Paul-André Meyer

Une remarque sur les lois échangeables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 486-487

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__486_0>

UNE REMARQUE SUR LES LOIS ECHANGEABLES

par P.A. Meyer

1. Introduction. Le célèbre théorème de de Finetti sur les lois symétriques affirme que toute loi sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour laquelle les coordonnées sont échangeables, est un mélange de lois-produit de facteurs identiques, *i.e.* ces lois constituent les points extrémaux de l'ensemble convexe des lois symétriques. Dans le livre *Probabilités et Potentiel B*, chap.V, n[os] 50–52, Dellacherie et moi reproduisons la démonstration de ce théorème par les martingales (due à Doob), et indiquons une intéressante remarque de Cartier sur les suites finies échangeables. Cependant, nous n'indiquons pas quelles sont les lois symétriques extrémales en dimension finie. La présente note a pour objet de combler cette lacune. Tout y est classique (Feller, vol. 1, chap. II §5), et le résultat lui même est immédiat, mais je ne l'ai jamais vu énoncé explicitement. Il ne figure pas dans le cours d'Aldous à Saint-Flour sur l'échangeabilité (LN in M. 1117), bien que l'auteur ait le résultat "sur le bout de la langue".

L'idée d'écrire cette note vient de la lecture d'un passionnant article historique de A. Bach, intitulé *Boltzmann's probability distribution of 1877*. Bach a beaucoup réfléchi sur la notion d'échangeabilité en mécanique quantique et en probabilités, et certains de ses articles sont mentionnés à la fin. J'ai conservé en gros son vocabulaire et ses notations.

2. Nombres d'occupation. Nous considérons d'abord une famille finie de d "urnes" $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{U}}$ et une famille finie de n "boules" $(b_i)_{i\in B}$. Une *configuration* est une application ω de l'ensemble B des boules dans l'ensemble $\mathcal{U}$ des urnes; le nombre des configurations est donc d^n. Nous munissons l'ensemble (fini) $\Omega = \mathcal{U}^B$ des configurations de la tribu évidente, engendrée par les coordonnées X_i à valeurs dans $\mathcal{U}$. Le nombre d'éléments d'un ensemble A étant noté $|A|$, nous appelons *nombre d'occupation de l'urne* U_α la v.a. $N_\alpha(\omega) = |\omega^{-1}(\alpha)| = \sum_i I_\alpha(X_i)$ et *vecteur d'occupation* la famille des nombres d'occupation (de somme n). Si l'on ne connaît que le vecteur d'occupation, on sait combien d'éléments contient une urne donnée, et donc *quelles* urnes contiennent k boules : on a donc perdu l'identité des boules, et conservé celle des urnes.

On peut faire opérer le groupe symétrique sur l'ensemble B des boules et donc sur $\mathcal{U}^B$, et il est clair que l'orbite d'une configuration ω est l'ensemble des configurations admettant les mêmes nombres d'occupation $N_\alpha(\omega) = n_\alpha$. Le nombre de ces configurations est $n!/\prod_\alpha n_\alpha!$. Soit $\mathbb{P}$ une loi sur l'ensemble des configurations : si $\mathbb{P}$ est symétrique, les configurations ayant même vecteur d'occupation $N_\alpha = n_\alpha$ sont équiprobables, et par conséquent la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[\omega\,|(N_\alpha = n_\alpha)]$ vaut 0 si les nombres d'occupation $N_\alpha(\omega)$ ne sont pas égaux aux n_α, et $\prod_\alpha n_\alpha!/n!$ dans le cas contraire : cette loi ne dépendant pas de $\mathbb{P}$, le vecteur d'occupation constitue une statistique exhaustive pour les lois symétriques.

Il est alors clair qu'une loi symétrique $\mathbb{P}$ sur l'ensemble des configurations est extrémale si et seulement si le vecteur d'occupation a une loi déterministe sous $\mathbb{P}$.

Rappelons que les lois symétriques $\mathbb{P}$ sur Ω correspondant à l'équiprobabilité *a*) de toutes les configurations, *b*) de tous les vecteurs d'occupation, *c*) de tous les vecteurs d'occupation formés de 0 et de 1, sont appelées respectivement les statistiques de Maxwell–Boltzmann, de Bose–Einstein, et de Fermi–Dirac. Bach fait remarquer que si l'on prend comme ***définition de l'indistinguabilité des boules*** la symétrie de la loi $\mathbb{P}$ (et quelle autre définition prendre ?) les particules de Maxwell–Boltzmann sont indistinguables, contrairement à ce que l'on dit partout.

3. Points extrémaux des lois symétriques. Appliquons cela à la recherche des points extrémaux de l'ensemble des lois symétriques $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}^n$ (nous appelons X_i les coordonnées). Toute partition finie de $\mathbb{R}$ en ensembles A_α indique un placement des points X_i dans des "urnes" , et le conditionnement par le vecteur d'occupation correspondant fournit une désintégration symétrique de $\mathbb{P}$. L'extrémalité de $\mathbb{P}$ exige alors que le vecteur d'occupation soit déterministe. Comme la partition (A_α) est arbitraire, cela signifie que la mesure $\sum_i \epsilon_{X_i}$ est une mesure déterministe à valeurs entières : elle est donc de la forme $\sum_\alpha n_\alpha \epsilon_\alpha$, les points α étant distincts et les entiers $n_\alpha > 0$ ayant pour somme n. Quant à la loi $\mathbb{P}$, elle est portée par l'ensemble fini des points ω de $\mathbb{R}^n$ tels que $|\{i\,:\,X_i(\omega)=\alpha\}| = n_\alpha$ pour tout α, chacun d'eux ayant la probabilité $(\prod_\alpha n_\alpha!)/n!$.

4. Remarque. On peut aller un degré de plus dans l'oubli, et cesser de distinguer les urnes elles mêmes. Alors la loi de probabilité symétrique $\mathbb{P}$ est complètement déterminée par la loi des variables aléatoires $M_k = |\{\alpha\,:\,N_\alpha = k\}|$ (nombre d'urnes contenant k boules); $\sum_k M_k$ est le nombre d'urnes d, tandis que $\sum_k kM_k$ est le nombre de boules n. Bach poursuit l'étude de cette symétrie supplémentaire (qui ne nous concerne pas ici).

REFERENCES

On trouvera ci–dessous les références de certains articles de A. Bach.

[1] The concept of indistinguishable particles in classical and quantum physics. *Found. Phys*,18 1988, p. 639–649.

[2] On the quantum properties of indistinguishable classical particles. *Lett. Nuovo Cimento,* **43**, 1985, p.383–387.

1985.

[3] Boltzmann's Probability Distribution of 1877. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, à paraître.

[4] Indistinguishability, interchangeability and indeterminism. *Proc. Intern. Conference on "Statistics in Science"*, Luino, 1988. Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze.

Le texte le plus complet est

[5] Indistinguishable classical particles (Déc. 89).