Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Émery

Sur les martingales d'Azéma (suite)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 442-447

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__442_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

SUR LES MARTINGALES D'AZÉMA (Suite)

par M. Emery

Ces quelques pages sont la suite de l'exposé de l'an dernier "On the Azéma martingales" (volume XXIII du Séminaire), ou plutôt elles sont le développement des deux notes que la rédaction du Séminaire avait appendues à cet exposé. (Elles doivent donc être considérées comme une tentative de m'approprier lesdites notes, au détriment de la rédaction!)

Nous conserverons les notations et la numérotation des énoncés de l'exposé de l'an dernier, mais, pour plus de clarté, nous parlerons français plutôt que pidgin.

Commençons par la seconde des remarques de la rédaction. Des lecteurs m'ont à juste titre reproché de ne pas avoir indiqué de références pour la proposition 4. La représentation chaotique pour les mélanges déterministes de Poisson et de brownien a été exposée par Dermoune à l'École d'été de Saint Flour, en Juillet 1987 (à paraître aux Annales de l'I.H.P.); c'est aussi un cas particulier du théorème 3.1 de He et Wang (Chaos Decomposition and Property of Predictable Representation, Science in China (Series A) Vol. 32 No. 4, 1989) qui n'imposent pas la condition $\langle X, X\rangle_t = t$, d'où une difficulté suplémentaire due à la présence de discontinuités fixes.

La démonstration donnée ici est l'adaptation immédiate de celle rédigée par Neveu pour les processus de Poisson (Processus aléatoires gaussiens, Presses de l'Université de Montréal). Celle de Dermoune, plus courte, repose sur la structure algébrique de l'espace de Fock. Une autre démonstration courte, probabiliste cette fois, est la technique de Biane (exposée par Meyer dans ce volume), qui s'adapte sans difficulté à ce cas non homogène.

La réciproque (tout P.A.I. donnant lieu à représentation chaotique est un mélange Poisson–brownien) semble a priori plus délicate, mais on sait (He et Wang, Séminaire XVI p. 353) que cette propriété est encore vraie sous l'hypothèse plus faible de représentation prévisible; dans le cas chaotique, elle a été réétablie indépendamment par Dermoune.

Passons maintenant à la première des deux notes, dans laquelle Azéma indique que l'estimation de Cramer permet d'établir l'unicité en loi des martingales d'Azéma pour $\beta > 0$. Ce cas ressemble beaucoup au cas $\beta < -2$, avec une petite difficulté en plus due à la présence d'une infinité d'excursions, et une grosse difficulté en plus dans l'équation obtenue, que l'on peut surmonter grâce à l'estimation de Cramer (obtenue ici par un astucieux changement de variable dû à Feller).

Soit donc l'équation de structure

$$(*) \qquad d[X,X]_t = dt + \beta X_{t-} dX_t$$

où $\beta > 0$ et où X_0 est un réel donné. Il s'agit de démontrer que toutes les martingales qui vérifient cette équation ont même loi. Si X est une telle martingale, on pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$S_0^\varepsilon = 0\,, \quad T_0^\varepsilon = \inf\{t : X_t = 0\}$$
$$\ldots$$
$$S_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq T_n^\varepsilon : |X_t| > \varepsilon\}$$
$$T_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq S_{n+1}^\varepsilon : X_t = 0\}.$$

Sur l'intervalle $[\![S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon[\![$, X est obtenu en résolvant le système

$$\begin{cases} X_{S_n^\varepsilon + t} = X_{S_n^\varepsilon} (1+\beta)^{N_{A_t^n}} e^{-\beta A_t^n} \\ dA_t^n = \dfrac{dt}{\beta^2 X^2_{S_n^\varepsilon + t}} \end{cases}$$

où N est un processus de Poisson standard, indépendant de $\mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}$ (même démonstration que la proposition 1, en conditionnant tout par $\mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}$).

Posons $a = \beta / \log(1+\beta) > 1$, remarquons que

$$(1+\beta)^{N_{A_t^n}} e^{-\beta A_t^n} = (1+\beta)^{N_{A_t^n} - aA_t^n} \leq (1+\beta)^{C - \frac{a-1}{2} A_t^n}$$

(où C est aléatoire et dépend de n), donc $dA_t^n \geq \dfrac{dt}{\beta^2 X^2_{S_n^\varepsilon}} (1+\beta)^{\frac{a-1}{2} A_t^n - C}$. Ceci est de la forme $dA_t/dt \geq p e^{qA_t}$ avec p et q strictement positifs, et montre que A_t^n explose pour t fini; donc T_n^ε est fini si S_n^ε l'est. D'autre part, si T_n^ε est fini, S_{n+1}^ε l'est aussi sinon la trajectoire de X serait bornée, ce qui contredit $\langle X,X\rangle_t = t$. Donc *les temps S_n^ε, T_n^ε sont tous finis* (et tendent évidemment vers $+\infty$ car X a des limites à gauche).

Toujours si X résout $(*)$, soient $\tau_t^\varepsilon = \int_0^t \sum_{n\geq 0} I_{[\![S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon]\!]}(s)\, ds$, C_t^ε l'inverse continu à droite de τ_t^ε, et $X_t^\varepsilon = X_{C_t^\varepsilon}$ (X^ε est obtenu à partir de X en oubliant tous les intervalles $[\![T_n^\varepsilon, S_{n+1}^\varepsilon[\![$ où celui-ci quitte zéro). Il se trouve que pour $\varepsilon \to 0$ les X^ε convergent vers X p.s. selon la topologie de Skorokhod; en effet, X_t vaut X_{t-} ou $(1+\beta)X_{t-}$ selon qu'un saut a lieu ou non, mais ceci entraîne $\{X = 0\} = \{X_- = 0\}$ et

$$\int I_{\{X_t=0\}}\, dt = \int I_{\{X_{t-}=0\}}\, dt = \int I_{\{X_{t-}=0\}}\, d\langle X,X\rangle_t^c = 0\,,$$

de sorte que le temps passé par X en zéro est nul.

En conséquence, pour connaître la loi de X, il suffit de connaître celle de X^ε; compte tenu de l'étude faite plus haut (loi de X sur $[\![S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon[\![$), l'unicité résulte du lemme suivant.

LEMME 8. — *Il existe une probabilité Π^ε sur $[-(1+\beta)\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, (1+\beta)\varepsilon]$ telle que, si X est une solution de $(*)$ et si S_n^ε, T_n^ε sont définis à partir de X comme ci-dessus, $X_{S_{n+1}^\varepsilon}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_n^\varepsilon}$ et de loi Π^ε.*

Si X_t vérifie $(*)$, $\dfrac{1}{\varepsilon}X_{\varepsilon^2 t}$ aussi; pour prouver le lemme, on peut donc par changement d'échelle supposer $\varepsilon = 1$. Comme la loi conditionnelle du processus $X_{T_n^1+t}$ sachant $\mathcal{F}_{T_n^1}$ est celle d'une solution de $(*)$ issue de zéro, on peut supposer $X_0 = 0$ et il suffit de montrer que, si $R = \inf\{t : |X_t| > 1\}$, *la loi de X_R ne dépend que de β.*

Nous venons de nous débarrasser de ε, S_n^ε, T_n^ε, réintroduisons-les! (Avec la même définition que plus haut, et avec $0 < \varepsilon < (1+\beta)^{-1}$.) Pour un $n \geq 1$ aléatoire, on a $S_n^\varepsilon \leq R \leq T_n^\varepsilon$; donc pour A borélien de $[1, 1+\beta]$ et $s = \pm 1$ (de sorte que sA est un borélien de $[-1-\beta, -1] \cup [1, 1+\beta]$),

$$(**) \qquad \begin{aligned} \mathbb{P}[X_R \in sA] &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[X_R \in sA\,,\ S_n^\varepsilon \leq R \leq T_n^\varepsilon] \\ &= \mathbb{E} \sum_{n \geq 1} I_{\{R \geq S_n^\varepsilon\}}\, \mathbb{P}[X_R \in sA\,,\ S_n^\varepsilon \leq R \leq T_n^\varepsilon \,|\mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}] \\ &= \mathbb{E} \sum_{n \geq 1} I_{\{R \geq S_n^\varepsilon\}}\, \phi_{s,A}(X_{S_n^\varepsilon}) \end{aligned}$$

où $\phi_{s,A}$ peut être calculée à l'aide de la loi de X sur $[\![S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon[\![$: Si N est un processus de Poisson standard, $\phi_{s,A}(x)$ est le produit de $I_{\text{signe}\, x = s}$ par la probabilité pour que $|x|\,(1+\beta)^{N_t - at}$ dépasse 1 pour un t et soit dans A au premier instant où cela se produit. En d'autres termes, en notant $z = \dfrac{1}{\log(1+\beta)} \log \dfrac{1}{|x|}$ (de sorte que $|x| = (1+\beta)^{-z}$), $V_z = \inf\{t : N_t - at > z\}$ et B l'image de A par l'application $y \mapsto \dfrac{\log y}{\log(1+\beta)}$ (de sorte que $B \subset [0,1]$), on peut écrire

$$\phi_{s,A}(x) = I_{\text{signe}\, x = s}\, \mathbb{P}[V_z < \infty\,,\ N_{V_z} - aV_z - z \in B]\ .$$

LEMME 9 (Cramer, Feller). — *Fixons $\beta > 0$ et $a = \beta/\log(1+\beta) > 1$. Pour tout borélien $B \subset [0,1]$, la limite*

$$L(B) = \lim_{z \to +\infty} (1+\beta)^z\, \mathbb{P}[V_z < \infty\,,\ N_{V_z} - aV_z - z \in B]$$

existe et est finie.

[On peut en fait expliciter L : c'est la mesure $\dfrac{(1+\beta)^{1-x} - 1}{1+\beta-a}\,dx$ sur $[0,1]$; nous n'en aurons pas besoin.]

Admettons ce résultat le temps de finir de démontrer le lemme 8.

Par le lemme 9, si x tend vers zéro avec un signe s fixé, $\frac{1}{|x|}\,\phi_{s,A}(x)$ tend vers $L(B) = \tilde{L}(A)$ où $\tilde{L}$ est la composée de L et de la transformation $A \mapsto B$ introduite plus haut. Pour A fixé il existe donc une fonction $\delta(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que pour $0 < |x| \leq (1+\beta)\varepsilon$ et signe $x = s$ on ait

$$\tilde{L}(A) - \delta(\varepsilon) \leq \frac{1}{|x|}\,\phi_{s,A}(x) \leq \tilde{L}(A) + \delta(\varepsilon)\ ;$$

il en découle

$$I_{\{\text{signe}\,X_{S_n^\varepsilon}=s\}}\big(\tilde{L}(A) - \delta(\varepsilon)\big) \leq \frac{1}{|X_{S_n^\varepsilon}|}\,\phi_{s,A}(X_{S_n^\varepsilon}) \leq I_{\{\text{signe}\,X_{S_n^\varepsilon}=s\}}\big(\tilde{L}(A) + \delta(\varepsilon)\big)\ .$$

Utilisant (**), on en déduit

$$\big(\tilde{L}(A) - \delta(\varepsilon)\big)\,e(\varepsilon) \leq \mathbb{P}[X_R \in sA] \leq \big(\tilde{L}(A) + \delta(\varepsilon)\big)\,e(\varepsilon)\ ,$$

où
$$\begin{aligned} e(\varepsilon) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n\geq 1} I_{\{R\geq S_n^\varepsilon\}}\,I_{\{\text{signe}\,X_{S_n^\varepsilon}=s\}}\,|X_{S_n^\varepsilon}|\Big] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[\sum_{n\geq 1} I_{\{R\geq S_n^\varepsilon\}}\,I_{\{\text{signe}\,X_{S_n^\varepsilon}=s\}}\Big]\ (1+\beta)\,\varepsilon \end{aligned}$$

est borné uniformément en ε (car $\sum_{n\geq 1} I_{\{R\geq S_n^\varepsilon\}}\,I_{\{\text{signe}\,X_{S_n^\varepsilon}=s\}}$ est le nombre de montées sur $[0,\varepsilon]$ de la martingale bornée X^R si $s=+1$, et le nombre de descentes sur $[-\varepsilon, 0]$ si $s=-1$).

Faisons maintenant tendre ε vers zéro. Si $\tilde{L}(A) = 0$, $\big(\tilde{L}(A) + \delta(\varepsilon)\big)\,e(\varepsilon)$ tend vers zéro, donc $\mathbb{P}[X_R \in sA] = 0$. Si $\tilde{L}(A) \neq 0$, $e(\varepsilon)$ doit tendre vers une limite $\ell(s) = \dfrac{\mathbb{P}[X_R \in sA]}{\tilde{L}(A)}$ qui dépend du signe s et de la loi de X, mais non de A. On a alors $\mathbb{P}[X_R \in sA] = \tilde{L}(A)\,\ell(s)$, donc la valeur absolue et le signe de X_R sont des variables aléatoires indépendantes et, puisque $\mathbb{E}[X_R] = 0$, la loi du signe de X_R est uniforme sur $\{-1, 1\}$. En fin de compte, la loi de X_R ne dépend que de β puisqu'elle s'exprime uniquement en termes de la fonction $\tilde{L}$ du lemme 9 :

$$\mathbb{P}[X_R \in sA] = \frac{\tilde{L}(A)}{2\tilde{L}\big([1, 1+\beta]\big)}\ ,$$

et le lemme 8 est démontré. ∎

<u>Démonstration du lemme 9.</u>

Nous avons donc un processus de Poisson standard N et pour $z \geq 0$ nous étudions $\mu_z(B) = \mathbb{P}[V_z < \infty,\ N_{V_z} - aV_z - z \in B]$ où $V_z = \inf\{t : N_t - at > z\}$. La propriété de Markov du processus $N_t - at$ à l'instant V_0 fournit immédiatement l'équation de renouvellement, valable pour $z > 1$

$$\mu_z(B) = \int_0^1 \mu_0(dx)\,\mu_{z-x}(B)\ .$$

La mesure[1] μ_0 possède deux propriétés qui nous seront utiles : elle est absolument continue par rapport à dx (car $\mu_0(B) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[N_{U_n} - aU_n \in B]$, où U_n est le $n^{\text{ième}}$ instant de saut de N), et elle vérifie

$$\int_0^1 (1+\beta)^x \, \mu_0(dx) = 1$$

(par le théorème d'arrêt appliqué à la martingale $(1+\beta)^{N_t - at}$ arrêtée à V_0, qui est bornée par $1+\beta$).

Posant $g(z) = (1+\beta)^z \mu_z(B)$ (ce truc est dû à Feller), on voit que

$$g(z) = \int_0^1 g(z-x)\,(1+\beta)^x \, \mu_0(dx) \qquad (z > 1)$$

et le lemme résulte du théorème de renouvellement (Feller, Volume II, XI, 1), qui montre que $g(z)$ a une limite quand z tend vers $+\infty$. Ce théorème utilise deux hypothèses : Primo, la mesure $(1+\beta)^x \, \mu_0(dx)$ est une probabilité (nous venons de le vérifier) ; secundo, la fonction $g(z) - \int_0^{1\wedge z} g(z-x)\,(1+\beta)^x \, \mu_0(dx)$, dont nous savons qu'elle est nulle sur $[1,\infty[$, doit être intégrable au sens de Riemann sur $[0,\infty[$, c'est-à-dire sur $[0,1]$. Mais la continuité absolue de μ_0 jointe à l'équation de renouvellement montre que g est continue sur $]1,\infty[$. Il suffit donc de tout décaler d'une unité, remplaçant $g(z)$ par $\tilde{g}(z) = g(z+1)$ pour avoir une fonction continue $\tilde{g}$ vérifiant les mêmes hypothèses, d'où le résultat. ∎

Remarque. — Il est signalé plus haut que pour $a > 1$, en posant $Q_t = N_t - at$ et $V = \inf\{t : Q_t > 0\}$, alors la "loi" μ_0 de la "variable aléatoire" Q_V est la mesure uniforme sur $[0,1]$, de masse totale $1/a$. C'est bien entendu un cas très particulier de formules figurant chez Feller; on peut y parvenir par le calcul de la transformée de Laplace de μ_0 à partir de celle de $\sup_t Q_t$. Mais un résultat d'allure aussi élémentaire doit bien avoir une raison probabiliste! En voici une, que m'a fournie J. Pitman.

Observons tout d'abord que, si $p = \mathbb{P}[\exists t : Q_t > 0] = \mathbb{P}[V < \infty]$, la variable aléatoire

$$H(x) = \text{nombre de } t \text{ tels que } Q_t = x$$

suit pour tout $x \leq 0$ la loi géométrique $\mathbb{P}[H(x) = n+1] = p^n(1-p)$, d'espérance $\mathbb{E}[H(x)] = 1/(1-p)$. (Pour $x = 0$, appliquer la propriété de Markov aux instants où $Q = 0$; pour $x < 0$, cela résulte de ce que $(Q_t)_{t\geq 0}$ et $(Q_{S+t} - x)_{t\geq 0}$ ont même loi, où $S = \inf\{t : Q_t = x\}$ est p.s. fini.) Comme les trajectoires de Q ont pour pente $-a$, on en déduit que la mesure aléatoire d'occupation

$$\rho(A) = \lambda(\{t : Q_t \in A\}) \ ,$$

de densité $\dfrac{1}{a} H(x)$, a une espérance uniforme (égale à $\dfrac{1}{a(1-p)} \lambda$) sur la demi-droite négative. Autrement dit, pour une fonction g portée par $]-\infty, 0]$ et

1. Il se trouve que μ_0 est la mesure uniforme sur $[0,1]$ de masse totale $1/a$; voir la remarque plus bas.

intégrable sur cette demi-droite,

$$\mathbb{E}\int_0^\infty g(Q_s)\,ds = \frac{1}{a(1-p)}\int_{-\infty}^0 g(x)\,dx\,.$$

En appliquant la propriété de Markov à l'instant $W = \inf\{t > 0 : Q_t = 0\}$, qui vérifie $\mathbb{P}[W < \infty] = \mathbb{P}[V < \infty] = p$, on en déduit, puisque Q_s est positif sur $[V, W[$, que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^V g(Q_s)\,ds &= \mathbb{E}\int_0^\infty g(Q_s)\,ds - \mathbb{E}\int_W^\infty g(Q_s)\,ds \\ &= (1-p)\,\mathbb{E}\int_0^\infty g(Q_s)\,ds = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^0 g(x)\,dx\end{aligned}$$

(remarquer que l'on n'a pas à calculer p, qui s'élimine identiquement; il vaut bien entendu $1/a$, la masse totale de μ_0).

Et c'est presque terminé! Le générateur infinitésimal de Q n'étant autre que $Lf(x) = f(x+1) - f(x) - af'(x)$, pour f de classe C^∞ et à support dans $[0,1]$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Q_V)] &= \mathbb{E}\Big[f(0) + \int_0^V Lf(Q_s)\,ds\Big] \\ &= \mathbb{E}\int_0^V f(Q_s+1)\,ds \qquad\qquad \text{car } Q_s < 0 \text{ dans }]0, V[\\ &= \frac{1}{a}\int_0^1 f(x)\,dx\end{aligned}$$

par la formule précédente appliquée à $g(x) = f(x+1)$.

Ceci démontre le résultat annoncé pour $a > 1$. Lorsque $a = 1$, c'est-à-dire lorsque Q_t est la martingale $N_t - t$, un passage à la limite sans difficulté montre que ce résultat subsiste, ainsi que le lemme d'uniformité de la mesure d'occupation [si $g(x) = 0$ pour $x > 0$, $\mathbb{E}\int_0^V g(Q_s)\,ds = \int_{-\infty}^0 g(x)\,dx$]. En revanche, lorsque $a < 1$, R. Pemantle a remarqué que l'uniformité de la loi de Q_V est en défaut : quand $a \to 0+$, Q_V converge manifestement en loi vers 1.