AZZOUZ DERMOUNE

Formule de composition pour une classe d'opérateurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 397-401
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__397_0>

FORMULE DE COMPOSITION POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS

par A. DERMOUNE [1]

1. Introduction. Les physiciens ont considéré depuis longtemps des opérateurs sur l'espace de Fock symétrique (bosonique), qui se construisent à partir des opérateurs de création et d'annihilation. La théorie de ces opérateurs a été développée par Berezin [1]. Celui-ci les écrit comme une somme d'intégrales

$$\mathcal{K}_{mn} = \int K_{mn}(s_1,\ldots,s_m\,;\,t_1,\ldots,t_n)\,a^+_{s_1}\ldots,a^+_{s_m}a^-_{t_1}\ldots a^-_{t_n}\,ds_1\ldots,ds_m dt_1\ldots dt_n\ .$$

On utilise ici les notations a^+,a^- plutôt que les notations a^*,a traditionnelles chez les physiciens, et d'une manière générale les notations des exposés antérieurs de ce séminaire. Dans l'esprit de Berezin les noyaux K_{nm} étaient des distributions : cette idée a été mise sous forme rigoureuse et efficace par P. Krée [5][6][7].

Hudson et Parthasarathy [4] ont noté l'analogie entre ces représentations d'opérateurs et les intégrales stochastiques, ce qui amène à écrire $da^\pm_t$ au lieu de $a^\pm_t dt$. Ils ont développé une théorie des intégrales stochastiques d'opérateurs dans laquelle le mouvement brownien classique est remplacé par le "mouvement brownien quantique" $(a^+_t\,,\,a^-_t)$. Chez eux l'indice t doit appartenir à la droite, alors que chez Berezin il peut appartenir à un espace mesuré diffus (E,μ) quelconque, ou une variété si l'on veut utiliser les distributions.

H. Maassen [8] a introduit dans cette théorie la notation de Guichardet ou notation courte, dans laquelle l'opérateur $\mathcal{K}=\sum_{mn}\mathcal{K}_{mn}$ s'écrit

$$\mathcal{K} = \int K(A,B)\,da^+_A\,da^-_B\ .$$

Ici A,B sont des parties finies de E, par exemple $A=(s_1\ldots,s_m)$, $B=(t_1,\ldots,t_n)$ dans la première formule. Maassen n'utilise pas les distributions. Il suppose que le noyau $K(A,B)$ vérifie une condition simple de majoration et de support et montre qu'alors les opérateurs définis par les noyaux forment une *-algèbre, avec une formule explicite de composition des noyaux.

L'introduction de l'opérateur de nombre permet de traiter avec des noyaux ordinaires certains opérateurs qui, du point de vue de la théorie de Berezin, auraient un noyau distribution singulier sur la diagonale. La formule de composition des noyaux avec l'opérateur de nombre, donnée dans [9], est nettement plus compliquée que celle de Maassen.

[1] Le résultat de cet exposé a été obtenu par A. Dermoune, répondant à une question de P.A. Meyer. La rédaction est de ce dernier.

On s'est aperçu depuis assez longtemps que si l'on travaille sur un espace de Fock multiple (du point de vue probabiliste, L^2 pour un mouvement brownien à $\nu > 1$ dimensions) on a ν opérateurs de création, ν opérateurs d'annihilation, ν opérateurs de nombre, mais on voit aussi apparaître $\nu(\nu-1)$ *opérateurs d'échange.* La théorie de l'espace de Fock multiple est maintenant importante, car elle est à la base de la théorie des diffusions quantiques d'Evans–Hudson [3],[2]. Cette note répond à la question suivante : la formule de composition des noyaux pour $\nu = 1$ avec l'opérateur de nombre étant déjà compliquée, est il possible de bien comprendre la structure d'une formule de composition comportant tous les opérateurs de nombre et d'échange ? On montre dans ce travail que l'on peut écrire une telle formule, et que les résultats de Maassen s'étendent complètement.

2. L'espace de Fock multiple. Pour plus de détails, voir dans ce volume l'exposé "Diffusions Quantiques III".

1) *Vecteurs.* Nous employons les notations probabilistes (l'espace de Fock est identifié à l'espace de Wiener associé à un mouvement brownien à ν dimensions $\mathbf{X} = (X^1, \ldots, X^\nu)$. Cela ne restreint pas essentiellement la généralité, car la structure d'ordre de la droite n'intervient qu'en apparence.

Un vecteur de l'espace de Fock admet un développement en chaos de Wiener

$$f = \int_{\mathcal{P}^\nu} f(U_1, \ldots, U_\nu)\, dX^1_{U_1} \ldots dX^\nu_{U_\nu} \,. \tag{1}$$

Ici les U_i sont des parties finies de $\mathbb{R}_+$, c'est à dire des ensembles finis d'instants. Pour calculer l'intégrale stochastique, on range la réunion des U_i en ordre décroissant et on intègre de droite à gauche. Le carré de la norme de f est donné par

$$\| f \|^2 = \int_{\mathcal{P}^\nu} |f(U_1, \ldots, U_\nu)|^2\, dU_1 \ldots dU_\nu \,, \tag{2}$$

où dU est la mesure naturelle sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}_+$.

2) *Opérateurs fondamentaux.* Nous désignons par $\alpha, \beta \ldots$ des indices prenant les valeurs $1, \ldots, \nu$, et par $\rho, \sigma, \ldots$ des indices prenant en plus la valeur 0, et nous convenons que $dX^0_t = dt$. Les opérateurs de création, d'annihilation, de nombre et d'échange sont alors définis au point t, avec les notations d'Evans, par les formules :

$$\begin{aligned} \text{création} \quad &: \ da^\alpha_0(t)1 = dX^\alpha_t \quad ; \quad da^\alpha_0(t)dX^\beta_t = 0 \\ \text{annihilation} \quad &: \ da^0_\alpha(t)dX^\beta_t = \delta^\beta_\alpha dt \quad ; \\ \text{nombre, échange} \quad &: \ da^\beta_\alpha(t)dX^\gamma_t = \delta^\gamma_\alpha dX^\beta_t \,. \end{aligned}$$

Les opérateurs de nombre correspondent à $\alpha = \beta$, les opérateurs d'échange à $\alpha \neq \beta$. On voit que l'on a défini tous les opérateurs $da^\sigma_\rho(t)$ à l'exception de $da^0_0(t)$, que nous prendrons égal à $I dt$. Dans ces conditions, on a la relation très commode indiquée par Evans

$$da^\sigma_\rho(t)da^\varphi_\tau = \widetilde{\delta}^\varphi_\rho\, da^\sigma_\tau(t) \tag{3}$$

où $\widetilde{\delta}^\varphi_\rho$ diffère du symbole de Kronecker habituel par le fait que $\widetilde{\delta}^0_0 = 0$.

3) *Noyaux.* Un opérateur associé à un noyau est donné par une expression

$$(4) \qquad K = \int K((A_0^\alpha);(A_\alpha^\beta);(A_\alpha^0))\, da_0^\alpha(A_0^\alpha)\dots da_\alpha^\beta(A_\alpha^\beta)\dots da_\alpha^0(A_\alpha^0)\,.$$

On peut imaginer au lieu d'une ligne d'arguments toute une matrice de parties finies A_ρ^σ, avec A_0^0 qui est vide. Les premiers arguments A_0^α correspondent aux créateurs, les derniers A_α^0 aux annihilateurs, et au milieu nous avons les opérateurs de nombre et d'échange. *Toutes ces parties finies sont supposées disjointes.*

Dans la représentation (4), la différentielle du temps $da_0^0(t)=dt$ ne figure pas. En effet, si elle apparaissait, on pourrait la faire disparaître par intégration, en modifiant la fonction K. Cependant, il est intéressant d'avoir une variante de la définition des noyaux dans laquelle le temps $da_0^0(t)$ peut intervenir, parce que de tels "noyaux généralisés" apparaissent naturellement quand on résout des équations différentielles stochastiques quantiques. On perd alors l'unicité de la représentation des opérateurs par leur noyau, mais on y gagne en souplesse. Dans ce cas la formule (4) comporte à droite une différentielle supplémentaire $da_0^0(A_0^0)$, et le sous-ensemble correspondant A_0^0 est écrit comme premier argument de K.

Les *noyaux réguliers* au sens de Maassen sont définis par les deux propriétés qui généralisent la situation de l'espace de Fock ordinaire (voir *Sém. Prob. XX,* p. 306) :

1) une condition de support compact ($K((A_\sigma^\rho))=0$ si les arguments ne sont pas tous contenus dans un même intervalle $[0,T]$), ou plus généralement dans un même ensemble de mesure finie)

2) une majoration de la forme

$$(5) \qquad |K((A_\sigma^\rho))| \le C M^{\sum |A_\sigma^\rho|}\,.$$

Il est facile de voir que, si la variable supplémentaire $da_0^0(t)$ est éliminée par intégration, alors le vrai noyau obtenu est encore régulier.

3. Effet d'un noyau sur un vecteur. Par raison de symétrie, nous introduisons aussi la différentielle supplémentaire $dX^0(U^0)$ et l'argument correspondant U^0 dans la formule (1)

$$(6) \qquad f = \int f(U^0,U^1,\dots,U^\nu)\,dX^0(U^0)dX^1(U^1)\dots dX^\nu(U^\nu)\,.$$

La formule (2) n'est plus valable avec cette nouvelle représentation. Ici aussi, on peut définir des *vecteurs réguliers* (vecteurs-test de Maassen) par une condition de support compact dans le temps, et une propriété de majoration

$$(7) \qquad |f((U^\rho))| \le C M^{\sum |U^\rho|}\,.$$

Si l'on revient à la forme (1) en intégrant pour éliminer la variable supplémentaire, la régularité est préservée. Calculons maintenant l'effet d'un opérateur donné par un noyau sur un vecteur donné par le développement (6). On commence par calculer l'effet d'une différentielle d'opérateur $\prod da_\sigma^\rho(S_\sigma^\rho)$ sur une différentielle de vecteur $\prod dX^\tau(U^\tau)$. On pose

$$S_\sigma^\rho \cap U^\tau = B_\sigma^{\rho\tau}\ ,\ S_\sigma^\rho \cap \tilde U = A_\sigma^\rho\ ,\ \tilde S \cap U^\tau = C^\tau\ ,$$

où $\tilde{S}$ est le complémentaire de $\cup_{\rho\sigma} S_\sigma^\rho$, et $\tilde{U}$ celui de $\cup_\tau U^\tau$. Tous ces ensembles sont disjoints. Alors on voit aisément que le produit est 0, sauf si les seuls ensembles non-vides de ces décompositions sont les C^τ, A_0^ρ et $B_\alpha^{\rho\alpha}$, et dans ce cas

$$\begin{aligned} dX^0 &\quad \text{est produit par} \quad A_0^0 + \sum_\gamma B_\gamma^{0\gamma} + C^0 \\ dX^\alpha &\quad \text{est produit par} \quad A_0^\alpha + \sum_\gamma B_\gamma^{\alpha\gamma} + C^\alpha \,. \end{aligned}$$

Alors il est facile de trouver l'expression du vecteur $Kf = g$: le coefficient $g((V^\alpha))$ (*avec* V^0 *vide : ce que l'on obtient est un vrai développement en chaos*) est donné par une somme, sur toutes les décompositions

$$V^\alpha = A_0^\alpha + \sum_\gamma B_\gamma^{\alpha\gamma} + C^\alpha \,,$$

des intégrales suivantes, où les ensembles A_0^0, $B_\gamma^{0\gamma}$ et C^0 apparaissant dans le coefficient de dX^0 sont traités comme des variables d'intégration M, N_γ, P, grâce aux propriétés combinatoires de la mesure

$$\int K(M,(A_0^\alpha);(A_\alpha^\beta + B_\alpha^{\beta\alpha});(N_\alpha)) f(P,(N_\alpha + \sum_\gamma B_\alpha^{\gamma\alpha} + C^\alpha))\, dM \prod_\alpha dN_\alpha\, dP \,. \tag{8}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le résultat de l'opération d'un noyau régulier sur un vecteur régulier est encore un vecteur régulier : ceci est le début de l'extension du théorème de Maassen aux espaces de Fock multiples. Nous laisserons au lecteur l'étude de l'adjoint d'un opérateur donné par un noyau, et nous nous occupons de la composition des noyaux, qui est notre but principal.

4. Composition des noyaux. Nous considérons deux noyaux K, L et cherchons à calculer le noyau composé $KL = J$. Nous procédons comme au paragraphe précédent, en calculant d'abord la composition de deux différentielles d'opérateurs

$$\begin{aligned} &da_0^0(R_0^0) \prod da_0^\alpha(R_0^\alpha) \ldots da_\alpha^\beta(R_\alpha^\beta) \ldots da_\alpha^0(R_0^\alpha) \\ &da_0^0(S_0^0) \prod da_0^\alpha(S_0^\alpha) \ldots da_\alpha^\beta(S_\alpha^\beta) \ldots da_\alpha^0(S_0^\alpha) \end{aligned}$$

Dans le cas de vrais noyaux R_0^0 and S_0^0 ne figurent pas dans cette représentation, et on les interprète comme l'ensemble vide. Désignons par $\tilde{R}$ le complémentaire de $\cup_{\rho\sigma} R_\sigma^\rho$ et de même pour $\tilde{S}$. Nous définissons

$$R_\sigma^\rho \cap \tilde{S} = A_\sigma^\rho \quad ; \quad R_\sigma^\rho \cap S_\xi^\tau = B_{\sigma\xi}^{\rho\tau} \quad ; \quad \tilde{R} \cap S_\xi^\tau = C_\xi^\tau \,.$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints, et nous utilisons la relation $da^\varepsilon(U+V) = da^\varepsilon(U)da^\varepsilon(V)$ pour U, V disjoints, afin d'écrire chacune des deux différentielles d'opérateurs comme un produit comportant les morceaux élémentaires A_σ^ρ, $B_{\sigma\xi}^{\rho\tau}$, et C_ξ^τ. Ensuite nous multiplions ces produits en utilisant les règles d'Evans, et nous trouvons que le produit est

0 sauf si les seuls ensembles non vides sont de la forme A^ρ_σ, $B^{\rho\alpha}_{\alpha\sigma}$, C^τ_ξ. Si ces conditions sont satisfaites, le produit est égal à

$$G\prod da^\alpha_0(T^\alpha_0)\dots da^\beta_\alpha(T^\beta_\alpha)\dots da^0_\alpha(T^0_\alpha)$$

avec

$$T^\rho_\sigma = A^\rho_\sigma + \sum_\gamma B^{\rho\gamma}_{\gamma\sigma} + C^\rho_\sigma$$

et

$$G = d(A^0_0 + \sum_\gamma B^{0\gamma}_{\gamma 0} + C^0_0)\,.$$

Il est maintenant facile d'obtenir la formule définitive du type de Maassen : on a pour le (vrai) noyau composé $J((T^\alpha_0), (T^\beta_\alpha), (T^0_\alpha))$ l'expression suivante, en remplaçant les ensembles A^0_0, $B^{0\alpha}_{\alpha 0}$, C^0_0 par des variables d'intégration M, N_α, P

$$\int \sum_{T^\rho_\sigma = A^\rho_\sigma + \sum_\gamma B^{\rho\gamma}_{\gamma\sigma} + C^\rho_\sigma} K(M, A^\alpha_0, A^\beta_\alpha + \sum_\rho B^{\beta\alpha}_{\alpha\rho}, A^0_\alpha + \sum_\gamma B^{0\alpha}_{\alpha\gamma} + N_\alpha) \times$$

$$L(P, N_\alpha + \sum_\gamma B^{\gamma\alpha}_{\alpha 0} + C^\alpha_0, \sum_\rho B^{\rho\beta}_{\beta\alpha} + C^\beta_\alpha, C^0_\alpha)\, dM dP \prod_\alpha dN_\alpha \tag{9}$$

REFERENCES

[1] Berezin (F.A.). *The method of second quantization.* Academic Press, New York 1966.

[2] Evans (M.P.). Existence of quantum diffusions. *Prob. Th. and Rel. Fields,* 81, 1989, p. 473–483.

[3] Evans (M.P.) et Hudson (R.L.). Multidimensional quantum diffusions. *Quantum Probability III, Oberwolfach 1987,* LN n° 1303, 1988, p. 69–88.

[4] Hudson (R.L.) et Parthasarathy (K.R.). Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Comm. Math. Phys.,* 93, 1984, p. 301–323.

[5] Krée (P.). Calcul d'intégrales et de dérivées en dimension infinie *J. Funct. Anal.,* 1979.

[6] Krée (P.). La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique *Stochastic Analysis and Related Topics, Silivri 1986,* LN n° 1316, 1987, p. 170–233

[7] Krée (P.) et Raczka (R.). Kernels and symbols in quantum field theory. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect A,* 28, 1978, 41–73.

[8] Maassen (H.). Quantum Markov processes on Fock spaces described by integral kernels *Quantum Probability and Applications II,* LN n° 1136, 1985, p. 361–374.

[9] Meyer (P.A.). Eléments de Probabilités Quantiques. *Sém. Prob. XX, 1984/85* LN n° 1204, 1986, p. 186–312.

Département de Mathématiques Pures
Université de Clermont-Ferrand
Complexe Scientifique des Cézeaux
B.P. 45, F-63170 Aubière