Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jacques Azéma
Marc Yor

Dérivation par rapport au processus de Bessel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 210-226
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__210_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DERIVATION PAR RAPPORT AU PROCESSUS DE BESSEL

J. AZEMA et M. YOR

Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 -

4, place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05

Introduction.

Dans ce travail, nous construisons, à l'aide du processus de Bessel $(V_t, t \geq 0)$ de dimension 3, issu de 0, des martingales locales continues $(N_t, t > 0)$ indexées par $]0,\infty[$.

Or, M. Sharpe [7] a décrit les différents comportements asymptotiques possibles, lorsque $t \downarrow\downarrow 0$. Indépendamment, Barlow et Perkins [2] ont étudié sous quelles conditions sur un processus prévisible continu $(K_t, t \geq 0)$ tel que $K_0 > 0$, l'intégrale stochastique $(\int_0^t K_s dV_s, t > 0)$ reste positive dans un voisinage de 0.

Nous nous appuyons alors sur les résultats de [2] pour donner des critères assurant lequel des comportements asymptotiques décrits par Sharpe est satisfait pour certaines de nos martingales locales N.

Finalement, nous indiquons comment nous sommes parvenus à ces problèmes de dérivation, en relation avec certaines extensions du théorème de Girsanov [1] liées aux grossissements de filtration avec une fin d'ensemble prévisible. Ces grossissements de filtration jouent d'ailleurs un rôle essentiel dans l'article de Barlow-Perkins [2] et son compagnon [9] dans ce volume.

1. Quelques exemples de martingales locales indexées par $]0,\infty[$.

J. Walsh [8] a obtenu une description complète des différents comportements asymptotiques, lorsque $t \downarrow\downarrow 0$, des martingales locales continues conformes indexées par $]0,\infty[$. La description de Walsh est l'analogue, pour ces processus, du théorème de Weierstraß pour les fonctions holomorphes.

L'aspect réel de ces résultats, c'est-à-dire relatif aux martingales locales continues $(N_t, t > 0)$ indexées par $]0,\infty[$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, a ensuite été dégagé par M. Sharpe [7] ; voici le premier résultat important de l'article [7].

Théorème 1 : *Soit* $(N_t, t > 0)$ *une* $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ *martingale locale continue.*

Alors, pour presque tout ω, *l'une des quatre possibilités suivantes a lieu :*

(i) $\lim\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t(\omega)$ *existe dans* $\mathbb{R}$;

(ii)$_+$ $\lim\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t(\omega) = +\infty$; *(ii)*$_-$ $\lim\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t(\omega) = -\infty$;

(iii) $\liminf\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t(\omega) = -\infty$ *et* $\limsup\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t(\omega) = +\infty$.

Dans la suite, lorsque la propriété (iii) a lieu, nous dirons simplement que $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ oscille fortement.

Les démonstrations de Sharpe ont été reprises et simplifiées par Calais et Génin [3], qui ont également donné diverses représentations de ces martingales locales continues indexées par $]0,\infty[$ selon le comportement asymptotique en 0 de N, tel qu'il est décrit dans le Théorème 1 ; ces représentations sont analogues à la représentation de Dubins - Schwarz [4] des martingales locales continues comme mouvements browniens changés de temps.

Les exemples de martingales locales continues que nous avons en vue seront définis à l'aide d'un processus de Bessel de dimension 3, $(V_t, t \ge 0)$, issu de 0. Dans ce but, nous supposons qu'il existe un $((\mathcal{F}_t), P)$ mouvement brownien réel $(\beta_t, t \ge 0)$ issu de 0, et $(V_t, t \ge 0)$ désigne l'unique solution $(\mathcal{F}_t)$ adaptée, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de l'équation :

$$V_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{V_s}. \tag{1.a}$$

On a alors la

Proposition 2 : *Pour toute constante* c, *et tout processus* $(\mathcal{F}_t)$ *prévisible* $(K_t, t \ge 0)$ *localement borné, le processus :*

$$\frac{1}{V_t}\left(c + \int_0^t K_s dV_s\right), \quad t > 0,$$

est une martingale locale indexée par $]0,\infty[$.

Démonstration : Notons $Y_t = c + \int_0^t K_s dV_s$, et appliquons la formule d'Itô.

Il vient, à l'aide de *(1.a)* :

$$\frac{Y_t}{V_t} = \frac{Y_\varepsilon}{V_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{1}{V_s}\, dY_s + \int_\varepsilon^t Y_s d(\frac{1}{V_s}) - \int_\varepsilon^t \frac{1}{V_s^2}\, d\langle Y,V\rangle_s$$

$$= \frac{Y_\varepsilon}{V_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{K_s}{V_s}\, d\beta_s + \int_\varepsilon^t Y_s\, d(\frac{1}{V_s})$$

$$(1.b) \qquad = \frac{Y_\varepsilon}{V_\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{d\beta_s}{V_s}\left(K_s - \frac{Y_s}{V_s}\right),$$

d'où le résultat. □

Le reste de l'article est consacré, c constante réelle, et K processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible localement borné étant donnés, à déterminer laquelle des propriétés (i), $(ii)_+$, $(ii)_-$ ou (iii) est satisfaite.

Remarquons d'ailleurs que, d'après la loi 0-1 de Blumenthal, si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de V, laquelle est identique à celle de β, alors, c et K étant donnés, une et une seule de ces propriétés est satisfaite sur un ensemble de probabilité égale à 1.

De toutes façons, dans le cas où $(\mathcal{F}_t)$ ne serait pas la filtration naturelle de V, on peut toujours, comme le font Calais-Génin [3], restreindre l'espace de probabilité à l'un ou l'autre des ensembles sur lesquels une des propriétés (i), $(ii)_+$, $(ii)_-$ ou (iii) est satisfaite, chacun de ces ensembles étant $\mathcal{F}_{0+}$ mesurable.

Il est immédiat que, lorsque $K = 0$, $(ii)_+$, resp : $(ii)_-$, est satisfaite selon que $c > 0$, ou $c < 0$. Dans la suite, pour simplifier l'exposition, nous supposerons : $c = 0$.

Nous noterons toujours : $Y_t = \int_0^t K_s dV_s$, et $N_t = \frac{Y_t}{V_t}$ $(t > 0)$.

Ces notations sont celles utilisées par Barlow et Perkins [2], dont nous reprenons, de façon essentielle, certains des résultats dans la suite de ce travail.

2. La propriété (ii) n'est jamais satisfaite.

Ce résultat découlera simplement de la

Proposition 3 : *On suppose ici* K *borné. On note :* $N_t = \frac{Y_t}{V_t} = \frac{1}{V_t}\int_0^t K_s dV_s$ $(t > 0)$. *Alors, pour tout* $r < 3$, *la famille* $(N_t, t > 0)$ *est bornée dans* L^r. *En conséquence, elle est uniformément intégrable.*

Nota Bene : Attention ! Nous n'affirmons pas ici, et cela est faux en général, que, sous l'hypothèse : K borné, $(N_t, t \geq \varepsilon)$ est une martingale, pour $\varepsilon > 0$. On retrouve ici la même situation que pour $\left(\frac{1}{V_t}, t \geq \varepsilon\right)$ qui est une martingale locale bornée dans L^r $(r < 3)$, mais n'est pas une martingale $\left(\text{Démonstration : } E\left(\frac{1}{V_t}\right) = \frac{c}{\sqrt{t}} \text{ n'est pas une fonction constante}\right)$.

Une étude (partielle) de la propriété de martingale pour $(N_t, t \geq \varepsilon)$ est faite dans le paragraphe 5 ci-dessous. □

Démonstration de la Proposition 3 : Soient $p \in]1,\infty[$, et q tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On a alors :

$$E(|N_t|^r) \leq \left(E\left(\frac{1}{V_t^{pr}}\right)\right)^{1/p} \left(E\left(\left|\int_0^t K_s dV_s\right|^{qr}\right)\right)^{1/q}.$$

Or, on a : $E\left(\frac{1}{V_1^{\alpha}}\right) < \infty$ si, et seulement si : $\alpha < 3$.

A l'aide de la propriété de scaling, on a donc en choisissant p tel que $pr < 3$:

$$E(|N_t|^r) \leq \frac{C}{t^{r/2}} E\left[\left|\int_0^t K_s dV_s\right|^{rq}\right]^{1/q},$$

où C désigne une constante universelle qui varie de ligne en ligne par la suite.

D'après les inégalités de B.D.G, et *(1.a)*; on a, en posant $k = \|K\|_\infty$:

$$E(|N_t|^r) \le \frac{C}{t^{r/2}} \left\{ E\left[\left(\int_0^t K_s^2 ds\right)^{\frac{rq}{2}}\right]^{1/q} + E\left[\left(\int_0^t \frac{ds}{V_s} |K_s|\right)^{rq}\right]^{1/q} \right\}$$

$$\le \frac{C\,k^r}{t^{r/2}} \left\{ t^{r/2} + E\left[\left(\int_0^t \frac{ds}{V_s}\right)^{rq}\right]^{1/q} \right\}$$

$$\le C\,k^r. \tag{2.a}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, on a utilisé à nouveau *(1.a)* pour majorer

$E\left[\left(\int_0^t \frac{ds}{V_s}\right)^{rq}\right]^{1/q}$ par $C\,t^{r/2}$. □

Corollaire 4 : *Si* K *est un processus prévisible localement borné, la propriété* $(ii)_\pm$ *n'a pas lieu.*

Démonstration : On se ramène immédiatement au cas où K est borné. D'après le lemme de Fatou, si la propriété $(ii)_\pm$ avait lieu, on aurait : $\lim\limits_{t \downarrow\downarrow 0} E(|N_t|) = \infty$, ce qui est contradictoire avec le résultat de la

Proposition 3. □

Nous énonçons maintenant un résultat de convergence dans L^r, pour $r < 3$, ainsi que quelques conséquences qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 5 : *1) Si* K *est un processus prévisible borné tel que :*

$$|K_t - K_0| \le k(t) \qquad (t \le 1), \tag{2.b}$$

avec k *fonction croissante telle que :* $k(0+) = 0$, *on a, pour tout* $r < 3$:

$$E[|N_t - K_0|^r] \xrightarrow[t\downarrow\downarrow 0]{} 0.$$

2) Si K *satisfait (2.b), et si l'on a :*

(2.c)$_-$ $\liminf\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t < K_0$, *ou :* *(2.c)*$_+$ $\limsup\limits_{t \downarrow\downarrow 0} N_t > K_0$,

alors, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ *oscille fortement.*

3) Inversement, si K *satisfait (2.b), ainsi que :*

(2.d)₋ $\liminf_{t \downarrow\downarrow 0} N_t > -\infty$ *ou* *(2.d)₊* $\limsup_{t \downarrow\downarrow 0} N_t < +\infty$,

alors, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ *converge* P-p.s. *vers* K_0.

Démonstration : 1) D'après l'inégalité *(2.a)*, on a :

$$E\left(|N_t - K_0|^r\right) \le C(k(t))^r,$$

ce qui implique la première assertion.

2) D'après la première partie de la Proposition, il existe une suite $t_n \downarrow\downarrow 0$ telle que (N_{t_n}) converge p.s. vers K_0.

Néanmoins, si la condition $(2.c)_+$ ou $(2.c)_-$ est satisfaite, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ ne converge pas. D'après le Théorème 1 et le Corollaire 4, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ oscille donc fortement.

3) Un argument tout à fait semblable au précédent montre la troisième assertion. □

3. Conditions suffisantes pour que la propriété (i) soit satisfaite.

Rappelons tout d'abord la

Définition : *Une fonction* $\rho : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$, *continue, croissante au sens large satisfait la condition de Dini si :*

$$\text{(3.a)} \qquad \int_{0+} du \, \frac{\rho(u)}{u} < \infty.$$

Nous faisons maintenant quelques commentaires généraux sur le travail de Barlow et Perkins [2]. D'après l'introduction de [2], la question qui est à l'origine de ce travail est la suivante : le processus de Bessel $(V_t, t > 0)$ s'échappe rapidement de 0 ; en fait, d'après Dvoretzky - Erdös [5], pour toute fonction ρ qui satisfait la condition de Dini *(3.a)*, on a :

$$\text{(3.b)} \qquad V_t \ge t^{1/2} \rho(t), \text{ pour } t \text{ suffisamment petit.}$$

Barlow et Perkins se sont alors demandés si, (K_t) étant un processus prévisible qui converge P-p.s. vers $K_0 > 0$, lorsque $t \downarrow\downarrow 0$, la propriété *(3.b)* pourrait avoir pour conséquence que

$$Y_t = \int_0^t K_s dV_s \quad \text{soit strictement positif dans un voisinage de } 0.$$

En fait, ils ont montré que la réponse à cette question est positive si $(K_t - K_0)$ satisfait une condition de continuité de Dini au voisinage de 0, et peut être négative sinon (voir respectivement le Théorème 3.4 et la Proposition 3.8 de [2]).

Nous allons maintenant appliquer ces résultats de Barlow - Perkins [2] pour établir, à l'aide de la Proposition 5, des critères assurant que $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ converge P-p.s. ou oscille fortement.

Théorème 6 : *Soit* (K_t) *un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *prévisible, localement borné, tel qu'il existe une fonction* ρ, *satisfaisant la condition de Dini (3.a), pour laquelle :*

$$(3.b) \qquad \limsup_{t \downarrow\downarrow 0} \frac{|K_t - K_0|}{\rho(t)} < \infty.$$

Alors, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ *converge* P-*p.s. vers* K_0.

Démonstration : 1) Par un argument de localisation, on se ramène aisément à la situation où K est borné, et satisfait : $|K_t - K_0| \le C\,\rho(t)$, pour une constante C. De plus, quitte à ajouter à K une constante suffisamment grande, on peut supposer $K_0 \ge 1$.

2) Ces réductions étant faites, on a, d'après le Théorème 3.4 de [2], $\liminf_{t \downarrow\downarrow 0} N_t \ge 0$, et donc, avec les notations de la Proposition 5 ci-dessus, la condition *(2.d)*$_-$ est satisfaite ; en conséquence, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ converge P-p.s. vers K_0. $\square$

On peut également donner une démonstration du Théorème 6 qui n'utilise pas la Proposition 5, en modifiant légèrement la démonstration du Théorème 3.4 de [2] : considérons les processus $M_t = \inf_{s \ge t} V_s$ et $W_t = 2M_t - V_t$.

Posons $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, M_t)$. Alors, d'après le théorème de Pitman [6] sur la représentation du processus de Bessel de dimension 3, (W_t) est un $(\mathcal{G}_t)$ mouvement brownien.

D'autre part, on a :

$$N_t = \frac{Y_t}{V_t} = K_0 + \frac{1}{V_t}\int_0^t (K_s - K_0)dV_s$$

$$= K_0 + \frac{2}{V_t}\int_0^t (K_s-K_0)dM_s - \frac{1}{V_t}\int_0^t (K_s-K_0)dW_s ,$$

d'où : $$|N_t - K_0| \le \frac{2}{M_t}\int_0^t |K_s-K_0|dM_s + \frac{1}{M_t}\left|\int_0^t (K_s-K_0)dW_s\right| .$$

Il est immédiat que le premier terme du membre de droite converge p.s. vers 0 ; la convergence vers 0 du second terme est l'objet de la Proposition 3.3 de [2].

En nous appuyant maintenant conjointement sur les Théorèmes 1 et 6, nous pouvons démontrer le

Théorème 7 : *Si* (K_t) *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *semimartingale continue de la forme :*

$$K_t = K_0 + \int_0^t \varphi_s d\beta_s + A_t ,$$

où (φ_t) *est un processus prévisible localement borné, et* A *un processus continu à variation bornée, nul en* 0, *alors :*

$$(N_t, t \downarrow\downarrow 0) \textit{ converge } P\text{-}p.s. \textit{ vers } K_0 .$$

Démonstration : 1) On se ramène immédiatement au cas où $K_0 = 0$; il suffit ensuite de traiter séparément les cas où $K_t = \int_0^t \varphi_s d\beta_s$, et $K_t = A_t$; dans le premier cas, on peut supposer, par localisation, que φ est borné, et, dans le second cas, on peut supposer que A est croissant.

2) Considérons donc $K_t = \int_0^t \varphi_s d\beta_s$, avec φ borné.

D'après Dubins-Schwarz [4], $(K_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien changé de temps à l'aide de : $\left(\int_0^t ds\ \varphi_s^2, t \geq 0\right)$.

En conséquence, on a : $|K_t| \leq C(\omega) t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$ $\quad (t \leq 1)$

pour une certaine constante $C(\omega)$; ainsi, K satisfait la condition *(3.b)* et on est ramené, dans ce cas, au Théorème 6.

3) Lorsque $K_t = A_t$, avec A processus croissant continu, on a, par intégration par parties :

$$(3.c) \qquad N_t = \frac{Y_t}{V_t} = A_t - \frac{1}{V_t}\int_0^t V_s\ dA_s \ ,$$

d'où l'on déduit : $\limsup_{t \downarrow\downarrow 0} N_t \leq 0.$

D'après le Théorème 1 et le Corollaire 4, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ converge P-p.s. Il reste à montrer que la limite p.s. est bien 0 ; en utilisant à nouveau *(3.c)*, il suffit de montrer que $\left(\frac{1}{V_t}\int_0^t V_s dA_s\ ,\ t \downarrow\downarrow 0\right)$ converge en probabilité vers 0, ce qui découle de la majoration :

$$\frac{1}{V_t}\int_0^t V_s dA_s \leq \left(\frac{\sup_{s\leq t} V_s}{V_t}\right) A_t \ ,$$

et du fait que, par scaling, la loi de $\frac{\sup_{s\leq t} V_s}{V_t}$ ne dépend pas de t. □

4. Un exemple où la condition (iii) n'est pas satisfaite.

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons de façon essentielle sur la Proposition 3.8 de [2].

Théorème 8 : *Soit* ρ *fonction croissante continue, telle que* $\rho(0) = 0$ *et satisfaisant :*

$$(4.a) \qquad \int_{0+} \frac{du}{u}\ \rho(u) = \infty.$$

Il existe alors un processus prévisible borné K, vérifiant $K \geq 1$, et

(4.b) $$|K_t - K_0| \leq 2\rho(t)$$

tel que $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ oscille fortement.

<u>Démonstration</u> : D'après la Proposition 3.8 de [2], il existe un processus K satisfaisant les hypothèses du Théorème 8 tel que :

(4.c) $$\liminf_{t \downarrow\downarrow 0} N_t \leq 0.$$

D'après la seconde partie de la Proposition 5 ci-dessus, $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ oscille fortement. □

Commentaires : 1) Pour être complets, rappelons la définition explicite du processus K construit par Barlow et Perkins :

$$K_t = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2\rho(y^{2n} \wedge S(y^n))\, 1_{(S(y^n), S(y^{2n}))}(t),$$

où $S(x) = \inf\{t \geq 0 : V_t = x\}$, et $y \in [0, \frac{1}{3}]$.

Il n'est pas difficile, en suivant soigneusement la démonstration de Barlow-Perkins de voir directement que : $\liminf_{t \downarrow\downarrow 0} N_t \leq -1$, renforçant ainsi *(4.c)*.

En fait, on sait a posteriori que : $\liminf_{t \downarrow\downarrow 0} N_t = -\infty$.

2) Il serait très intéressant de dégager une classe plus générale de processus K tels que $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ oscille fortement.

5. Des martingales locales bornées dans L^2 qui ne sont pas des martingales.

Lorsque $(N_t, t \downarrow\downarrow 0)$ converge P-p.s. vers K_0, il est facile de voir que $(N_t, t \geq 0)$ est une $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ martingale locale (on a posé : $N_0 = K_0$).

Il est alors naturel de se demander si $(N_t, t \geq 0)$ est une vraie martingale. On peut en fait se poser cette question plus généralement pour tout processus $(N_t\ ;\ a \leq t \leq b)$, où $0 < a < b$.

De façon à ne pas écarter de notre étude des exemples importants de processus N, nous relaxons l'hypothèse de bornitude faite sur K dans l'énoncé de la Proposition 3, et, à l'aide des majorations faites dans la démonstration de cette Proposition, nous obtenons le

Lemme 9 : *Soit* K *un processus continu,* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté, tel que :*

$$E\left[\left(\sup_{s\le t}|K_s|\right)^{\alpha}\right] < \infty, \text{ pour tous } t > 0 \text{ et } \alpha > 0.$$

Alors :

1) pour tout $r < 3$, *et tout* $t > 0$, *la famille*

$(N_s, 0 < s \le t)$ *est bornée dans* L^r.

2) En conséquence, pour $\varepsilon > 0$, *et* t *fixés,* $(N_s, \varepsilon \le s \le t)$ *est une* $(\mathcal{F}_s)$ *martingale si, et seulement si :*

$$E\left[\sup_{\varepsilon\le s\le t} N_s^2\right] < \infty.$$

Démonstration : La seconde assertion découle de la première, et de l'inégalité de Doob dans L^2. □

Nous appliquons maintenant le Lemme 9 à l'étude des martingales locales suivantes, indexées par $]0,\infty[$:

$$N_t^f = \frac{f(V_t, t)}{V_t}, \tag{5.b}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation de la chaleur :

$$\left(\frac{1}{2} f''_{x^2} + f'_t\right)(x,t) = 0, \text{ et } f(0,0) = 0. \tag{5.c}$$

En conséquence de ces hypothèses, on a, par application de la formule d'Itô :

$$Y_t = \int_0^t K_s dV_s, \text{ avec } K_s = f'_x(V_s, s).$$

De plus, il découle immédiatement du Théorème 6 que $(N_t^f, t \downarrow\downarrow 0)$ converge P-p.s. vers $f'_x(0,0)$. On posera toujours, dans ce paragraphe :

$$N_0^f = f'_x(0,0).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 10 : *Supposons, en plus des hypothèses faites précédemment sur* f, *que l'on ait :*

(5.d) $$E\left[\sup_{x\le V_s\ ;\ s\le t} |f'_x(x,s)|^{\alpha}\right] < \infty,$$

pour tout $t > 0$, *et tout* $\alpha > 0$.

Alors : 1) Pour tout $\varepsilon > 0$, *la martingale locale* $(N_t^f\ ;\ t \ge \varepsilon)$ *est une martingale si, et seulement si :*

(5.e) $$f(0,t) = 0.$$

2) Lorsque la condition (5.e) est satisfaite, alors $(N_t^f, t \ge 0)$ *est une martingale.*

Remarque : Nous ne savons pas précisément sous quelle condition sur f, solution de *(5.c)*, l'hypothèse *(5.d)* est satisfaite, mais, dans tous les exemples que nous avons en vue, il n'y a aucune difficulté à vérifier cette hypothèse.

Démonstration du Théorème 10 :

1) Ecrivons : $f(y,t) = (f(y,t) - f(0,t)) + f(0,t)$, puis :

$$|f(y,t)| \le y \sup_{x\le y} |f'_x(x,t)| + |f(0,t)|.$$

Nous voyons alors, à l'aide de l'hypothèse *(5.d)* et de la seconde partie du Lemme 9, que $(N_t^f, t \ge \varepsilon)$ est une martingale si, et seulement si :

(5.f) $$E\left[\sup_{\varepsilon\le s\le t} \left(\frac{\varphi(s)}{V_s}\right)^2\right] < \infty,$$

où l'on a posé : $\varphi(s) = |f(0,s)|$.

Il découle de la Proposition 12 ci-dessous que la propriété *(5.f)* est satisfaite si, et seulement si : $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \in [\varepsilon, t]$.

2) La seconde assertion du Théorème découle alors simplement du théorème de convergence des martingales inverses. □

Voici maintenant quelques exemples importants de processus $(N_t^f, t \ge 0)$ satisfaisant *(5.b)* et *(5.c)*, qui sont des martingales locales, et sont, ou ne sont pas, des martingales.

Théorème 11 : *1) Soit* α *réel strictement positif ; alors :*

$\left(\frac{\mathrm{sh}(\alpha V_t)}{V_t} \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right), t \geq 0\right)$ *est une martingale ; elle converge vers* α *lorsque* t *tend vers* 0, *et est de carré intégrable pour tout* $t \geq 0$.

Par contre, $\left(\frac{1}{V_t}\left(\exp(\alpha V_t - \frac{\alpha^2 t}{2}) - 1\right) ; t \geq 0\right)$ *est une martingale locale, mais n'est pas une martingale ; elle converge vers* α *lorsque* t *tend vers* 0, *et est de carré intégrable pour tout* $t \geq 0$.

2) Désignons par $h_n(x)$ *le* $n^{\text{ième}}$ *polynôme de Hermite, et notons :* $H_n(x,t) = t^{n/2}\, h_n(\frac{x}{\sqrt{t}})$. *Alors :*

si n *est impair,* $\left(\frac{1}{V_t} H_n(V_t,t), t \geq 0\right)$ *est une martingale, de carré intégrable pour tout* $t > 0$;

si n *est pair,* $n \geq 1$, $\left(\frac{1}{V_t} H_n(V_t,t), t \geq 0\right)$ *est une martingale locale, de carré intégrable pour tout* $t > 0$, *mais n'est pas une martingale.*

La Proposition suivante permet de terminer la démonstration du Théorème 10, et donne d'autres exemples de martingales locales bornées dans L^2, qui ne sont pas des martingales.

Proposition 12 : *1) Soient* $0 < a < b$. *On note :* $I_{a,b} = \inf_{a \leq s \leq b} V_s$.

Alors, $E\left[\left(\frac{1}{I_{a,b}}\right)^{\alpha}\right] < \infty$ *si, et seulement si :* $\alpha < 1$.

2) En conséquence, si $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue, alors :*

$$E\left[\sup_{a \leq s \leq b} \left(\frac{\varphi(s)}{V_s}\right)\right]$$

est fini si, et seulement si, φ *est identiquement nulle sur* $[a,b]$.

3) Si $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^1 *qui n'est pas identiquement nulle, alors :*

$$\int_0^t \varphi(s)\, d\left(\frac{1}{V_s}\right) = -\int_a^t \varphi(s)\, \frac{d\beta_s}{V_s^2} \qquad (a \le t \le b)$$

est une martingale locale, de carré intégrable pour tout t*, qui n'est pas une martingale.*

Démonstration : 1) Les propriétés d'intégrabilité de $\frac{1}{I_{a,b}}$ découlent immédiatement de l'estimation :

$$(*) \qquad P(I_{a,b} \le \varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon\, E\left[\frac{1}{V_a} - \frac{1}{V_b}\right] = \varepsilon\, C\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Pour démontrer (*), remarquons que, si P_x désigne la loi du processus de Bessel de dimension 3, issu de $x > 0$, et $T_\varepsilon = \inf\{t \ge 0 : V_t = \varepsilon\}$, on a, pour $\varepsilon < x$:

$$E_x\left[\frac{1}{V_{t\wedge T_\varepsilon}}\right] = \frac{1}{x},$$

c'est-à-dire : $\frac{1}{\varepsilon} P_x(T_\varepsilon \le t) + E_x\left[\frac{1}{V_t} 1_{(T_\varepsilon > t)}\right] = \frac{1}{x}$,

d'où l'on déduit : $P_x\left(\inf_{u\le t} V_u \le \varepsilon\right) \equiv P_x(T_\varepsilon \le t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon\left(\frac{1}{x} - E_x\left(\frac{1}{V_t}\right)\right)$.

L'estimation (*) découle alors de la propriété de Markov.

2) Si φ n'est pas identiquement nulle, elle est minorée par une constante $\varphi_* > 0$ sur un sous-intervalle $[c,d]$ de $[a,b]$, et on a, d'après 1) :

$$\infty = \varphi_*\, E\left[\frac{1}{I_{c,d}}\right] \le E\left[\sup_{a\le t\le b} \left(\frac{\varphi(t)}{V_t}\right)\right].$$

3) On a, d'après la formule d'Itô :

$$(5.g) \qquad \frac{\varphi(t)}{V_t} = \frac{\varphi(a)}{V_a} + \int_a^t \varphi(s)\, d\left(\frac{1}{V_s}\right) + \int_a^t \frac{\varphi'(s)ds}{V_s},$$

et, si l'intégrale stochastique est une martingale, on en déduit, en prenant les espérances des deux membres de *(5.g)* :

$$\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}} + \int_a^t \frac{\varphi'(s)ds}{\sqrt{s}},$$

d'où l'on déduit, par intégration par parties : $\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{s^{3/2}} = 0$, et donc : $\varphi(t) \equiv 0$.

Le fait que la martingale locale ainsi définie soit de carré intégrable pour tout t découle de la formule *(5.g)* et des majorations déjà faites dans la démonstration de la Proposition 3. □

6. Relations avec une extension du théorème de Girsanov.

La démonstration que nous avons donnée ci-dessus du résultat de la Proposition 2 :

(6.a) $\left(N_t \equiv \frac{1}{V_t}\left(c + \int_0^t K_s dV_s\right) ; t > 0\right)$ est une $((\mathcal{F}_t)_{t>0} ; P)$ martingale locale,

s'appuie sur la formule d'Itô. C'est certainement une des démonstrations les plus rapides de ce résultat.

Toutefois, nous sommes parvenus initialement à l'énoncé *(6.a)* comme cas particulier d'un résultat beaucoup plus général, qui fait l'objet de notre article [1], et que l'on peut considérer à la fois comme une extension du théorème de Girsanov (tout au moins pour les martingales continues), et comme une simplification des formules de la théorie du grossissement de filtrations.
Nous montrons en [1] le

Théorème 13 : *Soit* $(M_t, t \geq 0)$ *une* $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *martingale continue, uniformément intégrable, nulle en* 0, *telle que :* $P(M_\infty = 0) = 0$.

Notons $g = \sup\{t : M_t = 0\}$, *et posons* $Q = \frac{|M_\infty|}{E_P(|M_\infty|)} P$.

Soit $(X_t ; t \geq 0)$ *une* $((\mathcal{F}_t), P)$ *martingale locale continue.*

Alors, on a :

1) *pour tout* $t > 0$, $\int_g^{g+t} \frac{|d\langle X,M\rangle_s|}{|M_s|} < \infty$;

2) $\left(X_{g+t} - X_g - \int_g^{g+t} \frac{d\langle X,M\rangle_s}{M_s} ; t > 0\right)$

est une $((\mathcal{F}_{g+t})_{t>0}\ ;\ Q)$ *martingale locale ;*

3) en conséquence, $\left(\frac{X_{g+t}}{M_{g+t}}\ ,\ t > 0\right)$ *est une* $((\mathcal{F}_{g+t})_{t>0}, Q)$ *martingale locale.*

La validité du Théorème 13 peut d'ailleurs être étendue au cas où $|M|$ est remplacée par une sous-martingale continue $(Y_t, t \geq 0)$ de la classe (D), à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et dont le processus croissant est porté par les zéros de Y (remplacer partout dans les points 1), 2), 3) ci-dessus, M et $|M|$ par Y). Avec cette généralité, on obtient ainsi une extension du théorème de décomposition de Williams pour les trajectoires du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0, décomposées en $g_T \equiv \sup\{s \leq T : B_s = 0\}$, où T est un $(\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{B_s, s\leq t\}\ ;\ t \geq 0)$ temps d'arrêt quelconque. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour plus de détails, et d'autres applications du Théorème 13.

REFERENCES

[1] J. Azéma, M. Yor : Une extension du théorème de Girsanov, et applications. En préparation.

[2] M.T. Barlow, E.A. Perkins : Sample path properties of stochastic integrals and stochastic differentiation.
Stochastics and Stochastics Reports, 27, p. 261-293 (1989).

[3] J.Y. Calais, M. Génin : Sur les martingales locales continues indexées par]0,∞[.
Sém. Proba. XVII, Lect. Notes in Maths. 986, p. 162-178, Springer (1983).

[4] L. Dubins, G. Schwarz : On continuous martingales.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 53, p. 913-916 (1965).

[5] A. Dvoretzky, P. Erdös : Some problems on random walk in space.
Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability.
Univ. of California Press, Berkeley, 1951, p. 353-367.

[6] J.W. Pitman : One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process.
J. App. Proba. 7, p. 511-526 (1975).

[7] M.J. Sharpe : Local times and singularities of continuous local martingales.
Sém. Probas. XIV, Lect. Notes in Maths. 784, p. 76-101 (1980).

[8] J.B. Walsh : A property of conformal martingales.
Sém. Proba. XI, Lect. Notes in Maths. 581, p. 490-492 (1977).

[9] M.T. Barlow, E.A. Perkins : On pathwise uniqueness and expansion of filtrations. Dans ce volume.