DOMINIQUE CELLIER
DOMINIQUE FOURDRINIER

Sur les lois à symétrie elliptique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 300-328
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__300_0>

SUR LES LOIS A SYMETRIE ELLIPTIQUE

Dominique CELLIER , Dominique FOURDRINIER
Laboratoire Analyse et Modèles Stochastiques
(URA CNRS 1378) Université de ROUEN
B.P. 118 - 76134 MONT SAINT-AIGNAN CEDEX

0 - INTRODUCTION

L'origine de cet exposé est l'étude des estimateurs à rétrécisseur (dits de James-Stein) dans un cadre plus large que celui de la loi normale multidimensionnelle (cf. [3] et [4]). De nombreux résultats obtenus s'appuyant sur la propriété d'invariance de la loi normale par transformation orthogonale, il est naturel d'envisager la classe des lois possédant cette propriété d'invariance : les lois à symétrie elliptique.

En dimension 2, Artzner [1], fournit une caractérisation des mesures planes invariantes par rotation et la classe des lois sur la droite qui en sont les marges. En dimension supérieure, de nombreux auteurs ont abordé ce sujet : Philoche [11] montre les implications statistiques des vecteurs isotropiquement distribués, Kelker [7] et plus récemment Cambanis [2] et Eaton [6] présentent des propriétés essentielles de ces lois. On peut consulter Chmielewski [5] pour une bibliographie détaillée.

Nous rassemblons et unifions les résultats qui nous paraissent importants dans le contexte statistique du modèle linéaire. Notre préoccupation essentielle est de fournir une présentation "coordinate free" des lois à symétrie elliptique dans le cadre général d'un espace vectoriel réel de dimension finie dans lequel la propriété d'invariance par transformation orthogonale est liée à la notion de paramètre de dispersion. Kruskal [8] et [9] et Stone [12] et [13] ont largement développé les intérêts d'une telle approche en ce qui concerne la clarté, la concision et le caractère intrinsèque des résultats énoncés.

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie. On munit E de la topologie engendrée par les formes linéaires sur E et de la tribu borélienne associée $\mathcal{B}(E)$, qui est aussi, puisque E est de dimension finie, la tribu engendrée par les formes linéaires.

1 - INTEGRATION SUR UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Notons $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des applications mesurables de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(E,\mathcal{B}(E))$.

I - Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$

I.1. Définition

Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$. *On dit que* f *est* μ-intégrable *si, pour tout* $t \in E^*$, *dual de* E, $t \circ f$ *appartient à* $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

Dans ce cas, on appelle intégrale de f par rapport à μ *l'élément* $\mu(f)$ *de* E^{**} *(bidual de E) qu'on notera* $\int_\Omega f d\mu$, *ou encore* $\mathbb{E}_\mu(f)$ *si* μ *est une probabilité définie par*

$$\forall\ t \in E^* \qquad \mu(f)(t) = \mu(t \circ f)\ .$$

I.2. Remarque

E^{**} étant canoniquement isomorphe à E, on identifiera $\mu(f)$ au vecteur de E, noté de la même manière, défini par

$$\forall\ t \in E^* \qquad \mu(f)(t) = t(\mu(f))\ .$$

I.3. Définition

Soit P *une mesure de probabilité sur* $(E,\mathcal{B}(E))$. *Si* id_E *est* P-*intégrable et si on note* $m = \mathbb{E}_P[id_E]$, *on dit que* P *admet pour* moyenne m.

I.4. Cas particulier

Supposons que E soit euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée. E et E^* sont alors isomorphes par l'isomorphisme de E sur E^* : $u \rightsquigarrow \langle u,.\rangle$.

Dans ce cas une fonction f mesurable de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(E,\mathcal{B}(E))$ est μ-intégrable si et seulement si, pour tout $u \in E$, $\langle u,f(.)\rangle$ appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

L'intégrale de f , $\mu(f)$, est l'unique vecteur de E vérifiant

$$\forall u \in E \qquad \langle u,\mu(f)\rangle = \int_\Omega \langle u,f(\omega)\rangle\ \mu(d\omega)\ .$$

On vérifie alors que f est μ-intégrable si et seulement si f est fortement intégrable (Bochner-intégrable) c'est-à-dire que $\|f\|$ appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

II - Fonctions caractéristiques

II.1. Définition

Soit P une probabilité sur $(E,\mathcal{B}(E))$. On appelle fonction caractéristique de P l'application φ_P de E^* dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in E^* \qquad \varphi_P(t) = \mathbb{E}_P(e^{it}) \ .$$

II.2. Remarque

Si P_t désigne la loi image de P par t, alors on a

$$\forall t \in E^* \qquad \varphi_P(t) = \varphi_{P_t}(1) \ .$$

Si f est une application linéaire de E dans un espace vectoriel de dimension finie F, alors on a

$$\forall s \in F^* \qquad \varphi_{P_f}(s) = \varphi_P({}^t f(s)) \ .$$

II.3. Cas particulier

Dans le cas $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ euclidien, φ_P sera identifiée à l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall u \in E \qquad \varphi_P(u) = \mathbb{E}_P[e^{i\langle u,\cdot\rangle}] \ .$$

Dans le cas $E = R^n$ muni du produit scalaire classique, on retrouve la notion usuelle de fonction caractéristique.

II.4. Proposition

Si P et Q sont deux probabilités sur $(E,\mathcal{B}(E))$ telles que $\varphi_P = \varphi_Q$ alors $P = Q$.

II.5. Corollaire

Toute probabilité P sur E est caractérisée par ses images par toutes les formes linéaires sur E.

Démonstration

C'est une conséquence triviale de la proposition II.4. et de la remarque II.2.

III - Moments d'une loi de probabilité sur $(E,\mathcal{B}(E))$.

Soit k un entier naturel non nul.

III.1. Définition

On dit qu'une probabilité P sur $(E,\mathcal{B}(E))$ est d'ordre k si

$$\forall t \in E^* \qquad t \in \mathcal{L}^k(E,\mathcal{B}(E),P)$$

Il est clair que si P est d'ordre k, P est aussi d'ordre j pour tout $j \le k$.

III.2. Proposition

Une probabilité P *sur* $(E,\mathcal{B}(E))$ *est d'ordre* k *si et seulement si pour tout* $(t_1,\cdots,t_k) \in (E^*)^k$

$$\prod_{i=1}^{k} t_i \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{B}(E),P) .$$

Démonstration

1 - La condition suffisante est évidente.

2 - Démontrons la condition nécessaire. Soit $(t_1,\cdots,t_k) \in (E^*)^k$. Pour tout j, $0 \le j \le k-2$, on a $\frac{k-j-1}{k-j} + \frac{1}{k-j} = 1$ et en vertu de l'inégalité de Hölder

$$\left\| \prod_{i=1}^{k-j} t_i \right\|_{k/(k-j)}$$

$$\le \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{k-j-1} (t_i)^{k/(k-j)} \right\|_{(k-j)/(k-j-1)} . \left\| (t_{k-j})^{k/(k-j)} \right\|_{k-j} \right\}^{(k-j)/k}$$

$$= \left\| \prod_{i=1}^{k-j-1} t_i \right\|_{k/(k-j-1)} . \quad \| t_{k-j} \|_k$$

On en déduit par récursivité

$$\mathbb{E}_P \left(\prod_{i=1}^{k} |t_i| \right) \le \prod_{i=1}^{k} \| t_i \|_k$$

d'où le résultat escompté .

III.3. Définition

Si une probabilité P *sur* $(E,\mathcal{B}(E))$ *est d'ordre* k, *on appelle* moment d'ordre k, la forme k-linéaire m_k sur E^* , *définie par :*

$$\forall (t_1,\cdots,t_k) \in (E^*)^k \qquad m_k(t_1,\cdots,t_k) = \mathbb{E}_P \left(\prod_{i=1}^{k} t_i \right) .$$

III.4. Variance d'une loi de probabilité sur E

III.4.1. Définition

Si une probabilité P *sur* $(E,\mathcal{B}(E))$ *admet un moment d'ordre* 2, *on appelle* variance de P *le moment d'ordre* 2 *de la loi centrée.*

C'est la forme bilinéaire positive sur E^*, *notée* v, *définie par*

$$\forall (t,s) \in E^* \times E^* \qquad v(t,s) = \int_E t(x-m_1)\, s(x-m_1) P(dx)$$

avec l'identification de m_1 *avec un vecteur de E faite en remarque I.2.*

On vérifie dans ce cas la formule "classique" de la variance :

$$\forall (t,s)\in E^*\times E^* \qquad v(t,s) = m_2(t,s)-[m_1(t).m_1(s)] \ .$$

III.4.2. Proposition

Soit P une probabilité sur $(E,\mathcal{B}(E))$. *Soit f une application linéaire de E dans F, espace vectoriel de dimension finie. Notons* P_f *la loi image de P par f sur* $(F,\mathcal{B}(F))$. *Alors*

1. *si P admet m comme moment d'ordre 1,* P_f *admet un moment d'ordre 1 égal à* $m\circ {}^t f$

2. *si P admet un moment d'ordre 2 et si v désigne la variance de P,* P_f *admet un moment d'ordre 2 et sa variance est égale à* $v({}^t f(.),{}^t f(.))$.

Démonstration

1 - Si P admet un moment d'ordre 1 alors, pour tout $s \in F^*$,

$$\mathbb{E}_{P_f}(|s|) = \mathbb{E}_P(|s\circ f|) < +\infty$$

car $s\circ f\in E^*$. Donc P_f a un moment d'ordre 1. Celui-ci est égal à $m\circ {}^t f$ puisque, pour tout $s\in F^*$,

$$m\circ {}^t f(s) = m({}^t f(s)) = \mathbb{E}_P({}^t f(s)) = \mathbb{E}_P(s\circ f) = \mathbb{E}_{P_f}(s) \ .$$

2 - Supposons que P admette un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $(s,t)\in F^*\times F^*$,

$$\mathbb{E}_{P_f}(|st|) = \mathbb{E}_P(|s\circ f||t\circ f|) < +\infty \ .$$

P_f admet donc un moment d'ordre 2. Sa variance est égale à $v({}^t f(.),{}^t f(.))$ puisque, pour tout $(r,s)\in F^*\times F^*$,

$$\begin{aligned} m_2({}^t f(r),{}^t f(s)) &= \mathbb{E}_P({}^t f(r).{}^t f(s)) \\ &= \int_E (r\circ f)(x).(s\circ f)(x)P(dx) \\ &= \mathbb{E}_{P_f}(r.s) \ . \end{aligned}$$

III.5. Cas particulier d'un espace euclidien

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien comme dans I.4. dont on conserve les notations.

III.5.1. Proposition

Une probabilité P *sur* $(E,\mathcal{B}(E))$ *admet un moment d'ordre* k *si et seulement si* $\|.\|$ *appartient à* $\mathcal{L}^k(E,\mathcal{B}(E),P)$.

Remarque

Le moment d'ordre k de P s'identifie alors à la forme k-linéaire sur E, notée aussi m_k :

$$\forall (u_1,\cdots,u_k) \in E^k \qquad m_k(u_1,\cdots,u_k) = \mathbb{E}_P\left(\prod_{i=1}^{k} \langle u_i,.\rangle\right) \quad .$$

III.5.2. Proposition - fonction caractéristique et moments

Si une probabilité P *sur* $(E,\mathcal{B}(E))$ *admet un moment d'ordre* k, m_k , *alors sa fonction caractéristique* φ_P *de* P *est de classe* C^k *sur* E *et vérifie, pour tout* $h\in E$ *et tout* $(t_1,\cdots,t_k)\in E^k$,

$$\varphi_P^{(k)}(h).(t_1,\cdots,t_k) = i^k\ \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\langle t_i,.\rangle\right)e^{i\langle h,.\rangle}\right].$$

En particulier

$$\varphi_P^{(k)}(0_E) = i^k\ m_k \ .$$

Démonstration

1) Montrons par récurrence que φ_P est k fois dérivable sur E et vérifie la formule donnée dans la proposition.

1.i. Supposons k=1. Montrons que, pour tout $(h,t)\in E^2$, φ_P vérifie

$$\varphi_P'(h).t = i\ \mathbb{E}_P[\langle t,.\rangle\ e^{i\langle h,.\rangle}] \ .$$

On a, pour $\ell\in E$,

$$\begin{aligned} A(h,\ell) &= \left|\varphi_P(h+\ell)-\varphi_P(h)-i\ \mathbb{E}_P[\langle \ell,.\rangle\ e^{i\langle h,.\rangle}]\right| \\ &= \left|\mathbb{E}_P[e^{i\langle h+\ell,.\rangle} - e^{i\langle h,.\rangle} - i\langle \ell,.\rangle\ e^{i\langle h,.\rangle}]\right| \\ &\le \mathbb{E}_P[|e^{i\langle \ell,.\rangle} - 1 - i\langle \ell,.\rangle|] \\ &= \int_E |e^{i\langle \ell,x\rangle} - 1 - i\langle \ell,x\rangle|\,dP(x) \\ &= \int_E |\langle \ell,x\rangle|\ \varepsilon(x,\ell)\ dP(x) \end{aligned}$$

où, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\ell\to 0_E} \varepsilon(x,\ell) = 0 \ .$$

Donc

$$A(h,\ell) \le \|\ell\| \int_E \|x\|\ \varepsilon(x,\ell)\ dP(x) \ .$$

Or, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le 2|\alpha|$$

donc $\varepsilon(x,\ell)$ est uniformément borné par 2. La loi P admettant un moment d'ordre 1, on en déduit, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$\forall h\in E \qquad A(h,\ell) = o(\|\ell\|) \qquad (\ell \to 0) .$$

Donc φ_P est dérivable sur E et φ_P' vérifie la formule désirée.

1.ii. Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à l'ordre k-1 .

Pour tout $h\in E$ et tout $(t_1,\cdots,t_k)\in E^k$, on a

$$A(h,t_1,t_2,\cdots,t_k)$$

$$= \left|\varphi_P^{(k-1)}(h+t_1).(t_2,\cdots,t_k)-\varphi_P^{(k-1)}(h).(t_2,\cdots,t_k)-i^k\mathbb{E}_P\left[\prod_{i=1}^{k}\langle t_i,.\rangle e^{i\langle h,.\rangle}\right]\right|$$

$$= \left|\mathbb{E}_P\left[i^{k-1}\prod_{i=2}^{k}\langle t_i,.\rangle\, e^{i\langle h,.\rangle}\left(e^{i\langle t_1,.\rangle} - 1 - i\langle t_1,.\rangle\right)\right]\right|$$

$$\le \prod_{i=2}^{k}\|t_i\| \int_E \|x\|^{k-1}\left|e^{i\langle t_1,x\rangle} - 1 - i\langle t_1,x\rangle\right| dP(x)$$

$$= \prod_{i=2}^{k}\|t_i\| \int_E \|x\|^{k-1}\,|\langle t_1,x\rangle|\,\varepsilon(x,t_1)\, dP(x)$$

où, pour tout $X \in E$,

$$\lim_{t_1\to 0_E} \varepsilon(x,t_1) = 0 .$$

Donc

$$A(h,t_1,t_2,\cdots,t_k) \le \prod_{i=1}^{k}\|t_i\| \int_E \|x\|^k\,\varepsilon(t_1,x)\, dP(x) .$$

En conséquence, pour tout $h \in E$ et tout $t_1 \in E$, on a

$$A(h,t_1) = \sup_{\substack{\|t_i\|=1\\ 2\le i\le k}} A(h,t_1,t_2,\cdots,t_k) \le \|t_i\| \int_E \|x\|^k\,\varepsilon(x,t_1)\, dP(x) .$$

En utilisant la même méthode que dans 1.i., il vient

$$\forall h\in E \qquad A(h,t_1) = o(\|t_i\|) \qquad (t_1 \to 0) .$$

Donc φ_P est k fois dérivable sur E et vérifie la formule voulue.

2) Regardons la continuité de $\varphi_P^{(k)}$.

Pour tout $(h,\ell)\in E^2$ et $(t_1,\cdots,t_k)\in E^k$ tels que $\|t_i\|=1$ pour $1\le i\le k$, on a

$$\left|\varphi_P^{(k)}(h+\ell).(t_1,\cdots,t_k) - \varphi_P^{(k)}(h).(t_1,\cdots,t_k)\right|$$

$$= \left|\mathbb{E}_P\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\langle t_i,.\rangle\right)\left(e^{i\langle h+\ell,.\rangle} - e^{i\langle h,.\rangle}\right)\right]\right|$$

$$\leq \mathbb{E}_P \left[\left| \prod_{i=1}^{k} \langle t_i , . \rangle \right| \; |e^{i\langle h+\ell , . \rangle} - e^{i\langle h, . \rangle}| \right]$$

$$\leq \int_E \|x\|^k \; |e^{i\langle h+\ell ,x\rangle} - e^{i\langle h,x\rangle}| \; dP(x) \quad .$$

Comme $|e^{i\langle h+\ell ,x\rangle} - e^{i\langle h,x\rangle}|$ est inférieur ou égal à 2 et comme P admet un moment d'ordre k, le résultat en découle en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

2 - LOIS RADIALES

- LOIS A SYMETRIE ELLIPTIQUE

Introduction

Beaucoup de résultats en analyse statistique multidimensionnelle sont obtenus sous des hypothèses de normalité. Or il s'avère que, pour certains d'entre eux, la propriété fondamentale qui intervient dans leur démonstration est l'invariance de la loi normale par rotation (ou plus généralement par transformation orthogonale).

Philoche [11] montre que le classique test F du modèle linéaire reste valide dans le cas de lois invariantes par transformation orthogonale.

De nombreuses propriétés des lois invariantes par rotation ont été obtenues par Kelker [7] et Artzner [1], puis, plus récemment, par Cambanis [2] et Eaton [6].

Comme dans ce qui précède, nous adopterons une présentation "coordinate free" de telles lois en nous plaçant dans le cadre général d'un espace vectoriel de dimension finie.

Notations

1 - Pour tout produit scalaire w sur E, l'application $x \rightsquigarrow w(x,.)$ est un isomorphisme de E sur E^* qui induit le produit scalaire v sur E^* défini par

$$\forall (x,y) \in E \qquad v(w(x,.),w(y,.)) = w(x,y) .$$

De même tout produit scalaire v sur E^* induit un produit scalaire w sur E identifié à E^{**} .

Dans ces conditions, remarquons que, si $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E, $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ sa base duale dans E^* , alors les matrices de w et de v dans ces bases respectives sont inverses l'une de l'autre. Il est ainsi naturel de noter $v = w^{-1}$ et $w = v^{-1}$.

2 - Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Si w est un produit scalaire sur E, on note w_H la restriction de w à $H \times H$.

Si v est un produit scalaire sur E^*, on note $v_{(H)}$ le produit scalaire sur H^* défini par $v_{(H)} = v({}^t\pi,{}^t\pi)$ où π est la projection v^{-1}-orthogonale de E sur H. Il vérifie $(v_{(H)})^{-1} = (v^{-1})_H$.

3 - Dans toute la suite, si v désigne un produit scalaire sur E^*, on note $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\ \|$ le produit scalaire et la norme pour la structure euclidienne définie par v^{-1} sur E.

On désigne par $B_{v,r}$ (resp. $S_{v,r}$) la boule (resp. la sphère) de centre 0_E et de rayon $r \geq 0$. En particulier on note $B_v = B_{v,1}$ et $S_v = S_{v,1}$.

I - Lois radiales - Lois à symétrie elliptique

I.1. Définition

Soit v *un produit scalaire sur* E^*. *Une mesure (resp. une probabilité) sur* E *est dite* radiale *(resp.* loi radiale*), de* paramètre de dispersion v, *si elle est invariante par toute transformation* v^{-1}*-orthogonale.*

Supposer que le paramètre de dispersion est un produit scalaire sur E^* se justifie par le fait, que nous démontrerons plus loin (cf. III.3.), que si une loi radiale admet un moment d'ordre 2 ce dernier est un paramètre de dispersion.

I.2. Définition

Une mesure (resp. une probabilité) sur E *est une mesure (resp. une loi) à* symétrie elliptique *sur* E, de paramètre de position $\lambda \in E$ *et de* paramètre de dispersion v *si elle est l'image, par la translation de vecteur* λ, *d'une mesure (resp. loi) radiale sur* E *de paramètre de dispersion* v.

I.3. Remarque

Si une mesure à symétrie elliptique sur E admet v pour paramètre de dispersion, elle admet aussi pour paramètre de dispersion αv pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On verra plus loin qu'en fait le paramètre de dispersion est défini à un facteur multiplicatif près.

Etant donné le lien entre mesures radiales et mesures à symétrie elliptique, nous nous limiterons par la suite à l'étude des propriétés des mesures radiales. Celles des mesures à symétrie elliptiques s'en déduisent facilement.

I.4. Proposition

1 - *Une loi de probabilité* P *sur* E *est une loi radiale de paramètre de dispersion* v *si et seulement si sa fonction caractéristique* φ_P *factorise à travers* $\| \|^2$. *Il existe donc alors une fonction* ψ_P *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que*

$$\forall t \in E \qquad \varphi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) \ .$$

2 - *Dans ce cas, les lois images de* P *par toutes les formes linéaires sur* E *de norme* 1 *sont les mêmes et leur fonction caractéristique est l'application* $a \rightsquigarrow \psi_P(a^2)$.

Démonstration

1 - a) Condition nécessaire

Soient $t \in E$ et $t' \in E$ tels que $\|t\| = \|t'\|$. Il existe alors une transformation v^{-1}-orthogonale g de E, telle que $g(t') = t$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\varphi_P(t) &= \mathbb{E}_P[\exp(i\langle t,.\rangle)] \\
&= \mathbb{E}_P[\exp(i\langle g(t'),.\rangle)] \\
&= \mathbb{E}_P[\exp(i\langle t',g^{-1}(.)\rangle)] \\
&= \mathbb{E}_{P_{g^{-1}}}[\exp(i\langle t',.\rangle)] \\
&= \mathbb{E}_P[\exp(i\langle t',.\rangle)] \\
&= \varphi_P(t') \ .
\end{aligned}$$

La condition nécessaire en découle.

b) Condition suffisante

Supposons qu'il existe ψ_P de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in E \qquad \varphi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) \ .$$

Soit g une transformation v^{-1}-orthogonale. Nous avons, pour tout $t \in E$,

$$\varphi_{P_g}(t) = \varphi_P(g^{-1}(t)) = \psi_P\left(\|g^{-1}(t)\|^2\right) = \psi_P(\|t\|^2) = \varphi_P(t)$$

donc $P_g = P$ d'après II.4. chap. 1.

2 - Soit $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$. On désigne par t le vecteur de E tel que $f = \langle t,.\rangle$.

Soient F le sous-espace de E engendré par t, π le projecteur v^{-1}-orthogonal de E sur F et ξ l'isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur F ($\xi(a) = at$).

Il est clair que $f = \xi^{-1} \circ \pi$. Pour tout $s \in E$, on a

$$\varphi_{P_\pi}(s) = \varphi_P(\pi(s))$$

en vertu de la remarque II.2. du chapitre 1 et du fait que π est autoadjoint.

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $s = at$,

$$\varphi_{P_\pi}(at) = \varphi_P(at) = \psi_P(\|at\|^2) = \psi_P(a^2) .$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi_{P_f}(a) &= \mathbb{E}_{P_f}[\exp(ia.)] \\ &= \mathbb{E}_{P_\pi}[\exp(ia\xi^{-1}(.))] \\ &= \mathbb{E}_{P_\pi}[\exp(i\langle at,\xi^{-1}(.)t\rangle)] \\ &= \mathbb{E}_{P_\pi}[\exp(i\langle at,.\rangle)] \\ &= \varphi_{P_\pi}(at) \\ &= \psi_P(a^2).\end{aligned}$$

I.5. <u>Proposition</u>

Soit P une loi de probabilité radiale sur E.

Sauf si P est la loi de Dirac en 0_E , le paramètre de dispersion de P est défini à un facteur multiplicatif près.

<u>Démonstration</u>

Soient v_1 et v_2 deux paramètres de dispersion de P. Notons $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ les normes associées. Il existe une base de E, $(e_1,\cdots,e_n)$, qui est à la fois v_1^{-1}-orthonormale et v_2^{-1}-orthogonale.

Soient $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ les coefficients diagonaux de la matrice diagonale de v_2^{-1} dans cette base (pour $1 \leq i \leq n$ on a $\lambda_i > 0$). Soient

$$m = \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \text{ et } i \text{ un indice tel que } \lambda_i = m$$

et

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \text{ et } j \text{ un indice tel que } \lambda_j = M .$$

Il suffit de démontrer que si $m<M$ alors P est la mesure de Dirac en 0_E .

Nous définissons les endomorphismes f et g de E par :

$$\forall k \quad (1 \leq k \leq n,\ k \neq i,\ k \neq j) \qquad f(e_k) = g(e_k) = e_k$$

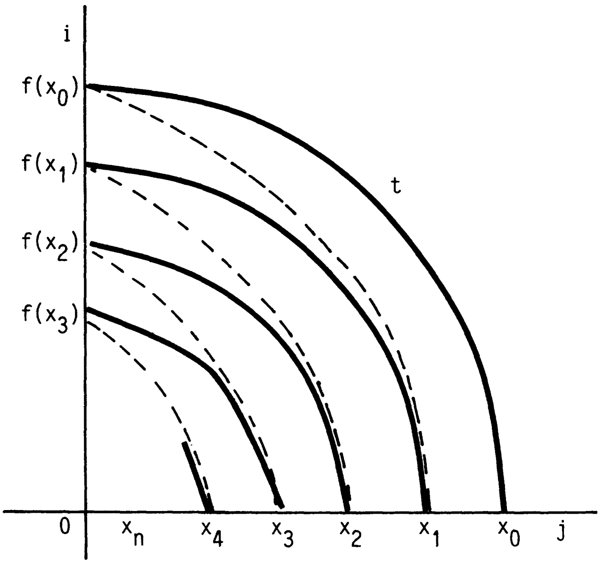
$$f(e_i) = e_j \ ,\ f(e_j) = e_i \ , \quad g(e_i) = \sqrt{\frac{m}{M}}\, e_j \ \text{ et } \ g(e_j) = \sqrt{\frac{M}{m}}\, e_i \ .$$

Il est clair que f est v_1^{-1}-orthogonale et que g est v_2^{-1}-orthogonale.

Supposons m<M. Soit $t \neq 0_E$ dans E et soit x_0 le vecteur de E dont les composantes dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ sont $(\|t\|_1\ \delta_{kj})_{1 \leq k \leq n}$.

Nous avons $\|x_0\|_1 = \|t\|_1$. Définissons alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ x_n = g \circ f(x_{n-1})$$



Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \left(\frac{m}{M}\right)^{n/2} x_{n-1} = \left(\frac{m}{M}\right)^{n/2} x_0$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0_E \ .$$

En outre

$$\varphi_P(x_n) = \varphi_P(g \circ f(x_{n-1}))$$

$$= \varphi_P(f(x_{n-1}))$$

car g est v_2^{-1}-orthogonale et P est v_2-radiale.

Alors

$$\varphi_P(x_n) = \varphi_P(x_{n-1})$$

car f est v_1^{-1}-orthogonale et P est v_1-radiale.

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_P(x_n) = \varphi_P(x_0) = \varphi_P(t)$$

et donc que la suite $(\varphi_P(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Par conséquent

$$1 = \varphi_P(0_E) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_P(x_n) = \varphi_P(t).$$

L'égalité précédente ayant lieu pour tout $t \in E$, P est la loi de Dirac en 0_E. En définitive nous avons montré que si P n'est pas la loi de Dirac en 0_E, alors $m = M$ et donc $v_2^{-1} = m\, v_1^{-1}$.

II - Exemples de mesures et de lois radiales

II.1. La mesure de Lebesgue sur E

Soit v un produit scalaire sur E^*. Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une base v^{-1}-orthonormale de E et ξ l'isomorphisme naturel de $\mathbb{R}^n$ dans E défini par

$$\forall (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \xi(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i .$$

Il est clair que ξ est une isométrie bimesurable de $\mathbb{R}^n$ sur E. On définit alors la mesure de Lebesgue sur E, notée λ_v, comme étant la mesure image par ξ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

L'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par transformation orthogonale implique d'une part que λ_v est une mesure radiale sur E admettant v pour paramètre de dispersion et d'autre part que λ_v ne dépend pas de la base v^{-1}-orthonormale choisie.

On vérifie aisément que, si v_1 et v_2 sont deux produits scalaires sur E^*, alors λ_{v_1} et λ_{v_2} sont deux mesures équivalentes.

II.2. La loi normale n-dimensionnelle

On appelle *loi normale* sur E toute loi de probabilité P sur E dont l'image par toute forme linéaire sur E est une loi normale sur $\mathbb{R}$. Une telle loi P admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2 (cf. III.1. chap. 1).

Supposons P centrée et calculons sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned}\forall t \in E^* \quad \varphi_P(t) &= \varphi_{P_t}(1)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2\, P_t(dx)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathbb{E}_P(t^2)\right)\end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}v(t,t)\right)$$

où v désigne la variance de P.

Si v est définie positive, alors d'après I.4., la loi P est radiale de paramètre de dispersion v. Dans le cas où P n'est pas centrée, si m désigne la moyenne, alors la loi P est une loi à symétrie elliptique notée $\mathcal{N}_E(m,v)$.

II.3. <u>La loi de Cauchy n-dimensionnelle</u>

Soit v un produit scalaire sur E^*. Une probabilité P sur E est une loi de Cauchy de paramètre v si pour toute forme linéaire t sur E, la loi image P_t est une loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$ de paramètre d'échelle $\sqrt{v(t,t)}$.

Calculons la fonction caractéristique d'une telle loi. Pour tout $t \in E^*$

$$\varphi_P(t) = \varphi_{P_t}(1) = \exp(-\sqrt{v(t,t)})$$

Par conséquent P est loi radiale admettant v comme paramètre de dispersion. Cette loi admet pour densité relativement à la mesure de Lebesgue λ_v sur E l'application $y \rightsquigarrow \dfrac{K}{(1+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}$

où n = dim E et K est une constante de normalisation.

II.4. <u>La loi uniforme sur une sphère n-dimensionnelle</u>

Soit v un produit scalaire sur E^* .

II.4.1. <u>Proposition</u>

Il existe sur S_v une unique loi radiale de E de paramètre de dispersion v, appelée loi uniforme sur S_v et notée $\mathcal{U}_v$.

<u>Démonstration</u>

Nous adaptons celle donnée par J.L. Philoche [11] dans le cas $E = \mathbb{R}^n$.

<u>i - Existence</u>

Soit λ_v la mesure de Lebesgue sur E associée à v. Soit N l'application de $B_v-\{0_E\}$ dans S_v définie par

$$\forall x \in B_v-\{0_E\} \qquad N(x) = \frac{1}{\|x\|}.x \ .$$

Soit $\mathcal{U}_v$ la mesure de probabilité sur E définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(E) \qquad \mathcal{U}_v(A) = \frac{1}{\lambda_v(B_v)}\lambda_v\left(N^{-1}(A \cap S_v)\right)$$

autrement dit $\mathcal{U}_v$ est la normalisée de la mesure image par N de la trace de λ_v sur B_v .

Montrons que $\mathcal{U}_v$ est radiale de paramètre de dispersion v.

Soit g une transformation v^{-1}-orthogonale de E. Il est clair que $N \circ g = g \circ N$. Pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_v(g^{-1}(A)) &= \frac{1}{\lambda_v(B_v)} \lambda_v\left[N^{-1}\left(g^{-1}(A) \cap S_v\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)} \lambda_v\left[N^{-1}\left(g^{-1}(A) \cap g^{-1}(S_v)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)} \lambda_v\left[N^{-1}\left(g^{-1}(A \cap S_v)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)} \lambda_v\left[g^{-1}\left(N^{-1}(A \cap S_v)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_v(B_v)} \lambda_v\left(N^{-1}(A \cap S_v)\right) \\
&= \mathcal{U}_v(A) .
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{U}_v$ est radiale de paramètre de dispersion v.

<u>ii - Unicité</u>

Sa démonstration fait appel à la théorie de la mesure de Haar. Le groupe $\mathcal{O}_v$ des transformations v^{-1}-orthogonales de E est un groupe topologique compact. Il en découle qu'il existe une unique probabilité ν invariante par les translations à gauche et à droite (voir Nachbin [10]). ν est appelée la mesure de Haar de $\mathcal{O}_v$.

Soit $C(S_v)$ l'ensemble des fonctions continues sur S_v à valeurs réelles. Pour tout $f \in C(S_v)$, pour tout $g \in \mathcal{O}_v$ et tout $x \in S_v$, on définit $f_x(g)$ et $f_g(x)$ par

$$f_x(g) = f_g(x) = f(g^{-1}(x)) .$$

Puisque $\mathcal{O}_v$ opère transitivement sur S_v, pour tout $f \in C(S_v)$ l'intégrale $\int_{\mathcal{O}_v} f_x(g) d\nu(g)$ ne dépend pas de $x \in S_v$. On peut donc définir sur S_v une loi de probabilité Q par

$$\forall f \in C(S_v) \qquad \int_{S_v} f dQ = \int_{\mathcal{O}_v} f_x d\nu .$$

Soient P une loi v-radiale sur S_v et $f \in \mathcal{C}(S_v)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{S_v} f(x)dP(x) &= \int_{\mathcal{O}_v} \left(\int_{S_v} f(x)dP(x)\right) d\nu(g)\\ &= \int_{\mathcal{O}_v} \left(\int_{S_v} f_g(x)dP(x)\right) d\nu(g)\\ &= \int_{S_v} \left(\int_{\mathcal{O}_v} f_x(g)d\nu(g)\right) dP(x)\\ &= \int_{\mathcal{O}_v} f_x(g)d\nu(g)\\ &= \int_{S_v} fdQ \ .\end{aligned}$$

Par conséquent P = Q ce qui établit l'unicité.

II.4.2. Définition

Soit $r \in \mathbb{R}_+$. *On appelle loi uniforme sur* $S_{v,r}$ *la loi image, par l'homothétie de rapport* r, *de la loi uniforme sur* S_v. *On la note* $\mathfrak{U}_{v,r}$.

III - Propriétés élémentaires des lois radiales

III.1. Propriété

Tout mélange de lois radiales sur E *est une loi radiale sur* E.

III.2. Propriété

Soit P *une loi radiale sur* E. *Si* P *admet un atome en* $a \in E$, *alors* $a = 0_E$.

Démonstration

Supposons $a \neq 0_E$. Considèrons la sphère $S(0_E, \|a\|)$ de centre 0_E et de rayon $\|a\|$. Pour tout $x \in S(0_E, \|a\|)$, on a $P(\{x\}) = P(\{a\}) > 0$ et ainsi $P(S(0_E, \|a\|)) = +\infty$ ce qui est absurde.

III.3. Proposition

Soit P *une loi radiale sur* E. *Si* P *est une probabilité d'ordre 2 alors* P *admet son moment d'ordre 2 pour paramètre de dispersion.*

Démonstration

Soit v un paramètre de dispersion de P. D'après la proposition I.4., il existe une fonction ψ_P de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in E \qquad \varphi_P(t) = \psi_P \circ g(t)$$

où $g(t) = \|t\|^2 = v^{-1}(t,t)$. La fonction g est différentiable sur E et vérifie, pour tout $(t,z) \in E \times E$,

$$g'(t).z = 2\, v^{-1}(t,z) \qquad \text{et} \qquad g''(t) = g'$$

et donc, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$g'(0_E) = 0 \text{ et } g''(0_E).(x,y) = 2\, v^{-1}(x,y) \quad .$$

Soit m_2 le moment d'ordre 2 de P. D'après la proposition III.5.2., chap. 1, φ_P est de classe C^2 sur E et vérifie $\varphi_P''(0_E) = -\, m_2^{-1}$.

Pour tout $t \in E$, $\varphi_P''(t)$ vérifie, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$\varphi_P''(t).(x,y) = \psi_P'(g(t)).(g''(t).(x,y)) + \psi_P''(g(t))(g'(t).x, g'(t).y)$$

par conséquent, pour $t = 0_E$,

$$\begin{aligned} &\varphi_P''(0_E).(x,y) \\ &\quad = \psi_P'(g(0_E)).(g''(0_E).(x,y)) + \psi_P''(g(0_E))(g'(0_E).x, g'(0_E).y) \\ &\quad = 2\, \psi_P'(0)\, v^{-1}(x,y) \quad . \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$m_2^{-1}(x,y) = -2\, \psi_P'(0)\, v^{-1}(x,y) \quad .$$

En conséquence, le moment d'ordre 2 est proportionnel au paramètre de dispersion, c'est donc aussi un paramètre de dispersion de P (cf. remarque I.3).

III.4. <u>Proposition</u> . <u>Image d'une loi radiale par une application linéaire</u>

Soit P *une loi radiale sur* E *de paramètre de dispersion* v. *Soit* f *une application linéaire* surjective *de* E *dans* F.

Alors la loi image P_f *de* P *par* f *est radiale sur* F *et admet pour paramètre de dispersion* $v({}^t f(.), {}^t f(.))$.

<u>Démonstration</u>

1 - Soient H un sous-espace vectoriel de E et π la projection v^{-1}-orthogonale de E sur H.

Montrons que P_π est radiale de paramètre de dispersion $v_{(H)} = v({}^t\pi, {}^t\pi)$, autrement dit, d'après l'introduction au chapitre 2, que P_π est invariante par toute transformation $(v^{-1})_H$-orthogonale.

Soit γ une transformation $(v^{-1})_H$-orthogonale sur H. La transformation δ sur E définie par

$$\forall x \in E \qquad \delta(x) = \gamma(\pi(x)) + x - \pi(x)$$

est v^{-1}-orthogonale et admet pour réciproque δ^{-1} donnée par

$$\forall y \in E \qquad \delta^{-1}(y) = \gamma^{-1}(\pi(y)) + y - \pi(y) \quad .$$

Pour tout borélien B de $\mathcal{B}(F)$, comme $\gamma \circ \pi = \pi \circ \delta$ nous avons

$$\begin{aligned} P_\pi(\gamma^{-1}(B)) &= P((\gamma \circ \pi)^{-1}(B)) \\ &= P((\pi \circ \delta)^{-1}(B)) \\ &= P(\delta^{-1} \circ \pi^{-1}(B)) \\ &= P(\pi^{-1}(B)) \\ &= P_\pi(B) \end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat cherché.

2 - Désignons par H le sous-espace vectoriel v^{-1}-orthogonal de Ker f et par π la projection v^{-1}-orthogonale sur H. La fonction f factorise alors à travers π : $f = g \circ \pi$ où g est un isomorphisme de H sur F. Il est alors clair que l'image par g d'une loi radiale sur H de paramètre de dispersion $v_{(H)}$ est radiale sur F de paramètre de dispersion $v_{(H)}({}^t g, {}^t g)$.

Puisque $P_f = (P_\pi)_g$, P_f est radiale de paramètre de dispersion

$$v_{(H)}({}^t g, {}^t g) = v({}^t \pi \circ {}^t g \ , \ {}^t \pi \circ \ {}^t g) = v({}^t f, {}^t f) \ .$$

IV - Propriétés caractéristiques des lois radiales

Nous développons ici deux types de caractérisation des lois radiales.

D'une part (cf. prop. IV.1. et corol. IV.3.), toute loi radiale est présentée classiquement comme un mélange de lois uniformes sur des sphères. Dans ce cas le rayon et le vecteur normalisé sont indépendants.

D'autre part (cf. prop. IV.5.), à la suite de Eaton [6], nous caractérisons une loi radiale par la loi conditionnelle de toute forme linéaire relativement à toute autre forme linéaire orthogonale.

IV.1. Proposition

Soient P *une loi de probabilité sur* E *et* v *un produit scalaire sur* E^*.

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) P *est radiale de paramètre de dispersion* v

ii) P *est un mélange de lois uniformes sur les sphères de* E *de centre* O_E.

Dans ce cas une version régulière de la loi conditionnelle de P *sachant* $\| \; \| = r$ *est* $\mathfrak{U}_{v,r}$.

Démonstration

i) ⇒ ii) Il existe une application ψ_P de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in E \quad \varphi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2).$$

Soit t fixé dans E. Pour tout u de E tel que $\|u\| = 1$, nous avons

$$\varphi_P(t) = \psi_P(\|t\|^2) = \psi_P(\|t\|^2 \; \|u\|^2) = \varphi_P(\|t\| u)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_P(t) &= \int_{S_v} \varphi_P(\|t\| u) \; \mathfrak{U}_v(du) \\
&= \int_{S_v} \left[\int_E \exp(i\langle y, \|t\| u\rangle) \; P(dy) \right] \mathfrak{U}_v(du) \\
&= \int_E \left[\int_{S_v} \exp(i\langle \|t\| y, u\rangle) \; \mathfrak{U}_v(du) \right] P(dy) \\
&= \int_E \varphi_{\mathfrak{U}_v}(\|t\| y) \; P(dy) \\
&= \int_E \psi_{\mathfrak{U}_v}(\|t\|^2 \; \|y\|^2) \; P(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \psi_{\mathfrak{U}_v}(\|t\|^2 \; r^2) \; P_{\| \; \|}(dr) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{\mathfrak{U}_v}(rt) \; P_{\| \; \|}(dr) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{\mathfrak{U}_{v,r}}(t) \; P_{\| \; \|}(dr) \quad .
\end{aligned}$$

D'où il vient, pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(E)$,

$$P(B) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{U}_{v,r}(B) \; P_{\| \; \|}(dr)$$

ce qui termine cette partie de la démonstration.

ii) $\Rightarrow$ i) évident d'après la propriété III.1.

IV.2. Remarque

De la proposition précédente on déduit qu'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ caractérise une loi radiale sur E comme étant la loi de son rayon.

IV.3. Corollaire

Soient P *une loi de probabilité sur* E *sans atome en* 0_E *et* v *un produit scalaire sur* E^*. *Soit* N *l'application de* $E-\{0_E\}$ *dans* E *définie par*

$$\forall x \in E-\{0_E\} \qquad N(x) = \frac{1}{\|x\|}.x \ .$$

Alors les deux conditions sont équivalentes :

i - P *est radiale de paramètre de dispersion* v.

ii - *La loi* P_N *est la loi uniforme sur la sphère* S_V *et les variables aléatoires* N *et* $\| \ \|$ *sont indépendantes.*

Démonstration

i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que P soit v-radiale. Calculons la loi P_N de N.

Soit g une transformation v^{-1}-orthogonale de E et soit f une fonction numérique positive $\mathcal{B}(E)$-mesurable. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_N}(f\circ g) &= \mathbb{E}_P(f\circ g\circ N) \\ &= \mathbb{E}_P(f\circ N\circ g) \\ &= \mathbb{E}_P(f\circ N) \\ &= \mathbb{E}_{P_N}(f) \ . \end{aligned}$$

Donc P_N est v-radiale. Or P_N est portée par S_V par conséquent $P_N = \mathcal{U}_V$.

Calculons la loi conditionnelle de N sachant $\| \ \|$ notée $P_N^{\| \ \|}$. Pour $P_{\| \ \|}$-presque tout $r \in \mathbb{R}_+$, d'après la proposition précédente IV.1.,

$$P_N^{\| \ \|=r} = (\mathcal{U}_{V,r})_N = \mathcal{U}_V = P_N \ .$$

Par conséquent N et $\| \ \|$ sont indépendantes.

<u>ii) ⇒ i)</u> Pour tout $x \in E-\{0_E\}$, on a $x = \|x\|.N(x)$. Des hypothèses de ii) on déduit facilement que la loi conditionnelle de P sachant $\| \ \| = r$ est $\mathfrak{U}_{v,r}$ et donc que P est v-radiale.

IV.4. <u>Remarque</u>

Du corollaire précédent on déduit qu'une loi v-radiale sur E est caractérisée par le couple $(N, \| \ \|)$ dès que ces deux variables sont indépendantes et que la loi de N est $\mathfrak{U}_v$.

IV.5. <u>Proposition</u>

Soient P *une probabilité sur* E *et* v *un produit scalaire sur* E^*. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i - P *est radiale de paramètre de dispersion* v.

ii - *Pour tout couple* (f,g) *de formes linéaires non nulles* v-*orthogonales sur E, la loi conditionnelle de* g *sachant* f *est symétrique sur* $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>

<u>i) ⇒ ii)</u> Soient f et g deux formes linéaires non nulles v-orthogonales sur E. Notons $H_f = (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}$ et $H_g = (\mathrm{Ker}\ g)^{\perp}$.

L'application linéaire (f,g) de E sur $\mathbb{R}^2$ est surjective. En effet, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x_\alpha \in H_f$ et $x_\beta \in H_g$ tels que $f(x_\alpha) = \alpha$ et $g(x_\beta) = \beta$. Comme $v(f,g) = 0$, on a $H_g \subset \mathrm{Ker}\ f$ et $H_f \subset \mathrm{Ker}\ g$ et donc

$$(f,g)(x_\alpha + x_\beta) = (\alpha,\beta).$$

D'après la proposition III.4., $P_{(f,g)}$ est radiale sur $\mathbb{R}^2$. Comme P_f et P_g sont elles-mêmes radiales sur $\mathbb{R}$ (i.e. symétriques), on en déduit facilement que la loi conditionnelle de g relativement à f est symétrique sur $\mathbb{R}$ puisque $|g|$ et sgn(g) sont indépendantes (cf. corollaire IV.3.).

<u>ii) ⇒ i)</u> La démonstration s'appuie sur le lemme suivant

IV.6. <u>Lemme</u>

Soient f et g deux formes linéaires sur E. Si la loi conditionnelle de g sachant f est symétrique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout couple de nombres réels (a,b) on a $\varphi_{P_{af+bg}} = \varphi_{P_{af-bg}}$.

Démonstration du lemme

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi_{P_{af+bg}}(t) = \mathbb{E}_P(e^{it(af+bg)})$$

$$= \mathbb{E}_P\big(\mathbb{E}_P(e^{it(af+bg)} \mid f)\big)$$

$$= \mathbb{E}_P\big(e^{itaf}\ \mathbb{E}_P(e^{itbg} \mid f)\big)$$

$$= \mathbb{E}_P\big(e^{itaf}\ \mathbb{E}_P(e^{-itbg} \mid f)\big)$$

$$= \varphi_{P_{af-bg}}(t)\ .$$

Démontrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ i)

Soit γ une transformation v^{-1}-orthogonale sur E. Pour tout $t\in E$, soient

$$f = \left\langle\frac{1}{2}\ (t+\gamma(t)),.\right\rangle \text{ et } g = \left\langle\frac{1}{2}\ (t-\gamma(t)),.\right\rangle.$$

On remarque que $v(f,g) = 0$, $f+g = \langle t,.\rangle$ et $f-g = \langle\gamma(t),.\rangle$.

En vertu de l'hypothèse ii) et du lemme IV.6. précédent, on a $\varphi_{P_{f+g}} = \varphi_{P_{f-g}}$ d'où $\varphi_{P_{f+g}}(1) = \varphi_{P_{f-g}}(1)$ et donc $\varphi_P(t) = \varphi_P(\gamma(t))$. Par conséquent P est radiale de paramètre de dispersion v.

IV.7. Proposition . Cas de lois à densité

Soient v *un produit scalaire sur* E^*, P *une probabilité sur* E *absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue* λ_v *sur* E.

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) P *est radiale et admet* v *pour paramètre de dispersion*

ii) P *admet une densité* f_P *de la forme*

$$\forall y\in E \qquad f_P(y) = \xi_P(\|y\|^2)$$

où ξ_P *est une application mesurable de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$.

Démonstration

Soit f_P une densité de P relativement à la mesure de Lebesgue λ_v.

i) $\Rightarrow$ ii) Soit g une transformation v^{-1}-orthogonale. Pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on a

$$\int_A f_P\ d\lambda_v = P(A)$$

$$= P(g^{-1}(A))$$

$$= \int_{g^{-1}(A)} f_P\ d\lambda_v$$

$$= \int_A f_P\circ g^{-1}\ d(\lambda_v)_g$$

$$= \int_A f_P \circ g^{-1} \, d\lambda_v \ .$$

Il en résulte que $f_P \circ g^{-1} = f_P$ λ_v-presque sûrement. D'où le résultat.

ii) ⇒ i) Soit g une transformation v^{-1}-orthogonale. Pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on a

$$\begin{aligned} P(g^{-1}(A)) &= \int_{g^{-1}(A)} f_P(x) \, d\lambda_v(x) \\ &= \int_{g^{-1}(A)} \xi_P(\|x\|^2) \, d\lambda_v(x) \\ &= \int_{g^{-1}(A)} \xi_P(\|g(x)\|^2) \, d\lambda_v(x) \\ &= \int_{g^{-1}(A)} (f_P \circ g)(x) \, d\lambda_v(x) \\ &= \int_A f_P(y) \, d(\lambda_v)_g(y) \\ &= \int_A f_P(y) \, d\lambda_v(y) \\ &= P(A) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

La proposition IV.8. suivante et le théorème fondamental IV.9. mettent en évidence une propriété particulièrement précieuse des lois radiales.

IV.8. Proposition

Soit v *un produit scalaire sur* E^* *. Soient* H *un hyperplan de* E *et* π *la projection* v^{-1}*-orthogonale sur* H.

Pour tout $r > 0$, *la loi image par* π *de la loi uniforme* $\mathcal{U}_{v,r}$ *sur la sphère* $S_{v,r}$ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue* $\lambda_{v_{(H)}}$ *sur* H.

Démonstration

On considère une probabilité P sur E, v-radiale et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_v sur E. Une telle loi existe toujours (il suffit de considérer la loi normale $\mathcal{N}_E(0_E, v)$). Alors d'après la proposition IV.7., P admet une densité f_P de la forme $f_P(x) = \xi_P(\|x\|^2)$ où ξ_P est une application mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Pour toute application numérique mesurable positive φ de H dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\int_H \varphi(y)\, d(\mathcal{U}_{v,r})_\pi(y) = \int_E (\varphi\circ\pi)(x)\ \mathcal{U}_{v,r}(dx)$$

$$= \mathbb{E}_P(\varphi\circ\pi \mid \|\ \| = r) \qquad (1)$$

en vertu de IV.1.

Mais pour toute fonction mesurable ψ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ on a

$$\mathbb{E}_{P_{\|\ \|}}[\psi . \mathbb{E}_P(\varphi\circ\pi) \mid \|\ \|]$$

$$= \int_E \psi(\|x\|)\ (\varphi\circ\pi)(x)\ dP(x)$$

$$= \int_E \psi(\|x\|)\ (\varphi\circ\pi)(x)\ \xi_P(\|x\|^2\ d\lambda_v(x)$$

$$= \int_{H\times H^\perp} \psi(\|y+z\|)\ \varphi(y)\ \xi_P(\|y+z\|^2)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\ d\lambda_{v_{(H^\perp)}}(z)$$

$$= 2\int_K \psi(r)\ \varphi(y)\ \xi_P(r^2)\ g(y,r)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\ d\lambda_{\mathbb{R}_+}(r)$$

en effectuant le changement de variable $(y,z) \rightsquigarrow (y,\|y+z\|)$ où $K = \left\{(y,r) \in H\times\mathbb{R}_+^* \ /\ \|y\| < r\right\}$; compte tenu du fait que $\dim H^\perp = 1$, le jacobien $g(y,r)$ de cette transformation vaut $r(r^2-\|y\|^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On remarque que $\lambda_{\mathbb{R}_+}$ est équivalente à $(\lambda_v)_{\|\ \|}$ et qu'une densité de $\lambda_{\mathbb{R}_+}$ relativement à $(\lambda_v)_{\|\ \|}$ est l'application

$$k : \quad r \longrightarrow \frac{\Gamma(n/2+1)}{n\ \pi^{n/2}}\ r^{1-n}$$

où n est la dimension de E.

Il vient alors

$$\mathbb{E}_{P_{\|\ \|}}[\psi . \mathbb{E}_P(\varphi\circ\pi) \mid \|\ \|]$$

$$= 2\int_K \psi(r)\ \varphi(y)\ \xi_P(r^2)\ g(y,r)\ k(r)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\ d(\lambda_v)_{\|\ \|}(r)$$

$$= 2\int_K \psi(r)\ \varphi(y)\ g(y,r)\ k(r)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\ dP_{\|\ \|}(r)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi(r)\left(2\int_{\{\|y\|<r\}} \varphi(y)\ g(y,r)\ k(r)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\right) dP_{\|\ \|}(r).$$

On en déduit que, pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{E}_P(\varphi\circ\pi \mid \|\ \| = r) = 2\int_H \varphi(y)\ g(y,r)\ k(r)\ \mathbb{1}_{\{\|y\|<r\}}(y)\ d\lambda_{v_{(H)}}(y)\ .$$

Ceci étant vrai pour toute fonction φ mesurable de H dans $\mathbb{R}_+$, en reportant l'égalité précédente dans (1), on en déduit que pour tout $r > 0$, $(\mathfrak{U}_{v,r})_\pi$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{v(H)}$ sur H, est portée par $B_{v(H),r}$ et admet pour densité relativement à $\lambda_{v(H)}$ sur cet ensemble

$$2k(r)g(.,r) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \cdot \frac{r^{2-n}}{(r^2 - \| \|^2)^{1/2}} \quad .$$

IV.9. Théorème

Soient v *un produit scalaire sur* E^* *et* P *une loi radiale sur* E *de paramètre de dispersion* v, *n'admettant pas d'atome en* 0_E .

Alors la projection v^{-1}*-orthogonale de* P *sur tout sous-espace vectoriel propre* H *de* E *est absolument continue relativement à la mesure de Lebesgue* $\lambda_{v(H)}$ *sur* H.

Démonstration

1) Supposons d'abord que dim H = (dim E)-1. Si π désigne la projection v^{-1}-orthogonale sur H, pour tout $r > 0$, $(\mathfrak{U}_{v,r})_\pi$ est absolument continue par rapport à $\lambda_{v(H)}$ et admet une densité h_r, d'après la proposition précédente.

Comme P est v-radiale, on a, d'après la proposition IV.1., pour toute fonction φ mesurable de H dans $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_\pi}(\varphi) &= \mathbb{E}_P(\varphi\circ\pi) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_E (\varphi\circ\pi)(x)\ d\mathfrak{U}_{v,r}(x)\right) dP_{\| \|}(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_H \varphi(y)\ d(\mathfrak{U}_{v,r})_\pi(y)\right) dP_{\| \|}(r) \\ &= \int_H \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} h_r(y)\ dP_{\| \|}(r)\right) d\lambda_{(H)}(y) \quad . \end{aligned}$$

Donc P_π est absolument continue par rapport à $\lambda_{v(H)}$ et admet pour densité le mélange des densités des projections des lois uniformes $y \to \int_{\mathbb{R}_+^*} h_r(y)\ dP_{\| \|}(r)$.

2) Dans le cas où H est un sous-espace vectoriel propre de E, la propriété se déduit facilement de 1) en se rappelant que la projection d'une loi radiale est encore radiale.

V - Cas de la normalité

V.1. Proposition

Soit v *un produit scalaire sur* E^*. *Soit* P *une loi radiale sur* E, *de paramètre de dispersion* v.

Si la projection v^{-1}*-orthogonale* π *de* P *sur un sous-espace vectoriel* H *de* E (dim H $\neq$ 0) *est une loi normale, alors* P *est une loi normale* $\mathcal{N}_E(0_E, \sigma^2 v)$.

Démonstration

Soit f une forme linéaire sur H de norme 1. Alors $f\circ\pi$ appartient à E^* et est de norme égale aussi à 1.

D'après la proposition I.4., pour tout $t \in E$, $\varphi_P(t) = \psi(\|t\|^2)$ où ψ est la fonction caractéristique de $P_{f\circ\pi} = (P_\pi)_f$.

Or par hypothèse P_π est normale, donc $P_{f\circ\pi} = (P_\pi)_f$ est normale et φ_P a la forme fonctionnelle de la fonction caractéristique de $\mathcal{N}_E(0_E, \sigma^2 v)$.

V.2. Proposition

Soient v *un produit scalaire sur* E^* *et* P *une loi* v*-radiale sur* E. *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base* v^{-1} *-orthonormale de* E.

Si les marges P_i *de* P *sur les sous-espaces vectoriels* E_i *engendrés par* $\{e_i \,/\, 1 \leq i \leq n\}$ *sont indépendantes, alors la loi* P *est égale à* $\mathcal{N}_E\big(0_E, \sigma^2 v\big)$.

Démonstration

Pour $t \in E$, soit $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ la suite des composantes de t dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors, d'une part,

$$\varphi_P(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{P_i}(t_i) = \prod_{i=1}^{n} \psi_P(t_i^2)$$

en vertu de l'indépendance et, d'autre part,

$$\varphi_P(t) = \psi_P\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) .$$

Ainsi la fonction continue ψ_P vérifie l'égalité $\psi_P(a+b) = \psi_P(a)\psi_P(b)$. Par conséquent ψ_P est une fonction exponentielle $\psi_P(s) = e^{\alpha s}$. De plus, comme ψ_P est bornée sur $\mathbb{R}_+$, nous avons $\alpha \leq 0$ ce qui donne le résultat cherché.

Références .

[1] ARTZNER (Ph.). Fonctions caractéristiques et mesures planes invariantes par rotation. (1970) - Séminaire de Probabilités V - Lecture Notes in mathematics 191 pp. 1-16.

[2] CAMBANIS (S.), HUANG (S.) and SIMONS (G.). On the theory of elliptically contoured distributions. (1981) - Journal of Multivariate Analysis 11, pp.368-385.

[3] CELLIER (D.), FOURDRINIER (D.) and ROBERT (C.). Controlled shrinkage estimators (a class of estimators better than the least squares estimator, with respect to a general quadratic loss, for normal observations). (1989) - Statistics 20, 1 pp. 1-10.

[4] CELLIER (D.), FOURDRINIER (D.) and ROBERT (C.). Robust shrinkage estimators of the location parameter for elliptically symmetric distributions. (1989) - Journal of Multivariate Analysis 29, pp. 39-52.

[5] CHMIELEWSKI (M.A.). Elliptically symmetric distributions : a review and bibliography. (1981) - Internat. Statist. Rev. 49, 67-74.

[6] EATON (M.L.). A characterization of spherical distributions. (1986) - Journal of Multivariate Analysis 20, pp. 272-276.

[7] KELKER (D.). Distribution theory of spherical distributions and a location scale parameter generalization. (1970) - Sankhyā A. 32 pp. 419-430.

[8] KRUSKAL (W.). The coordinate-free approach to Gauss-Markov and its application to missing and extra observations. (1961) - Proceedings Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 1, pp. 435-451.

[9] KRUSKAL (W.). When are Gauss-Markov and least squares estimators the same ? A coordinate-free approach. (1968) - Ann. Math. Statist. 39, pp. 70-75.

[10] NACHBIN (L.). The Haar Integral (1965) - D. Van Nostrand Company.

[11] PHILOCHE (J.L.). Une condition de validité pour le test F. (1977) - Statistique et Analyse des Données 1, pp. 37-60.

[12] STONE (M.). A unifed approach to coordinate-free multivariate analysis. (1977) - Ann. Inst. Statist. Math. A 29, pp. 43-57.

[13] STONE (M.). Coordinate-Free Multivariate Statistics. (1987) - Clarendon Press - Oxford.