Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Nicolai V. Krylov

Une représentation des sous-martingales positives et ses applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 473-476
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__473_0>

UNE REPRÉSENTATION DES SOUSMARTINGALES POSITIVES ET SES APPLICATIONS

Par N.V. KRYLOV [1]

RÉSUMÉ. Nous proposons une représentation d'une sousmartingale positive à l'aide d'un processus croissant, puis nous l'utilisons pour donner une démonstration plus simple du théorème de Doob-Meyer.

1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $\{\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F},\ t \in [0,\infty[\}$ une filtration de tribus croissantes complètes par rapport à $\mathcal{F}$, $\xi(t)$ une sousmartingale positive par rapport à $\{\mathcal{F}(t)\}$ définie pour $t \in [t, \infty]$. Sous certaines hypothèses assez générales, Smirnov [1] a montré l'existence d'un processus positif croissant $\eta(t)$ tel que

$$\xi(t) = \mathbb{E}\{\eta(t) \mid \mathcal{F}(t)\} \qquad \text{(p.s.)} \qquad \forall t \in [0,\infty] \tag{1}$$

Si $\xi(t)$ est une martingale, on peut évidemment prendre $\eta(t) = \xi(\infty)$. En outre, si $\eta(t)$ est un processus croissant quelconque, $\mathbb{E}\,|\eta(t)| < \infty$, $\forall t$, alors le deuxième membre de (1) est toujours une sousmartingale. Donc la représentation (1) est une généralisation bien naturelle de celle des martingales arbitraires.

Dans cette note nous voulons montrer d'abord que la représentation (1) reste valable en ne supposant que les conditions citées dans la première phrase. Ensuite, nous l'appliquons à la démonstration du théorème de Doob–Meyer. A notre avis cette nouvelle démonstration est plus simple et plus courte que celles déjà connues, et elle est basée sur les faits les plus élémentaires de la théorie des martingales. En revanche, il faut avouer que nous démontrons le théorème de Doob–Meyer seulement dans l'énoncé de Meyer [2], c'est à dire sans l'affirmation de Doléans qu'un processus croissant naturel est prévisible (voir [3]).

Signalons que la possibilité de la représentation (1) peut être expliquée facilement à l'aide de la décomposition multiplicative : $\xi(t) = A(t)M(t)$ où $A(t)$ est $\mathcal{F}(t)$-mesurable et croissant, $M(t) = \mathbb{E}\{M(\infty) \mid \mathcal{F}(t)\}$: en l'occurence on peut prendre $\eta(t) = A(t)M(\infty)$.

Signalons enfin que les notes présentées ici ont résulté de quelques entretiens avec S.N. Smirnov à qui l'auteur exprime ses remerciements sincères.

2. Soit $Q = \{q_1, q_2 \ldots\}$ une partie dense de $[0,\infty]$ contenant tous les points de discontinuité de la fonction croissante $\mathbb{E}\,\xi(t)$. On suppose $q_1 = 0$, $q_2 = \infty$. Pour tout n,

---

[1] La rédaction du Séminaire est heureuse de publier cette note de N.V. Krylov. La présente démonstration du théorème de décomposition des sousmartingales est plus simple, dans le cas des sousmartingales positives (ou des surmartingales positives majorées par une martingale : le cas de la classe (D) exigerait les considérations habituelles d'intégrabilité uniforme) que la démonstration classique de Murali Rao (*Math. Scand.* 24, 1969). Pour les représentations du type (1), voir J. Azéma : Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée, ZW 45, 1978, 191-211.

n, appelons Q_n l'ensemble des n premiers points de Q, que nous rangeons en ordre croissant : $q_n(i)$, $i = 1, \ldots, n$. Choisissons pour $i \leq n-1$ des fonctions $f_n(i)$ $\mathcal{F}(q_n(i))$-mesurables et telles que

$$(2) \qquad \xi(q_n(i)) = f_n(i)\mathbb{E}\{\,\xi(q_n(i+1))\,|\,\mathcal{F}(q_n(i))\}\,.$$

Comme par définition pour $s \leq t$

$$(3) \qquad \xi(s) \leq \mathbb{E}\{\,\xi(t)\,|\,\mathcal{F}(s)\},$$

on peut supposer que les fonctions $f_n(i)$ sont telles que $0 \leq f_n(i) \leq 1$. Enfin posons pour $i = 1, \ldots, n-1$

$$\zeta(t) = f_n(i)\cdots f_n(n-1) \qquad \text{quand } t \in [q_n(i), q_n(i+1)[\ .$$

Pour $i = n$, $q_n(i) = \infty$, $\zeta(\infty) = 1$. L'itération de (2) donne immédiatement

$$(4) \qquad \xi(t) = \mathbb{E}\{\,\xi(\infty)\zeta_n(t)\,|\,\mathcal{F}(t)\} \qquad \text{(p.s.)} \qquad \forall t \in Q_n\,.$$

En outre, il est immédiat que $\zeta_n(t)$ est fonction croissante de t et que $0 \leq \zeta_n(t) \leq 1$. Vu la dernière inégalité il existe une sous-suite $\{n'\}$ telle que pour tout $q \in Q$ la suite $\zeta_{n'}(q)$ converge faiblement dans $L_2(\Omega, \nu)$ où $\nu(d\omega) = \xi(\omega, \infty)\mathbb{P}(d\omega)$ vers une limite que nous désignons par $\zeta(q)$. Soit pour tout $t \in [0, \infty$

$$(5) \qquad \alpha(t) = \inf_{q \geq t} \zeta(q)$$

où, comme partout ci-dessous, q (avec des indices éventuels) est un élément arbitraire de Q.

Puisque $\zeta_n(t)$croît par rapport à t, on a sur Q $\alpha(q) = \zeta(q)$ (p.s.). Pour $t \notin Q$ on voit que

$$(6) \qquad \alpha(t) = \lim_{q \downarrow t} \zeta(q) = \alpha(t) = \lim_{q \downarrow t} \alpha(q)$$

où la première limite existe presque sûrement et la deuxième pour tout $\omega \in \Omega$. On multiplie les deux membres de (4) par $I(A)$ où $A \in \mathcal{F}(t)$, on calcule les espérances mathématiques et, en remplaçant n par n', on fait tendre $n' \to \infty$. Alors pour $q \in Q$ on trouve

$$(7) \qquad \xi(q) = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\zeta(q)\,|\,\mathcal{F}(q)\} = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(q)\,|\,\mathcal{F}(q)\} \qquad \text{(p.s.)}$$

De plus, en vue de (3), (7) pour $t < q$

$$\xi(t) \leq \mathbb{E}\{\xi(q)\,|\,\mathcal{F}(t)\} = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(q)\,|\,\mathcal{F}(t)\}$$

ce qui avec (6) donne

$$(8) \qquad \xi(t) \leq \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(t)\,|\,\mathcal{F}(t)\}\,.$$

Pour vérifier l'égalité des deux membres il suffit de montrer qu'ils ont même espérance. Cela a lieu pour $t \in Q$, et pour $t \notin Q$ le choix de Q et les formules (7), (6) impliquent

$$\mathbb{E}\,\xi(t) = \lim_{q \downarrow t} \mathbb{E}\,\xi(q) = \lim_{q \downarrow t} \mathbb{E}\,\xi(\infty)\,\alpha(q) = \mathbb{E}\,\xi(\infty)\alpha(t)\,.$$

Nous avons ainsi démontré (7) pour tout $t \in [0,\infty]$, et par suite (1) avec $\eta(t) = \xi(\infty)\alpha(t)$.

REMARQUE. (cf [1]). Il est très facile de vérifier que les limites à gauche et à droite de la sousmartingale sont données par

$$\xi(t-) = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(t-) \mid \mathcal{F}(t-)\} \quad ; \quad \xi(t+) = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(t+) \mid \mathcal{F}(t+)\} \qquad \text{(p.s.)}$$

On en déduit sans peine que si la fonction $\mathbb{E}\,\xi(t)$ est continue à droite (resp. à gauche) on a p.s.

$$\xi(t) = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(t+) \mid \mathcal{F}(t)\} \quad ; \qquad \text{resp.} \quad \xi(t) = \mathbb{E}\{\xi(\infty)\alpha(t-) \mid \mathcal{F}(t)\}.$$

Autrement dit, le processus croissant peut être choisi continu à droite (resp. à gauche).

3. Passons au théorème de Doob–Meyer. Complétons les hypothèses du §1 par la suivante : $\mathbb{E}\,\xi(t)$ *est continue à droite,* et prenons pour $\eta(t)$ dans (1) un processus continu à droite. Pour toute variable aléatoire bornée λ posons $m_t(\lambda) = \mathbb{E}\{\lambda \mid \mathcal{F}(t)\}$. Comme il est connu d'après le théorème de Doob sur le nombre de montées, avec la probabilité 1, pour tous les $t \in [0,\infty]$ à la fois il existe

$$m_{t-}(\lambda) = \lim_{q \uparrow t} m_q(\lambda)$$

et le processus $m_{t-}(\lambda)$ est continu à gauche. Si $\lambda = I(B)$, $B \in \mathcal{F}$, nous écrirons simplement $m_t(B)$, $m_{t-}(B)$. Pour toute suite d'évènements $B_n \downarrow \emptyset$ on a

$$\sup_{t>0} m_{t-}(B_n) = \sup_{q \in Q} m_q(B_n) \downarrow 0 .$$

Comme $m_{r-}(B) \leq 1$ et $\eta(\infty) = \xi(\infty)$ est intégrable, nous définissons une mesure bornée sur $\mathcal{F}$, absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, par la formule

(9) $$\mu_t(B) = \mathbb{E} \int_0^t m_{r-}(B)\, d\eta(r)$$

Soit $A(t)$ la densité de μ_t par rapport à $\mathbb{P}$. En procédant comme au §2, nous pouvons supposer que $A(t)$ est, pour tout $\omega \in \Omega$ une fonction croissante et continue à droite de t, et que $A(\infty) = \lim_{t \uparrow \infty} A(t)$.

Un raisonnement classique d'approximation montre que, pour toute v.a. bornée λ, et pour $0 \leq s \leq t \leq \infty$ on a

(10) $$\mathbb{E}\{\lambda(A(t) - A(s))\} = \mathbb{E}\{\int_s^t m_{r-}(\lambda)\, d\eta(r)\}.$$

Si λ est $\mathcal{F}(s)$-mesurable, on a $m_{r-}(\lambda) = \lambda$ pour $r > s$, et il découle de (10) et de (1) que

(11) $$\mathbb{E}\{\lambda(A(t) - A(s))\} = \mathbb{E}\{\lambda(\eta(t) - \eta(s))\} = \mathbb{E}\{\lambda(\xi(t) - \xi(s))\}.$$

En outre, on a évidemment $m_{r-}(m_t(\lambda) = m_{r-}(\lambda)$ p.s. pour tout $r \leq t$; il en résulte

$$\mathbb{E}\{\lambda A(t)\} = \mathbb{E}\{\int_0^t m_{r-}(m_t(\lambda))\, d\eta(r)\} = \mathbb{E}\{m_t(\lambda)A(t)\} = \mathbb{E}\{\lambda m_t(A(t))\}.$$

Cela veut dire que la v.a. $A(t)$ est $\mathcal{F}(t)$-mesurable et avec (11) on voit que $\xi(t) - A(t)$ est une martingale $M(t)$. Ainsi nous avons obtenu la représentation de Doob–Meyer : $\xi(t) = A(t) + M(t)$, où $M(t)$ est une martingale, et $A(t)$ est un processus croissant adapté.

Enfin, à partir de (10) et en approchant l'intégrale d'un processus borné continu à gauche par des sommes de Riemann, on démontre que

$$\mathbb{E}\{\int_0^\infty m_{r-}(\lambda)\, dA(r)\} = \mathbb{E}\{\int_0^\infty m_{r-}(\lambda)\, d\eta(r)\} = \mathbb{E}\{\lambda A(\infty)\}\,.$$

Ceci établit que le processus croissant $A(t)$ est naturel au sens de Meyer [2].

REFERENCES

[1] SVERTCHKOV (M. Yu.) et SMIRNOV (S.N.). Sur une représentation des surmartingales. Annales de l'Université de Moscou, Sér. 15, Calcul Math. et Cybernétique (à paraître).

[2] MEYER (P.A.). *Probability and Potentials*, Blaisdell 1966.

[3] DELLACHERIE (C.). *Capacités et Processus Stochastiques*, Springer 1972.

N.V. Krylov
Département de Mathématiques et Mécanique
Université d'Etat de Moscou, Moscou, URSS
et (jusqu'à la fin de 1990)
Université d'Antsiranana
B.P. 0, Antsiranana 201
Madagascar