$ si $a\geq c\geq u\geq b$

et enfin, si $a\geq b\geq u\geq c$,

$$E = (u-b) \geq (c-b) = (Aw_t-Aw)-(w_t-w)$$

d'où finalement

$$A_f^u w_t - A_f^u w \geq (w_t-w)\wedge(Aw_t-Aw)$$

et donc le fait que A_f^u est strict. Ceci fait, on constate que $Z^{u+g}(f+g)$ est, pour $g\in\mathcal{D}$, le u-potentiel de g relatif à A_f^u, et comme l'inverse de A_f^u est continu d'après 21, on conclut alors grâce à la croissance de $(u,f)\mapsto Z^u f$.

Remarque. On a donc vu au passage un point promis au 8 (A° y est strict si A l'est) et un autre au 15 (la réduite est continue, même en ses deux arguments, si A est strict).

Nous terminons cette rubrique par un subtilité technique, triviale si E est dénombrable. Elle sera utilisée au 27.

23 **Proposition.** *Soit* B *un producteur grossier bijectif*, d'*inverse* K *continu (d'après* 21a, K *est alors croissant, et* B *strictement productif). Si de plus* B *est extensible (en particulier, sous-markovien, cf* 3*), alors* K *est son opérateur potentiel au sens où il recolle les* K^η *pour* η *parcourant* $\mathcal{D}$.

D/ Supposons B extensible: par définition, la restriction $\bar{B}$ à $\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{L}_\infty(\mathcal{P}(E))$ de l'extension maximale de B à $\bar{\mathbb{R}}^E$ est un producteur relatif à $\bar{\mathcal{D}}$. D'après la note de I-23, nous devons montrer que, pour une référence $\eta\in\mathcal{D}$ donnée, Kf est égal, pour $f\in\mathcal{D}$ majorant $\xi=B\eta$, au η-potentiel $v=\bar{G}^\eta f$. Comme K est bijectif et croissant, on a $\eta=K\xi\leq Kf$ et donc $K\xi\leq v\leq Kf$; reste à montrer $Kf\leq v$. Posons, pour

$\varepsilon>0$ fixé, $u=K(f-\varepsilon)$; on a $u\in\mathcal{D}$ et $\bar{B}u=Bu=f-\varepsilon$, et donc $\bar{B}v-\bar{B}u=\varepsilon$, d'où $u\leq v$ sur $\{\bar{B}u>\bar{B}v-\varepsilon\}$ (qui est vide) et donc $u\leq v$ partout d'après **11**. Comme K est continu, il n'y a plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour obtenir $Kf\leq v$, et conclure.

ORDRE ASSOCIÉ À LA PRODUCTIVITÉ. AMENDEURS

On prépare ici l'étude des résolvantes non linéaires qui commencera par celle de la résolvante de notre producteur A au §III, et qui se poursuivra dans un cadre général au §IV.

Dans son acception maximale, une résolvante sera pour nous une famille $(V_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{C}}$ d'opérateurs sur $\mathcal{D}$ indexée par une partie non vide $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ et vérifiant[5]

(R) $\qquad \forall\varphi,\psi\in\mathcal{C} \qquad V_\varphi = V_\psi[I+(\psi-\varphi)V_\varphi]$

Si on peut développer à droite par distributivité et *si* les opérateurs de multiplication par ψ,φ commutent avec les deux autres, on obtient alors la formule

$$V_\varphi - V_\psi = (\psi-\varphi)V_\psi V_\varphi \quad \text{d'où} \quad V_\varphi V_\psi = V_\psi V_\varphi$$

familière en linéaire. Tout cela s'écroule en général en non linéaire, même si $\mathcal{C}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Etant donnée la symétrie en φ,ψ, la formule (R) équivaut à

$I-(\varphi-\psi)V_\varphi$ et $I+(\varphi-\psi)V_\psi$ sont inverses l'un de l'autre.

Ainsi s'introduit l'étude des couples d'opérateurs $(M,\hat{M})$ tels que $I-M$ et $I+\hat{M}$ soient inverses l'un de l'autre (on dira que M et $\hat{M}$ sont *conjugués*) : si M est croissant, on revient là à l'étude des dériveurs élémentaires, et si M est une contraction croissante, **23** nous assure, sans supposer $I-M$ ambimesurable, que $I+\hat{M}$ recolle, s'il est continu, les η-potentiels de $I-M$.

Cette rubrique débute par l'étude de la relation d'ordre naturelle entre producteurs (on dira que B est *plus productif que* A si B-A est un opérateur croissant), déjà aperçue au **I-16a**. Elle se termine par un théorème apparemment technique (un résultat d'ambimesurabilité pour les couples d'opérateurs conjugués), mais, comme on le verra plus tard, vecteur d'idées d'une plus grande portée, et dont la démonstration utilisera une bonne part de tout ce qu'on a vu jusqu'ici.

---

[5] Très souvent les éléments de $\mathcal{C}$ sont des fonctions constantes, et $\mathcal{C}$ est alors identifiée à une partie de $\mathbb{R}$.

24 Nous préférerons par la suite manipuler les accroissements de productivité plutôt que la relation d'ordre elle-même, et dirons qu'un opérateur Ψ sur $\mathcal{D}$ est un *amendeur [grossier] de* A si Ψ est croissant et si A+Ψ est un producteur [grossier]. La condition "Ψ est croissant" assurant déjà que A+Ψ vérifie **Ax 2**, **Ax 4** et **Ax 5**, la seconde "A+Ψ est un producteur" ne concerne en fait que **Ax 3** pour E non dénombrable, et bien sûr, avant tout autre, **Ax 1**. Pour Ψ croissant donné il n'est pas a priori facile de vérifier si A+Ψ est un dériveur, et, hors le cas où A et Ψ sont montants, s'il est ambimesurable (cf cependant **27**). Ceci dit, en pratique la vérification de **Ax 1** ne pose pas de problème du fait qu'usuellement on se donne un grossier amendeur, de tout producteur, comme suit :

> ayant fixé $f\in\mathcal{D}$, on pose $\Psi w = \psi(f,w)$ avec ψ borélienne sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ telle que $t\mapsto\psi(z,t)$ soit croissante pour tout $z\in\mathbb{R}$.

Et, pour ce que nous en ferons, notre généralité est surtout affaire de notations...

25 Bien sûr, si Ψ est un amendeur grossier de A, A+Ψ est strict quand A l'est. Sans supposer A strict, il est moins facile de voir si un grossier amendeur Ψ de A est *strict* (i.e. A+Ψ est strict) à moins que Ψ ne vérifie la condition de Lipschitz suivante portant sur son inverse (défini sur $\Psi(\mathcal{D})$) :

$$\text{il existe une constante } a>0 \text{ telle qu'on ait}$$
$$\|\Psi v-\Psi u\| \geq a\,\|v-u\| \qquad \text{pour tout } u,v\in\mathcal{D}$$

où $\|\bullet\|$ désigne la norme uniforme. Nous en profitons pour ajouter que, pour tout opérateur H sur $\mathcal{D}$, nous désignerons par λ_H et Λ_H les "meilleures" constantes dans $[0,+\infty]$ telles qu'on ait

$$\forall u,v\in\mathcal{D} \qquad \lambda_H\|v-u\| \leq \|H(v)-H(u)\| \leq \Lambda_H\|v-u\|$$

Noter que, si H est croissant, la "norme" de Lipschitz Λ_H est encore la plus petite constante b telle qu'on ait

$$\forall u\in\mathcal{D} \quad \forall c\in\mathbb{R}_+ \qquad H(u+c) \leq H(u)+bc$$

Ceci fait, complétons la fin du **24**: la manière usuelle de se donner un grossier amendeur strict, de tout producteur, est :

> ayant fixé $f\in\mathcal{D}$, on pose $\Psi w=\psi(f,w)$ avec ψ borélienne sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ telle que $t\mapsto\psi(z,t)$ soit strictement croissante pour tout $z\in\mathbb{R}$, et d'inverse lipschitzien, uniformément en z.

Un exemple classique a déjà été donné au **4**: pI est strict pour

$p>0$. Plus généralement, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, l'amendeur grossier φI est strict si $\iota(\varphi)$ est >0. En non linéaire, il n'y a guère de raison de distinguer le cas où φ est constante : c'est un vestige du linéaire, où, pour $\lambda,\mu \in \mathcal{D}$, $\lambda I+A$ et $\mu I+A$ ne commutent pas en général *sauf* si λ et μ sont constantes *tandis qu'en non linéaire* la règle générale est qu'il n'y a pas d'exception...

L'intérêt majeur des amendeurs stricts réside dans le "si" du résultat suivant, qui n'est qu'une reformulation de **21** :

26 **Théorème.** *Soit* Ψ *est un amendeur de* A. *Le producteur* $A+\Psi$ *est bijectif, d'inverse continu et croissant, ssi* Ψ *est strict.*

Le lecteur attentif aura remarqué la disparition de "grossier" dans cet énoncé : si le "seulement si" ci-dessus est su sûr si Ψ est grossier, on sait le "si", sis avant, sûr seulement si $A+\Psi$ est un "vrai" producteur. Cela est corroboré par le **27**.

Nous voilà arrivés au terme de cette session de théorie non linéaire du potentiel. Nous terminons avec un énoncé qui, pour changer, sera écrit entièrement en clair, i.e. ne contiendra aucun concept ou mot nouveau introduit dans les §I et §II. Par contre, nous nous permettrons, dans la démonstration, de revenir à notre jargon pour élargir le cadre (ne serait-ce que pour consigner des résultats techniques). Enfin, l'ordre de présentation dans l'énoncé ne sera pas celui suivi dans la preuve.

27 **Théorème.** *Supposons que l'on ait* $A=I-N$ *où* N *est une contraction croissante de* $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$, *et soit* $\psi \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$ *telle que* $\lambda = \inf \psi$ *soit* >0. *Alors, pour tout* $u,f \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$, *le système en* $w \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$

$$w \geq u \quad , \quad Aw+\psi w \geq f$$

a une et une seule solution $Z^u f$ *vérifiant partout*

$$w = u \quad \text{ou} \quad Aw+\psi w = f$$

et l'application $(u,f) \mapsto Z^u f$ *est continue et croissante en* u,f.

De plus, on a $Z^u f \leq w$ *pour toute fonction* $w \geq u$ *non nécessairement* $\mathcal{E}$*-mesurable vérifiant*

$$[\, v \leq w \text{ et } v(x)=w(x)\,] \Rightarrow [\,(Av+\psi v)(x) \geq f(x)\,]$$

pour tout $x \in E$ *et tout* $v \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{E})$.

D/ La seule chose nouvelle est le "de plus" : le grossier producteur strict $A+\psi I$ est en fait ambimesurable. Une fois cela connu, le reste résulte de **22** appliqué à $A+\psi I$.

Nous supposerons plus généralement que A est un producteur grossier, extensible (cf 12; c'est vrai s'il est sous-markovien), et lipschitzien. D'après I-12, on a $A=\Lambda_A(I-M)$ où M est un opérateur croissant, donc lipschitzien par différence, si bien qu'il existe une constante $\mu\geq 0$ telle que

$$A=\Lambda_A(I-\mu N) \text{ où } N \text{ est une contraction croissante}$$

et on peut prendre $\mu=1$ lorsque A est sousmarkovien, par définition. Puis nous nous donnons un grossier amendeur Ψ de A vérifiant $0<\lambda_\Psi\leq\Lambda_\Psi<+\infty$, et nous posons

$$\frac{1}{k}=\Lambda_A+\Lambda_\Psi \quad , \quad B=k(A+\Psi)$$

Le choix de k assure que $I-B$ est croissant.

Sans utiliser 26 (dont le "si" siffle la grossièreté), nous allons montrer que le grossier producteur $\tilde{B}$ défini par

$$\tilde{B}w = w-uv(f+w-Bw)$$

pour $f,u\in\mathcal{D}$ fixés, est bijectif et d'inverse $\tilde{K}$ continu si on a

$$\lambda_\Psi>(\mu-1),$$

ce qui est toujours le cas si A est sousmarkovien. Si on suppose de plus que $\tilde{B}$ est extensible (ce que nous faisons, mais résulte de l'extensibilité de A si Ψ est l'opérateur de multiplication par $\psi\in\mathcal{D}$), 23 nous permettra de conclure que $\tilde{K}$ est le potentiel de $\tilde{B}$. On aura fini : comme alors, $\tilde{K}0$ est la plus petite solution dans $\mathcal{D}$ du système $w\geq u$, $Bw\geq f$ (et en fait la seule), B est ambimesurable et, finalement, $A+\Psi$ l'est aussi, la constante multiplicative k ne jouant pas de rôle.

Pour $g\in\mathcal{D}$, w est solution dans $\mathcal{D}$ de $\tilde{B}w=g$ ssi il est un point fixe de l'opérateur croissant

$$w\mapsto g+u\vee(f+w-Bw)$$

et il nous suffit donc, d'après le théorème de point fixe de Banach, de montrer que cette application est une contraction stricte, ce qui est le cas si l'opérateur croissant $I-B$ en est une. Or, comme on a

$$I-B=[I-k(\Lambda_A+\Psi)]+k\mu N$$

$(I-B)(w+c)-(I-B)(w)$ est égal, pour $w\in\mathcal{D}$ et $c\in\mathbb{R}_+$, à

$$(1-k\Lambda_A)c-k\Lambda_A[\Psi(w+c)-\Psi(w)]+(k\Lambda_A\mu)[N(w+c)-N(w)]$$

qui est majoré par $[1-k\Lambda_A(1+\lambda_\Psi-\mu)]c$, d'où la conclusion.

Remarque. La démonstration contient deux idées qu'on retrouvera par la suite.

D'une part, alors que le théorème fondamental sur les dériveurs simples était une généralisation du théorème de point fixe de Tarski, l'utilisation ici de celui de Banach : elle remonte à celle faite en théorie linéaire par Hunt pour caractériser les noyaux bornés vérifiant le principe complet du maximum, adaptée plus tard au cas non linéaire au §IV. Il est sans doute possible de démontrer directement la première partie de l'énoncé à l'aide de ce seul théorème de point fixe.

D'autre part, dans la seconde partie, la caractérisation de la solution du problème dans un domaine beaucoup plus vaste que celui de départ. Par exemple, on verra plus tard le résultat suivant, de même facture, où E est un espace localement compact à base dénombrable et $\mathscr{C}_o$ (resp $\mathscr{C}_c$, $\mathscr{C}_c^+$) désigne l'espace des fonctions continues sur E tendant vers 0 à l'infini (resp à support compact, et positives) muni de la convergence uniforme :

Soit N *une contraction croissante de* $\mathscr{C}_o$ *dans* $\mathscr{C}_o$ *telle que* $N0=0$, *et supposons qu'il existe un opérateur* K *de* $\mathscr{C}_c$ *dans* $\mathscr{C}_o$ *tel que* $(I-N)K=I$ *sur* $\mathscr{C}_c$ *et que, pour tout* $\varphi\in\mathscr{C}_c^+$, *l'opérateur* $f\mapsto K(\varphi f)$ *de* $\mathscr{C}_o$ *dans* $\mathscr{C}_o$ *soit lipschitzien. Si* $\tilde{N}$ *est une extension de* N *en une contraction croissante sur* $\mathscr{L}_\infty(\mathscr{P}(E))$, Kf *est alors pour tout* $f\in\mathscr{C}_c$ *la seule fonction (en particulier, la seule fonction borélienne, ou continue)* v *solution de l'équation de Poisson* $(I-\tilde{N})v=f$ *qui soit majorée en module par un élément de* $\mathscr{C}_o$.

Cela entrainera, quand nous en serons au §V, la partie unicité de la version non linéaire du théorème de Hunt sur les noyaux propres vérifiant le principe complet du maximum, version dont voici un énoncé avec les notations introduites ci-dessus :

Si un opérateur V *de* $\mathscr{C}_c$ *dans* $\mathscr{C}_o$ *vérifie le* "principe complet du maximum", *i.e. si, pour tout* $f,g\in\mathscr{C}_c$ *et tout* $c\in\mathbb{R}_+$, *on a*

$$[\,Vf\le Vg+c \text{ sur } \{f>g\}\,] \Rightarrow [\,Vf\le Vg+c \text{ partout}\,],$$

et si V *est propre au sens suivant :* $V0=0$ *(pour simplifier) et*

$$f\mapsto V(\varphi f) \text{ est lipschitzien pour tout } \varphi\in\mathscr{C}_c^+,$$

alors il existe une unique résolvante $(V_p)_{p>0}$, *sousmarkovienne (i.e. chaque* pV_p *est une contraction croissante), sur* $\mathscr{C}_o$ *telle que l'on ait, pour la convergence uniforme,*

$$Vf=\lim_{p\downarrow 0}V_pf \quad\text{pour tout } f\in\mathscr{C}_c$$

Le théorème de Crandall-Liggett (version non linéaire de celui de Hille-Yosida) assurera alors qu'à la résolvante (V_p) est associé un unique semi-groupe continu $(P_t)_{t\ge 0}$ de contractions croissantes dès que $V(\mathscr{C}_c)$ est dense dans $\mathscr{C}_o$.

EOF