SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-PASCAL ANSEL
CHRISTOPHE STRICKER

Quelques remarques sur un théorème de Yan

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 266-274
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__266_0>

QUELQUES REMARQUES SUR UN THEOREME DE YAN

Jean-Pascal ANSEL et Christophe STRICKER
Université de Franche-Comté
U.A. C.N.R.S. 741
25030 Besançon Cedex (France)

Introduction.

Nous commençons par améliorer légèrement un théorème de Yan [7] en l'étendant aux espaces L^p $1 \leq p < +\infty$.

Grâce à ce théorème l'un de nous [6] a démontré récemment l'équivalence entre l'existence d'une loi de martingale et l'absence de " free lunch ". Nous montrons ensuite qu'une stratégie admissible au sens de Duffie et Huang [2] pour un agent économique α_o n'est pas admissible en général pour un agent α_1 même si celui-ci est mieux informé que α_o.

Enfin nous montrons que s'il y a absence de " free lunch", une hypothèse habituelle pour les modèles économiques, cette pathologie ne se produit pas. Ceci nous conduit à une étude détaillée des diverses notions de " free lunch ".

I. Le théorème de Yan.

Dans son article " Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 " Yan [7] démontre un théorème dans L^1 que l'on peut généraliser à L^p $1 \leq p < +\infty$ de la façon suivante :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Si G est un sous-ensemble de G dans $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ on désigne par $\overline{G}$ l'adhérence de G dans L^p. B_+ désigne l'ensemble des variables aléatoires bornées positives ou nulles, et L^p_+ les v.a. de L^p positives ou nulles. q désigne l'exposant conjugué de p. On suppose que $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 1. Soit K un sous-ensemble convexe de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $0 \in K$.
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\eta \in L^p_+$, $\eta \neq 0$, il existe $c > 0$ tel que $c\eta \notin \overline{K - B_+}$.
b) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$, il existe $c > 0$ tel que $c\mathbf{1}_A \notin \overline{K - B_+}$.
c) Il existe une variable aléatoire $Z \in L^q$ telle que $Z > 0$ p.s. et
$$\sup_{\xi \in K} E[Z\xi] < +\infty.$$

<u>Démonstration</u>. Afin d'éviter au lecteur de se reporter au séminaire XIV, nous reproduisons en détail la démonstration de Yan avec les modifications nécessaires dans le cas général.

• <u>Il est clair que a) => b).</u>

• <u>Montrons que b) => c).</u>

Supposons que la condition b) soit vérifiée. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. Par hypothèse il existe un réel $c > 0$ tel que $c\mathbf{1}_A \notin \overline{K - B_+}$.
Comme le dual de L^p est L^q et que $K - B_+$ est convexe, on utilise le théorème de Hahn-Banach pour déduire l'existence d'une variable aléatoire $Y \in L^q$ telle que

$$\sup_{\xi \in K,\ \eta \in B_+} E[Y(\xi - \eta)] < cE[Y\mathbf{1}_A] \tag{1}$$

Remplaçant η par $a\eta$ avec $\xi = 0$ et $\eta = 1_{\{Y < 0\}}$ on a

$$E[Y\mathbf{1}_{\{Y < 0\}}] < \frac{cE[Y\mathbf{1}_A]}{a}.$$

On fait tendre a vers $+\infty$, $E[Y\mathbf{1}_{\{Y < 0\}}] \geq 0$ donc $Y \geq 0$ p.s.

Avec $\eta = 0$ on trouve $\sup_{\xi \in K} E[Y\xi] \leq cE[Y\mathbf{1}_A] < +\infty$.

Soit $H = \left\{X \in L^q_+ / \sup_{\xi \in K} E[X\xi] < +\infty\right\}$. L'ensemble H est non vide car il contient 0 par hypothèse.

Notons $\mathcal{C} = \{\{Z = 0\},\ Z \in H\}$ et montrons que $\mathcal{C}$ est stable par intersection dénombrable.

Soit (Z_n) une suite d'éléments de H. Notons $c_n = \sup_{\xi \in K} E[Z_n\xi]$, $d_n = \|Z_n\|_{L^q}$ et posons $Z = \sum_n b_n Z_n$, où les b_n sont tels que $\sum_n b_n c_n < +\infty$ et $\sum_n b_n d_n < +\infty$.

Vérifions que Z appartient à H :

$$\sup_{\xi \in H} E[Z\xi] \leq \sum_n b_n \sup_{\xi \in K} E[Z_n\xi] = \sum_n b_n c_n < +\infty$$

et $Z \in B_+$ puisque $Z \geq 0$ p.s. et $\|Z\|_{L^q} \leq \sum_n b_n d_n < \infty$ et on a $\{Z = 0\} = \bigcap_n \{Z_n = 0\}$.

Il existe donc $Z \in H$ tel que $P(Z = 0) = \inf_{c \in \mathcal{C}} P(c)$.

Nous allons montrer que $Z > 0$ p.s.

Supposons que $P(Z = 0) > 0$. Soit $Y \in H$ vérifiant (1) avec $A = \{Z = 0\}$.

Comme $0 \in K$, on a $0 < E[Y\mathbf{1}_A] = E[Y\mathbf{1}_{\{Z = 0\}}]$ et la variable aléatoire $Y + Z \in H$

avec

$$P(Y + Z = 0) = P(Z = 0) - P(Z = 0,\ Y > 0) < P(Z = 0)$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $P(Z = 0)$ est minimale. Donc $Z > 0$ p.s. et on a démontré b) => a).

• Reste à montrer que c) => a).

Supposons a) non satisfaite.

Il existe alors $\eta \in L^p_+$, $\eta \neq 0$ / $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on ait $n\eta \in \overline{K - B_+}$, de sorte qu'il existe $\xi_n \in K$, $\zeta_n \in B_+$ et $\delta_n \in L^p$ tels que $n\eta = \xi_n - \zeta_n - \delta_n$, $\|\delta_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{n}$.

Si Z est une v.a. de L^q_+ telle que $Z > 0$ p.s. on a alors

$$E[Z\xi_n] = nE[Z\eta] + E[Z\zeta_n] + E[Z\delta_n] \geq nE[Z\eta] - \|Z\|_{L^q}/n$$

et $\sup\limits_{\xi \in K} E[Z\xi] = +\infty$ et la condition c) n'est pas satisfaite.

II. Applications à l'arbitrage.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles et (X_t) un processus càdlàg, adapté et tel que $X_t \in L^p$ pour tout t. Le théorème 1 a permis à l'un de nous [6] de donner des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'une loi Q équivalente à la loi initiale P, telle que (X_t) soit une martingale sous Q.

Pour cela on pose

$$K = \{(H.X)_1,\ H \text{ prévisible, élémentaire et borné}\}$$

et on obtient dans [6] le

Théorème 2. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une loi Q équivalente à P de densité $\frac{dQ}{dP} \in L^q$ telle que (X,Q) soit une martingale.

ii) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$, on a $\mathbf{1}_A \notin \overline{K - B_+}$.

iii) $L^p_+ \cap \overline{K - B_+} = \{0\}$.

Une condition voisine de la condition iii) a été étudiée par divers auteurs en mathématiques financières : c'est l'absence de " free lunch " (voir Kreps [5]).

En particulier Duffie et Huang [2] ont montré que iii) implique i) sous l'hypothèse supplémentaire que $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est séparable.

Le théorème 2 va nous permettre de rectifier une erreur qui s'est glissée dans le théorème 4.1 de [2] et qui provient en réalité du théorème inexact 9.26 de [3].

Fixons d'abord quelques notations :

• Un agent α est caractérisé par une filtration $F^\alpha = (F_t^\alpha)_{0 \leq t \leq 1}$ relative à ses informations sur le marché à l'instant t avec $F_t^\alpha \subset F_t$ pour tout t.

• Un système de prix est un vecteur N-dimensionnel S de semimartingales positives ou nulles par rapport à (F_t) vérifiant :

$$\forall\ n = 1,2,\ldots,N \quad S_n(t) < 1 \text{ p.s. et } E[[S_n,S_n]^{\frac{1}{2}}] < +\infty$$

$$\forall\ t \in [0,1] \quad \sum_{n=1}^{N} S_n(t) = 1 \text{ p.s.}$$

• Si F^S est la filtration naturelle de S on note $H^\alpha(S) = F^\alpha \vee F^S$.
On note X^TY le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ et l'intégrale stochastique de θ par rapport à S est écrite indifféremment $\int_0^t \theta(s)^T dS(s)$ ou $(\theta.S)_t$.

• Soit $P_\alpha(S)$ la tribu prévisible de sous ensembles de $\Omega \times [0,1]$, engendrée par les processus $H^\alpha(S)$ adaptés continus à gauche. On dira qu'un processus Y est $H^\alpha(S)$-prévisible s'il est mesurable par rapport à $P_\alpha(S)$.

• Une stratégie admissible pour un agent α est un vecteur N-dimensionnel θ de processus $H^\alpha(S)$-prévisible vérifiant :
- L'intégrale $(\theta.S)$ est bien définie relativement à $H^\alpha(S)$.
- La stratégie θ est autofinancée :

$$\theta(t)^T S(t) = \theta(0)^T S(0) + \int_0^t \theta(s)^T dS(s) \qquad \forall\ t \in [0,1] \quad \text{p.s.}$$

- $\forall\ n = 1,2,\ldots,N \quad \theta(1)^T S(1) \in L^1$ et $E[\int_0^1 \theta_n(t)^2\, d[S_n,S_n]_t]^{\frac{1}{2}} < \infty$ (2)

Cette condition technique trouve sa justification dans la nécessité d'éviter les " free lunches ". Nous y reviendrons à la fin de notre article.

• On note $\Theta^\alpha[S]$ l'espace des stratégies admissibles pour l'agent α dans le système de prix S et $M_\alpha = \{\theta(1)^T S(1),\ \theta \in \Theta^\alpha[S]\}$.

• On dit qu'il y a " free lunch " pour l'agent α s'il existe une suite (θ^n, v_n) de $\Theta^\alpha[S] \times L^1$ et une v.a. k de $L_+^1 \setminus \{0\}$ telles que $\theta^n(1)^T S(1) - v^n \in L_+^1$ pour tout n, v^n converge vers k dans L^1 et $\lim_n (\theta^n(0)^T S(0)) \leq 0$ (voir Kreps [5], Duffie et Huang [2]).

Le théorème noté 4.1 de [2] dit que si l'agent α_1 est mieux informé que l'agent α_o

$\left((\text{i.e.})\ F^{\alpha_o} \subset F^{\alpha_1}\right)$ alors $\Theta^{\alpha_o}[S] \subset \Theta^{\alpha_1}[S]$. En général cette inclusion est inexacte. Voici un contre exemple.

Construction du contre exemple. Nous allons nous inspirer d'un travail de Jeulin et Yor [4]. Soient B un mouvement brownien standard et $(F_t)_{0 \leq t \leq 1}$ sa filtration naturelle. On désigne par X_t la martingale $\exp[B_t - \frac{1}{2}t]$ et on pose

$T = \inf\{t \in [0,1] \;/\; X_t \geq 2\}$ en convenant que $T = 1$ si $\{t \in [0,1] \;/\; X_t \geq 2\} = \phi$.

Puisque X^T est une martingale, $E[X_1^T] = E[X_o^T] = 1$, et comme $X_1^T = 2$ sur $\{T < 1\}$, il en résulte que $P[T = 1] > 0$.

Soit S le processus (S^1,S^2) : $S_t^1 = \frac{1}{3} X_{T \wedge t}$ et $S^2 = 1 - S^1$.

Vérifions que S est un système de prix. On a

$$0 \leq S^n(t) < 1 \text{ p.s. et } \sum_{i=1} S^i(t) = 1$$

$$d[S^1,S^1]_t = e^{2B_t - t}\, \mathbf{1}_{[0,T]}\, dt$$

$$\text{et } E\Big[\Big(\int_0^T e^{2B_s - s}\, ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \leq \Big(E\Big[\int_0^T e^{2B_s - s}\, ds\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_0^1 e^s\, ds\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

donc $E\big[[S^1,S^1]_1^{\frac{1}{2}}\big] < +\infty$. Il en est de même pour S^2.

Soit maintenant $\tilde{F} = (\tilde{F}_t)_{0 \leq t \leq 1} = (F_t \vee \sigma(B_1))_{0 \leq t \leq 1}$.

D'après Jeulin-Yor [4] il existe un $\tilde{F}$ mouvement brownien (β_t) tel que

$B_t = \beta_t + \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\, ds$. Comme $X_t = 1 + \int_0^t X_s\, dB_s$, la décomposition canonique de

X_t dans la filtration $\tilde{F}$ est :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s\, d\beta_s + \int_0^t X_s \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\, ds$$

car X est localement borné. Notons Y_t la $\tilde{F}$ martingale $1 + \int_0^t X_s\, d\beta_s$ et Z_t le processus à variation finie $\int_0^t X_s \frac{B_1 - B_s}{1 - s}\, ds$.

S est donc une semimartingale relativement à F et à $\tilde{F}$. Soient α_o l'agent associé à F

et α_1 l'agent associé à $\tilde{F}$. Montrons qu'il existe une stratégie admissible pour α_o mais pas pour α_1.

Posons $\theta^2 = 0$ et $\theta^1(s) = (1 - s)^{-\frac{1}{2}} (-\mathrm{Log}(1 - s))^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{ \frac{1}{2} < s < 1 \}}$

avec $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$.

Comme $\theta^1 \in L^2([0,1])$ et que le crochet droit est indépendant de la filtration, le seul point à montrer est que $\int \theta^{1T} dS^1$ existe relativement à F mais pas relativement à $\tilde{F}$. Relativement à F, S^1 est une martingale de carré intégrable donc l'intégrale considérée existe. Relativement à $\tilde{F}$ comme S^1 est continu, d'après un théorème de Jeulin (voir [1]) θ^1 est intégrable par rapport à S^1 si et seulement si θ^1 est intégrable par rapport à la martingale Y_t, et par rapport au processus Z_t au sens de Stieljes. Dans ce dernier cas cela veut dire que

$$\int_0^T |X_s \theta_s^1 \frac{B_1 - B_s}{1 - s}| \, ds < +\infty$$

ou encore comme X_s est strictement positif

$$\int_0^T |\theta_s^1 \frac{B_1 - B_s}{1 - s}| \, ds < +\infty.$$

D'après la proposition 4 de Jeulin-Yor [4] cela équivaut à $\displaystyle\int_0^T \frac{|\theta_s^1|}{\sqrt{1 - s}} ds < +\infty$.

Or nous avons justement choisi θ_s^1 de telle sorte que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\theta_s^1|}{\sqrt{1 - s}} ds = +\infty$.

Comme on a remarqué que $P[T = 1] > 0$, θ^1 n'est pas intégrable par rapport à Z_t donc par rapport à S^1. Ainsi la stratégie θ est admissible pour l'agent α_o mais pas pour l'agent α_1.

Toutefois la pathologie précédente disparait si on impose à notre modèle l'absence de " free lunch ". Dans un premier temps nous allons étudier le lien entre l'absence de " free lunch " et la condition iii) du théorème 2. Nous reprenons les notations du théorème 2 et nous posons

$K^\alpha = \{(H.S)_1$, H étant $H^\alpha[S]$ prévisible, élémentaire et borné$\}$.

<u>Lemme</u>. S'il y a absence de " free lunch " pour l'agent α, alors

$L_+^1 \cap \overline{K^\alpha - B_+} = \{0\}$.

Démonstration. On vérifie facilement que $\Theta^{\alpha}[S]$ est un espace vectoriel. Duffie et Huang [2] ont montré que l'ensemble $\{(\theta.S)_1,\ \theta \in \Theta^{\alpha}$ et $\theta(0) = 0\}$ contenait en particulier les variables $\mathbb{1}_B(S_i(t_2) - S_i(t_1))$ pour tout i, tout $B \in H^{\alpha}_{t_1}[S]$ et $1 \geq t_2 \geq t_1 \geq 0$. Ainsi $K^{\alpha} \subset \{(\theta.S)_1,\ \theta \in \Theta^{\alpha}$ et $\theta(0) = 0\}$. Lorsque $\theta \in \Theta^{\alpha}$ et $\theta(0)= 0$, on a $(\theta.S)_1 = \theta(1)^T S(1)$. Il en résulte immédiatement que l'absence de " free lunch " pour l'agent α entraîne $L^1_+ \cap \overline{K^{\alpha} - B_+} = \{0\}$.

Théorème 3. Supposons l'agent α_1 mieux informé que l'agent α_o, c'est-à-dire $F^{\alpha_o} \subset F^{\alpha_1}$. Si $L^1_+ \cap \overline{K^{\alpha_1} - B_+} = \{0\}$, toute stratégie admissible pour α_o est admissible pour α_1.

Démonstration. Soit $\theta \in \Theta^{\alpha_o}[S]$. Comme la condition iii) du théorème 2 est vérifiée pour p = 1, il existe une loi Q équivalente à P, de densité bornée, sous laquelle S est une martingale par rapport à la filtration $H^{\alpha_1}[S]$.

Par définition de $\Theta^{\alpha_o}[S]$, on a $E^P[\int_0^1 \theta_n(s)^2\ d[S_n,S_n]_s]^{\frac{1}{2}} < +\infty$ pour tout n, si bien que $E^Q[\int_0^1 \theta_n^2(s)\ d[S_n,S_n]]^{\frac{1}{2}} < +\infty$ pour tout n. Donc θ est intégrable par rapport à la Q-martingale S relativement à la filtration $H^{\alpha_1}[S]$. Comme P et Q sont équivalentes, θ est encore intégrable relativement à $H^{\alpha_1}[S]$ sous P (voir [8] par exemple) et finalement $\theta \in \Theta^{\alpha_1}[S]$.

Grâce au théorème 2 et au lemme précédent nous venons de montrer en particulier que l'absence de " free lunch " entraîne l'existence d'une loi Q équivalente à P, de densité bornée, telle que S doit une martingale sous Q. Voici la réciproque.

Proposition. S'il existe une loi Q équivalente à P, de densité bornée telle que S soit une martingale relativement à $H^{\alpha}[S]$ sous Q, alors il y a absence de " free lunch " pour l'agent α.

Démonstration. Soit θ une stratégie admissible pour l'agent α.

Comme $E^P[\left(\int_0^1 \theta_n^2(t)\ d[S_n,S_n]_t\right)^{\frac{1}{2}}] < +\infty$ pour tout n, on a aussi

$E^Q[\left(\int_0^1 \theta_n^2(t)\, d[S_n,S_n]_t\right)^{\frac{1}{2}}] < +\infty$, si bien que $\theta.S$ est une martingale sous Q.

Supposons maintenant qu'il y a un " free lunch " pour l'agent α : il existe une suite (θ^n, v^n) de $\Theta^\alpha[S] \times L^1$ et une v.a. k de $L^1_+ \setminus \{0\}$ telles que $\theta^n(1)^T S(1) - v^n \in L^1_+$ pour tout n, v^n converge vers k dans L^1 et $\lim_n(\theta^n(0)^T S(0)) \leq 0$.

Comme $\theta.S$ est une martingale, on en déduit que $\theta^n(0)^T S(0) \geq E[v^n|H_o^\alpha]$ qui converge dans L^1 vers $E[k|H_o^\alpha]$. Mais cette dernière v.a. est strictement positive, ce qui est en contradiction avec $\lim_n(\theta^n(0)^T S(0)) \leq 0$. Donc il n'y a pas de " free lunch " pour l'agent α.

Remarques. i) Duffie et Huang [2] ont imposé la condition $\underline{\lim}_n(\theta^n(0)^T S(0)) \leq 0$. Dans ce cas la proposition ci-dessus n'est plus correcte si H_o^α n'est pas la tribu triviale. En effet si la tribu H_o^α est assez riche on peut construire une suite de v.a. $v_n \in L^1(\Omega, H_o^\alpha, P)$ telle que v_n converge vers 1 dans L^1 tout en vérifiant $\underline{\lim}_n v_n \leq 0$. On prend alors $\theta_i^n(t) = v_n$ pour $i= 1,\dots,N$ et $t \in [0,1]$. En vertu de l'hypothèse de normalisation sur les prix $S_1 + \dots + S_n = 1$, les stratégies θ^n sont admissibles et on obtient un " free lunch " au sens de Duffie et Huang. Toutefois lorsque la tribu H_o^α est triviale, on voit aisément que notre définition de " free lunch " et celle de Duffie et Huang sont équivalentes.

ii) Il semble judicieux de modifier la définition des stratégies admissibles lorsqu'on a la propriété de représentation prévisible. En effet supposons qu'il y ait absence de " free lunch ". D'après le théorème 2 il existe une loi Q équivalente à P, de densité bornée telle que le système de prix $S = (S^n)$ soit une martingale sous Q. On sait (voir [3]) que Q est unique si et seulement si toute martingale est une intégrale stochastique par rapport à S. Dans ce cas, afin d'avoir un marché complet (c'est-à-dire toute martingale appartenant à $H^1(Q)$ est l'intégrale stochastique d'une stratégie admissible par rapport à S) il est indispensable de modifier la définition des stratégies admissibles en considérant des processus vectoriels prévisibles globalement intégrables par rapport à la semimartingale vectorielle S (voir [3]). Soit V un processus croissant positif càdlàg, adapté et intégrable tel que pour tout i $[S^i,S^i]$ soit absolument continu par rapport à V. Il existe alors un processus optionnel (c^{ij}) à valeurs dans l'espace des matrices symétriques positives tel que $d[S^i,S^j] = c^{ij}\, dV$. On vérifie facilement que la définition suivante ne dépend pas de V. Nous dirons qu'un vecteur N-dimensionnel θ est une stratégie admissible pour l'agent α si θ vérifie les conditions : θ est H^α prévisible, $\theta.S$ existe par rapport à $H^\alpha(S)$, θ est autofinancée et

$$E[\int_0^1 \left(\sum_{i,j} \theta^i\, c^{ij}\, \theta^j\right) dV]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Grâce à cette définition plus large des stratégies admissibles le marché est complet pour l'agent α si et seulement s'il y a absence de " free lunch " pour α et si la loi $\dot{Q}$ est unique.

REFERENCES

[1] CHOU (C.S.), MEYER (P.A.), STRICKER (C.). Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés. Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes in Maths. 784, 128-139. Springer. 1980.

[2] DUFFIE (D.), HUANG (C.F.). Multiperiod security markets with differential information. J. of Mathematical Economics 15, 283-303 (1986).

[3] JACOD (J.). Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Maths. 714. Springer 1979.

[4] JEULIN (T.), YOR (M.). Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux amis. Séminaire de Probabilités XIII, Lect. Notes in Maths. 721, 332-359. Springer. 1979.

[5] KREPS (D.). Arbitrage and equilibrium in economics with infinitely many commodities. J. of Mathematical Economics 8, 15-35, (1981).

[6] STRICKER (C.). Arbitrage et lois de martingale. A paraître.

[7] YAN (J.A.). Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1. Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes in Maths. 784, 220-222. Springer. 1980.

[8] YAN (J.A.). Remarques sur l'i.s. de processus non bornés. Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes in Maths. 784, 148-151. Springer. 1980.