

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

Sur une horloge fluctuante pour les processus de Bessel de petites dimensions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 117-136

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__117_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE HORLOGE FLUCTUANTE POUR LES PROCESSUS DE BESSEL DE PETITES DIMENSIONS

Jean BERTOIN

*Laboratoire de Probabilités (L.A.224), Université P. et M. Curie
4 Place Jussieu - Tour 56 - 75252 PARIS CEDEX 05 .*

L'origine de ce travail est la recherche d'une extension pour les petites dimensions d'un résultat dû à Biane et Yor [3] sur des changements de temps pour un processus de Bessel (voir (0.3) ci-dessous). Considérons R , un processus de Bessel de dimension $d > 0$, issu de 0 (en abrégé $BES_0(d)$), 0 étant une barrière instantanément réfléchissante lorsque $d < 2$.

Quand $d > 1$, R est une sous-martingale de décomposition canonique

$$(0.1): \quad R = B + (d-1)H, \text{ avec } B \text{ brownien réel et } H_t = \frac{1}{2} \int_0^t ds/R_s.$$

Pour tout t positif, notons

$$(0.2): \quad T(t) = \inf\{s : H_s > t\} \text{ et } \tilde{R} = 2 R \circ T.$$

Biane et Yor ont alors montré que

$$(0.3): \quad \tilde{R} \text{ est le carré d'un } BES_0(2d-2) \text{ (en abrégé } BESQ_0(2d-2) \text{)}.$$

Si l'on prend maintenant d dans l'intervalle $]0;1[$, R n'est plus une semi-martingale, mais un processus de Dirichlet qui admet la décomposition canonique de la forme (0.1), cette fois avec

$$H_t = \frac{1}{2} \text{ v.p. } \int_0^t ds/R_s = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} (L_t^a(R) - L_t^0(R)) a^{d-2} da,$$

où nous avons noté $(L_t^a(R) : a \in \mathbb{R}_+, t \geq 0)$ une version bicontinue des temps locaux de R (voir [1], paragraphe V). L'horloge H est fluctuante, au sens où H est une fonctionnelle additive non monotone de R . L'étude du processus de Markov fort \tilde{R} se présente comme cas particulier d'un problème très général soulevé par Rogers et Williams [13] (voir également London et al. [8], Rogers [11], Mc Gill [9] ...).

D'après sa définition, H est croissant sur tout intervalle dans lequel R ne s'annule pas, et il est aisé de voir que \tilde{R} évolue comme un $BESQ(2d-2)$

tant qu'il reste dans $]0;+\infty[$. La difficulté consiste à savoir comment se comporte \tilde{R} au voisinage d'un temps d'arrêt en lequel il est nul (le point 0 est-il une barrière instantanément réfléchissante, \tilde{R} peut-il sortir continument de 0 ?). Bien que ces questions soient très proches de celles abordées dans [8] et [13], notre approche sera différente, au moins en apparence: nous allons à nous ramener à la situation classique du changement de temps d'un processus de Markov par une fonctionnelle additive croissante (voir Maisonneuve [10]). Plus précisément, si nous notons

$$S_t = \sup\{H_s : s \leq t\},$$

nous avons $T(t) = \inf\{s : S_s > t\}$; mais, bien sûr, S n'est pas une fonctionnelle additive de R . C'est, par contre, une fonctionnelle additive du couple Markovien $(R; H-S)$. Nous étudierons donc, dans un premier temps, le processus $(R; H-S)$ en décomposant sa mesure d'excursion hors de $(0;0)$, nous en déduirons une description de \tilde{R} , et nous justifierons a posteriori l'intérêt de notre travail en montrant que \tilde{R} intervient dans des théorèmes limites pour des browniens changés de temps par certaines horloges fluctuantes.

Dans un second temps, nous étudierons plus généralement les valeurs prises par R en les lignes de niveaux de H : en notant $T(-t) = \inf\{s : H_s < -t\}$, nous montrerons que le processus à valeurs dans l'espace des mesures σ -finies sur $]0;+\infty[$

$$a \mapsto \mu_{T(-1)}(a) = \sum_{t < T(-1)} 1_{\{R_t \neq 0; H_t = a\}} \delta_{R_t} \quad (a \geq -1),$$

est Markovien, continu et nous expliciterons son semi-groupe. Ce résultat peut également être interprété comme un théorème du type de ceux de Ray et Knight pour la mesure d'occupation de $(R; H)$.

Tout au long de cet article, $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ désignera un espace probabilisé filtré. Même lorsque nous travaillerons sous une mesure d'excursion (i.e. seulement σ -finie), nous emploierons le langage probabiliste (loi, variable aléatoire ...) au lieu de celui de la théorie de la mesure (mesure image, fonction mesurable ...). Enfin, si $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue croissante, nous noterons φ^{-1} son inverse continue à droite ($\varphi^{-1}(t) = \inf\{s : \varphi(s) > t\}$).

I ETUDE DE \tilde{R} .

1) Un lemme utile. Dans ce paragraphe, nous appliquerons à plusieurs reprises le résultat élémentaire suivant sur les excursions d'un processus de Markov changé de temps:

Soient E un espace polonais, x_0 un point de E , et X un processus de Markov fort pour lequel x_0 est régulier. Désignons par ℓ un temps local en x_0 pour X au sens de Blumenthal et Gettoor [4] (c'est-à-dire que ℓ est une fonctionnelle additive positive de X qui ne croît que quand X_t ou X_{t-} est nul), et par n la mesure d'Itô [7] des excursions de X hors de x_0 associée à ℓ . Nous noterons $x = (x(t) : t \leq v)$ l'excursion générique, et v sa durée de vie.

Considérons encore $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne et posons

$$A(t) = \int_0^t f(X_s) ds, \quad a(t) = \int_0^t f(x(s)) ds.$$

Nous supposons de plus que

$$(I.1): \quad \mathbb{P}_{x_0} \text{ p.s. pour tout } t, \quad A(t) < \infty; \text{ et n p.s. , } a(v) > 0.$$

Lemme I.1. Si $\ell \circ A^{-1}$ est un temps local en x_0 pour $X \circ A^{-1}$ (au sens de Blumenthal et Gettoor), alors la mesure d'Itô des excursions de $X \circ A^{-1}$ hors de x_0 est l'image de n par l'application

$$x \mapsto x \circ a^{-1} \quad (\text{avec la convention } x(\infty) = x_0).$$

Preuve. Montrons tout d'abord que les intervalles d'excursions de $X \circ A^{-1}$ sont les images par A des intervalles d'excursions de X : $\ell \circ A^{-1}$ étant continu, pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$(\ell \circ A^{-1})^{-1}(t) = A \circ \ell^{-1}(t) \quad \text{et} \quad (\ell \circ A^{-1})^{-1}(t-) = A \circ \ell^{-1}(t-).$$

Par conséquent, si $\ell^{-1}(t-) < \ell^{-1}(t)$, $] \ell^{-1}(t-); \ell^{-1}(t) [$ est un intervalle d'excursion pour X , et d'après (I.1), $A \circ \ell^{-1}(t-) < A \circ \ell^{-1}(t)$. Ainsi, $] (\ell \circ A^{-1})^{-1}(t-); (\ell \circ A^{-1})^{-1}(t) [$ est un intervalle d'excursion pour $X \circ A^{-1}$.

Réciproquement, si $(\ell \circ A^{-1})^{-1}(t-) < (\ell \circ A^{-1})^{-1}(t)$, c'est-à-dire si $A \circ \ell^{-1}(t-) < A \circ \ell^{-1}(t)$, alors $\ell^{-1}(t-) < \ell^{-1}(t)$; et $] \ell^{-1}(t-); \ell^{-1}(t) [$ est un intervalle d'excursion de X .

Enfin, A étant une fonctionnelle additive, pour tout $s \geq 0$,

$$X \circ A^{-1}((\ell \circ A^{-1})^{-1}(t-) + s) = X(\ell^{-1}(t-) + \inf\{u : \int_0^u f \circ X(\ell^{-1}(t-) + r) dr > s\}),$$

ce qui entraîne le lemme (il suffit de raisonner sur les processus de comptage). \square

2) Excursions de $(R; H-S)$. La décomposition des excursions de $(R; H-S)$ que nous allons donner découle des résultats obtenus dans [2] pour $(R; H)$ et de l'analogie suivant d'une identité en loi pour le mouvement brownien dûe à P. Lévy: introduisons les changements de temps

$$\alpha(t) = \inf\left\{s : \int_0^s 1_{\{H_u < S_u\}} du > t\right\}, \quad \beta(t) = \inf\left\{s : \int_0^s 1_{\{H_u < 0\}} du > t\right\}$$

(on vérifie aisément que ces quantités sont finies p.s.). Nous avons le

Lemme I.2. Les processus $(R; H-S)_{\alpha(\cdot)}$ et $(R; H)_{\beta(\cdot)}$ ont même loi.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, notons

$$\alpha(\varepsilon, t) = \inf\left\{s : \int_0^s 1_{\{H_u - S_u < -\varepsilon\}} du > t\right\}, \quad \beta(\varepsilon, t) = \inf\left\{s : \int_0^s 1_{\{H_u < -\varepsilon\}} du > t\right\}$$

quantités qui sont finies p.s. pour tout t . Comme $\int_0^s 1_{\{H_u - S_u < -\varepsilon\}} du$ converge en croissant quand ε décroît vers 0 vers $\int_0^s 1_{\{H_u < S_u\}} du$, alors p.s. pour tout t , $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \alpha(\varepsilon, t) = \alpha(t)$ et de même $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \beta(\varepsilon, t) = \beta(t)$.

Ainsi,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (R; H-S)_{\alpha(\varepsilon, \cdot)} = (R; H-S)_{\alpha(\cdot)} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (R; H)_{\beta(\varepsilon, \cdot)} = (R; H)_{\beta(\cdot)},$$

et il nous suffit de vérifier que $(R; H-S)_{\alpha(\varepsilon, \cdot)}$ et $(R; H)_{\beta(\varepsilon, \cdot)}$ ont même loi. A cette fin, introduisons les suites de temps d'arrêt p.s. finis

$$U(\varepsilon, 0) = V(\varepsilon, 0) \equiv 0,$$

$$U(\varepsilon, 2n+1) = \inf\{t > U(\varepsilon, 2n) : (H-S)_t < -\varepsilon\},$$

$$U(\varepsilon, 2n+2) = \inf\{t > U(\varepsilon, 2n+1) : (H-S)_t = 0\},$$

$$V(\varepsilon, 2n+1) = \inf\{t > V(\varepsilon, 2n) : H_t < -\varepsilon\}, \text{ et}$$

$$V(\varepsilon, 2n+2) = \inf\{t > V(\varepsilon, 2n+1) : H_t = 0\}$$

($U(\varepsilon, n+1)$ est le premier temps après $U(\varepsilon, n)$ en lequel $H-S$ atteint 0 quand n est impair et $-\varepsilon$ quand n est pair; la construction est la même pour $V(\varepsilon, \cdot)$ relativement à H). H étant croissant sur tout intervalle sur lequel R ne s'annule pas, pour tout entier n , $R_{U(\varepsilon, 2n+1)}$ et $R_{V(\varepsilon, 2n+1)}$ sont nuls. Il découle alors de la propriété forte de Markov et de ce que H est une fonctionnelle additive de R que

(I.2): $\{((R; H-S)_{U(\varepsilon, 2n+1)+t} : 0 \leq t \leq U(\varepsilon, 2n+2) - U(\varepsilon, 2n+1))\}, n \in \mathbb{N}$
est une suite de processus indépendants, chacun ayant la même loi que
 $((R; H-\varepsilon)_t : 0 \leq t \leq T(\varepsilon))$ (c.f. définition (0.2)).

Il en est de même pour

$$(I.2') : \{ ((R;H)_{V(\varepsilon, 2n+1)+t} : 0 \leq t \leq V(\varepsilon, 2n+2) - V(\varepsilon, 2n+1)) , n \in \mathbb{N} \} .$$

Notons $J (= J(\varepsilon))$ le processus obtenu en "recollant bout-à-bout" la suite (I.2), et J' celui obtenu de même à partir de (I.2'). J et J' ont même loi et sont construits à partir de $(R;H-S)$ et de $(R;H)$ en effaçant des intervalles de temps qui apportent une contribution nulle respectivement aux intégrales $\int_0^S 1_{\{H_u - S_u < -\varepsilon\}} du$ et $\int_0^S 1_{\{H_u < -\varepsilon\}} du$. Nous avons donc

$$(R;H-S)_{\alpha(\varepsilon, t)} = J_{\gamma(\varepsilon, t)} \quad \text{où} \quad \gamma(\varepsilon, t) = \inf \left\{ s : \int_0^s 1_{\{J_u < -\varepsilon\}} du > t \right\} ,$$

$$(R;H)_{\beta(\varepsilon, t)} = J'_{\gamma'(\varepsilon, t)} \quad \text{où} \quad \gamma'(\varepsilon, t) = \inf \left\{ s : \int_0^s 1_{\{J'_u < -\varepsilon\}} du > t \right\} .$$

Ainsi, $(R;H-S)_{\alpha(\varepsilon, .)}$ et $(R;H)_{\beta(\varepsilon, .)}$ ont même loi, ce qui prouve le lemme. \square

Rappelons maintenant le principal résultat de [2]: soit $d_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$), le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que H accomplit sur l'intervalle de temps $[0; t]$. $2^{n(d-1)} d_n(t)$ converge p.s. pour tout t quand n tend vers l'infini vers $\delta(t)$, le temps local en $(0;0)$ de $(R;H)$. Le processus des excursions de $(R;H)$ hors de $(0;0)$ est un processus de Poisson ponctuel (en abrégé p.p.p.) à valeurs dans Ω^{abs} , l'espace des trajectoires continues, issues de $(0;0)$, et absorbées après le premier retour à l'origine. Nous désignons par m la mesure caractéristique de ce p.p.p., et afin de la décrire, nous introduisons les

Notations. - Pour tout $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in \Omega^{\text{abs}}$, nous posons

$i = \inf\{\omega^2(r) : r \geq 0\}$, $u = \inf\{r > 0 : \omega^2(r) = 0\}$, et $v = \inf\{r > 0 : \omega(r) = (0;0)\}$.

- Pour tout $x > 0$, nous désignons par R^x un $BES_x(d)$. R^x est un processus de Dirichlet de décomposition canonique $R^x = x + B + (d-1)H^x$, avec

$$H_t^x = \frac{1}{2} \text{ v.p. } \int_0^t ds / R_s^x = \frac{1}{2} \int_0^\infty (L_t^a(R^x) - L_t^0(R^x)) a^{d-2} da .$$

Nous notons encore $\xi^x = \inf\{t : R_t^x = 0\}$ et $T^x(0) = \inf\{t > 0 : H_t^x = 0\}$ (H^x étant strictement croissant sur $]0; \xi^x[$, on a $\xi^x < T^x(0)$).

m se décompose alors de la façon suivante (c.f. [2]):

(I.3) : 1) La loi de $\omega^1(u)$ sous m est donnée par

$$m(\omega^1(u)=0) = 0 \quad \text{et} \quad m(\omega^1(u) \in dx) = \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} dx \quad (x > 0) .$$

ii) Sous m , conditionnellement à $\omega^1(u) = x$ ($x > 0$), les processus $(\omega(u+r) : 0 \leq r \leq v-u)$ et $((\omega^1(u-r); -\omega^2(u-r)) : 0 \leq r \leq u)$ sont indépendants et ont même loi que $((R^X; H^X)_t : 0 \leq t \leq T^X(0))$.

Cette description entraîne que la condition (I.1) du lemme I.1 est satisfaite pour $X = (R; H)$, $f(r, h) = 1_{h < 0}$ et $A^{-1} = \beta$. Montrons maintenant (I.4): $\delta \circ \beta$ est un temps local en $(0; 0)$ pour $(R; H)_{\beta(\cdot)}$.

Par construction, $d_n(\beta(t))$ est le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que $H_{\beta(\cdot)}$ a effectuées sur l'intervalle de temps $[0; t]$. D'après (I.3), $\delta(\beta(t)) = \lim 2^{n(d-1)} d_n(\beta(t))$ est une fonctionnelle additive de $(R; H)_{\beta(\cdot)}$ qui ne croît que quand $H_{\beta(\cdot)}$ est nul. Or, p.s. pour tout t , si $H_{\beta(t)}$ est nul, $R_{\beta(t)}$ l'est également (en effet, si $R_{\beta(t)} \neq 0$, alors H est strictement croissant au voisinage de $\beta(t)$, et H est strictement positif immédiatement à droite de $\beta(t)$, ce qui contredit la définition de β). Il nous reste à voir que $\delta \circ \beta$ est continu: comme δ est continu, les sauts de $\delta \circ \beta$ ne peuvent provenir que de ceux de β . Si $\beta(t-) < \beta(t)$, alors $H_r \geq 0$ pour presque tout r de $[\beta(t-); \beta(t)]$, et d'après la description (I.3.ii), ceci n'est possible que si $H > 0$ sur $[\beta(t-); \beta(t)]$. Comme δ ne croît que quand H est nul, nous avons bien $\delta(\beta(t-)) = \delta(\beta(t))$, ce qui prouve notre assertion.

Notons $\hat{d}_n(s)$ le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que $H-S$ a accomplies sur $[0; s]$. Par construction,

$$\hat{d}_n(s) = \hat{d}_n(\alpha(t)) \quad \text{pour } t = \int_0^s 1_{\{H_u < S_u\}} du,$$

et comme, d'après le lemme I.2 et (I.4), $2^{n(d-1)} \hat{d}_n(\alpha(t))$ converge quand n tend vers l'infini vers $\hat{\delta} \circ \alpha(t)$, le temps local en $(0; 0)$ de $(R; H-S)_{\alpha(\cdot)}$, p.s., pour tout s , $\lim 2^{n(d-1)} \hat{d}_n(s) = \hat{\delta}(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{\delta} \circ \alpha(t)$. D'autre part, les applications

$$s \mapsto t = \int_0^s 1_{\{H_u < S_u\}} du \quad \text{et} \quad s \mapsto \hat{\delta} \circ \alpha(t)$$

étant continues, $\hat{\delta}$ est une fonctionnelle additive continue de $(R; H-S)$ qui ne croît que quand R et $H-S$ sont nuls (puisque $H-S$ est croissant au sens large sur tout intervalle sur lequel R ne s'annule pas). Finalement, $\hat{\delta}$ est un temps local en $(0; 0)$ pour $(R; H-S)$.

Le processus des excursions de $(R; H-S)$ hors de $(0; 0)$ est un p.p.p. à valeurs dans Ω^{abs} ; nous notons \hat{m} sa mesure caractéristique. Elle est décrite par le théorème suivant (voir figure 1):

Théorème I.3. i) La loi de $\omega^1(u)$ sous \hat{m} est donnée par

$$\hat{m}(\omega^1(u)=0) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{m}(\omega^1(u) \in dx) = \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} dx \quad (x>0).$$

ii) Sous \hat{m} , conditionnellement à $\omega^1(u) = x$ ($x>0$), les processus $(\omega(u+r) : 0 \leq r \leq v-u)$ et $(\omega(u-r) : 0 \leq r \leq u)$ sont indépendants. Le premier est distribué comme $((R^X; 0)_r : 0 \leq r \leq \xi^X)$ et le second comme $((R^X; -H^X)_r : 0 \leq r \leq T^X(0))$.

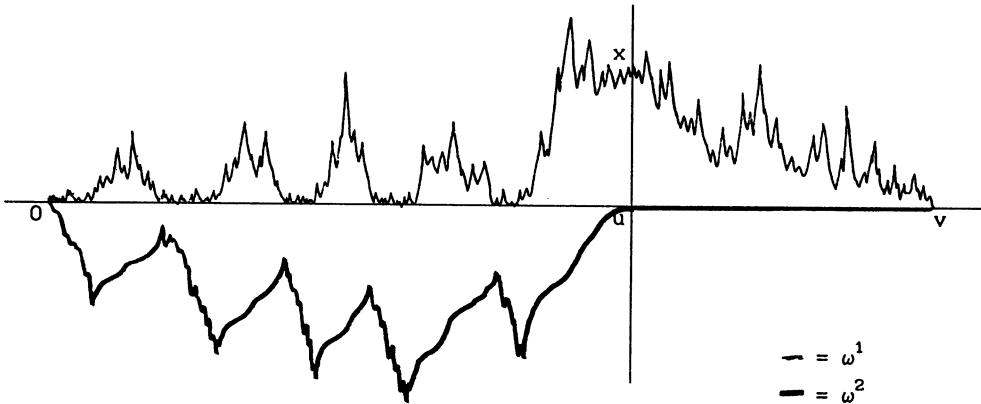


figure 1

Preuve. Commençons par montrer

(I.5): \hat{m} p.s., $\omega^2 \equiv 0$ sur $[u, v]$, $u>0$, et $\omega^2 < 0$ sur $]0, u[$.

A cette fin, supposons qu'il existe $r \in]u, v[$ tel que $\omega^2(r) < 0$. De la définition même de u , si $g(r) = \sup\{r' < r : \omega^2(r') = 0\}$ est le dernier instant avant r en lequel ω^2 est nulle, alors $g(r) > 0$. D'autre part, ω^2 n'est croissante sur aucun voisinage de $g(r)$, et donc, \hat{m} p.s., $\omega^1(g(r)) = \omega^2(g(r)) = 0$, c'est-à-dire $g(r) = v$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, $\omega^2 \equiv 0$ sur $[u, v]$, et $v = \inf\{r > u : \omega^1(r) = 0\}$. Si maintenant ω est une excursion telle que $u=0$, alors $v = \inf\{r > 0 : \omega^1(r) = 0\}$, et le temps local en 0 de ω^1 est identiquement nul. Désignons par τ l'inverse continu à droite de $L^0(R)$. Si $\hat{m}(u=0) \neq 0$, il existe p.s. un instant t tel que $H_{\tau(t)} > H_{\tau(t-)} = \sup\{H_{\tau(s)} : s < t\}$, ce qui contredit le corollaire 1 de Rogers [12] (rappelons que H_{τ} est un processus stable d'exposant $2-d > 1$, voir Biane et Yor [3] p. 24). Ainsi, $\hat{m}(u=0) = 0$, et la définition de u entraîne que ω^2 est strictement négative sur $]0, u[$.

Il découle de (I.5) et du lemme I.1 que la mesure d'excursion de $(R; H-S)_{\alpha(\cdot)}$ est l'image de \hat{m} par l'application $\phi : \omega \mapsto \phi(\omega)$, où $\phi(\omega) : [0, u] \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\phi(\omega)(r) = \omega(r)$ si $r \in [0, u[$, $\phi(\omega)(u) = (0; 0)$; et de même, (I.3), (I.4) et le lemme I.1 entraînent que la mesure d'excursion de $(R; H)_{\beta(\cdot)}$ est l'image de m par l'application précédente. Nous déduisons du lemme I.2 que le processus $(\omega(u-r) : 0 \leq r \leq u)$ a même loi sous m que sous \hat{m} , ce qui établit i) et la dernière partie de ii) grâce à (I.3). Enfin la première partie de ii) découle de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt u . \square

Ouvrons ici une petite parenthèse pour donner une application très simple de ce résultat: considérons t un temps exponentiel indépendant de paramètre θ , et k un réel positif. D'après la théorie des excursions, on a

$$E[1_{\{(H-S)_t < 0\}} \exp(k(H-S)_t)] =$$

$$E\left[\int_0^\infty \exp(-\theta \hat{\delta}^{-1}(t)) dt \right] \left[\int \hat{m}(d\omega) \int_0^v \theta e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r)) 1_{\{\omega^2(r) < 0\}} dr \right],$$

et de même

$$E[1_{\{H_t < 0\}} \exp(k H_t)] =$$

$$E\left[\int_0^\infty \exp(-\theta \delta^{-1}(t)) dt \right] \left[\int m(d\omega) \int_0^v \theta e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r)) 1_{\{\omega^2(r) < 0\}} dr \right].$$

D'une part, nous déduisons de la propriété de scaling et des définitions de δ et $\hat{\delta}$ que δ^{-1} et $\hat{\delta}^{-1}$ sont deux subordinateurs stables d'exposant $(1-d)/2$ (voir [2] prop. II.4); et d'autre part, d'après (I.3) et le théorème I.3, $\int_0^v \theta e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r)) 1_{\{\omega^2(r) < 0\}} dr$ a même intégrale sous m que sous \hat{m} .

Par conséquent, $E[\exp(k(H-S)_t) | (H-S)_t < 0] = E[\exp(k H_t) | H_t < 0]$. Cette relation étant satisfaite pour tout θ , la loi de $(H-S)_1$ conditionnellement à $(H-S)_1 < 0$ est la même que celle de H_1 conditionnellement à $H_1 < 0$. D'après la proposition IV.3 de [2], nous avons donc pour tout $x > 0$,

$$P((S-H)_1 \in dx | S_1 - H_1 > 0) = 2(1-d)(2\pi)^{-1/2} \exp\{-(1-d)^2 x^2 / 2\} dx.$$

Il serait bien sûr intéressant de pouvoir calculer $P(S_1 - H_1 = 0)$, ce qui permettrait de déterminer complètement la loi de $S_1 - H_1$; malheureusement les calculs deviennent vite très compliqués, et nous n'avons pu les mener à bout.

Enfin, comme nous l'avons signalé en introduction, S est une fonctionnelle additive de $(R; H-S)$. Plus précisément, nous avons le

Lemme I.4. P p.s., pour tout $t \geq 0$, $S_t = \frac{1}{2} \int_0^t 1_{\{H_u = S_u\}} \frac{du}{R_u}$.

Preuve. Si à l'instant t , H et S sont égaux et R est non nul, alors H est dérivable en t et sa dérivée vaut $1/(2R_t)$; S est donc dérivable à droite en t , sa dérivée à droite valant également $1/(2R_t)$. Comme S ne croît que quand $H = S$, il suffit pour prouver le lemme, de montrer que la mesure dS_t ne charge pas l'ensemble des zéros de R . Or, nous verrons dans la proposition I.6 (qui est établie indépendamment de cette partie) que pour tout $t > 0$, $P(\tilde{R}_t = 0) = 0$ (rappelons que $\tilde{R} = 2 R \circ S^{-1}$), et donc

$$E \left[\int_{\mathbb{R}_+} 1_{\{\tilde{R}_t = 0\}} dt \right] = E \left[\int_{\mathbb{R}_+} 1_{\{R_t = 0\}} dS_t \right] = 0 \quad \square$$

3) Une description de \tilde{R} . Il ne nous reste plus qu'à appliquer le lemme I.1 à $X = (R; H-S)$, $A = S$ et $A^{-1} = T$. Grâce à la décomposition des excursions de $(R; H-S)$ donnée par le théorème I.3, la condition (I.1) est satisfaite. Pour montrer que $\tilde{\delta} = \hat{\delta} \circ S^{-1}$ est un temps local en $(0; 0)$ de $(R; H-S)_{S^{-1}(t)} = (\frac{1}{2} \tilde{R}; 0)_t$, commençons par remarquer que si $\hat{J}(n; t)$ désigne le nombre d'excursions de $(R; H-S)$ effectuées avant t telles que $\omega^1(u) > 2^{-n}$, alors p.s. pour tout t ,

$$\lim_{n \uparrow \infty} 2^{n(d-1)} \hat{J}(n; t) = \hat{\delta}(t) / \Gamma(d)$$

(ceci découle, grâce au théorème I.3 i. des mêmes arguments que ceux employés par Williams [14] pour montrer le théorème de Lévy sur le nombre de descentes du brownien par la théorie des excursions). Or par construction, d'après (I.5) et le lemme I.4, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{J}(n; S^{-1}(t)) &= \# \{ s < t : S^{-1}(s-) < S^{-1}(s) \text{ et } R_{S^{-1}(s)} > 2^{-n} \} \\ &= \# \{ s < t : \tilde{R}_{s-} = 0 \text{ et } \tilde{R}_s > 2^{-n+1} \}, \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\delta}(t) = \lim_{n \uparrow \infty} 2^{n(d-1)} \# \{ s < t : \tilde{R}_{s-} = 0 \text{ et } \tilde{R}_s > 2^{-n+1} \} = \hat{\delta} \circ S^{-1}(t)$$

est une fonctionnelle additive de \tilde{R} qui ne croît que sur $\{\tilde{R} = 0\}$. Les sauts de $\tilde{\delta}$ ne peuvent provenir que de ceux de S^{-1} . Si $S^{-1}(s-) < S^{-1}(s)$, alors d'après le lemme I.4, $H < S$ pour presque tout r de $[S^{-1}(s-), S^{-1}(s)]$; et grâce à (I.5), ceci n'est possible que si $H < S$ pour tout r de $]S^{-1}(s-), S^{-1}(s)[$. Comme $\hat{\delta}$ ne croît que quand H et S sont égaux, nous avons $\hat{\delta} \circ S^{-1}(s-) = \hat{\delta} \circ S^{-1}(s)$. $\hat{\delta} \circ S^{-1}$ est un temps local en 0 pour \tilde{R} . Notons \tilde{m} la mesure caractéristique du p.p.p. des excursions de \tilde{R} hors de 0 à

valeurs dans $\Xi = \{ \omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \omega \text{ continue et absorbée en } 0 \}$ (ω n'est pas nécessairement issue de 0), et énonçons le

Théorème I.5. Sous \tilde{m} , le processus canonique a pour loi initiale

$\tilde{m}(\omega(0) = 0) = 0$ et $\tilde{m}(\omega(0) \in dx) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} dx$ ($x > 0$),
et est le carré d'un processus de Bessel de dimension $2d-2$ tué en 0.

Preuve. La loi initiale découle immédiatement du lemme I.1 et du théorème I.3 i). Considérons $x > 0$ et $\sigma(t) = \inf\{ s : H_s^X > t \}$ ($t < H^X(\xi^X)$). Une extension immédiate du lemme I.3 de Biane et Yor [3] montre que

($2R_{\sigma(t)} : 0 \leq t \leq H^X(\xi^X)$) est un $BESQ_{2x}(2d-2)$ (tué en 0).

Le lemme I.1 et le théorème I.3 ii) entraînent que ($\tilde{m} \mid \omega(0) = 2x$) est la loi du $BESQ_{2x}(2d-2)$. \square

Remarque. Nous avons vu dans la preuve du lemme I.4 que la mesure d'occupation de \tilde{R} ne charge pas $\{0\}$. Le coefficient de retard de \tilde{R} en 0 est nul, c'est-à-dire que 0 est une barrière instantanément réfléchissante pour \tilde{R} . \tilde{R} est donc complètement caractérisé par la donnée de sa mesure d'excursion (Itô [7], théorème 6.1). Enfin, pour répondre à une question posée dans l'Introduction, i) nous dit que \tilde{R} ne sort de 0 que par sauts.

Cette description nous permet par exemple de déterminer la loi de la durée de vie et de la hauteur de l'excursion: nous avons d'une part

$$\tilde{m}(v \in dt) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \int_0^\infty x^{d-2} \mathbb{P}(\xi(x, 2d-2) \in dt) dx,$$

où $\xi(x, 2d-2)$ désigne la durée de vie du carré de Bessel de dimension $2d-2$ issu de x . D'après Gettoor [5] et Gettoor et Sharpe [6], la loi de $\xi(x, 2d-2)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(\xi(x, 2d-2) \in dy) = \left(\frac{x^2}{2} \right)^{1-d/2} \frac{\exp(-x^2/2y)}{\Gamma(1-d/2)} y^{-1+d/2} dy,$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{m}(v \in dt) &= 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \int_0^\infty x^{d-2} (x/2)^{2-d} (\Gamma(2-d) t^{3-d})^{-1} \exp(-x/2t) dt \\ &= \frac{1-d}{\Gamma(d) \Gamma(2-d)} t^{d-2} dt = \frac{t^{d-2}}{\pi} \sin d\pi dt. \end{aligned}$$

De même, $x \mapsto x^{2-d}$ est une fonction d'échelle pour le $BESQ_x(2d-2)$, de sorte que, si h désigne la hauteur de l'excursion générique ω ,

$$\tilde{m}(h > y) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \left[\int_0^y x^{d-2} x^{2-d} y^{d-2} dx + \int_y^\infty x^{d-2} dx \right] = 2^{1-d} \frac{2-d}{\Gamma(d)} y^{d-1}.$$

Nous allons maintenant compléter l'étude de \tilde{R} en explicitant, grâce au calcul stochastique, son semi-groupe de transition :

Proposition I.6. Si k, x , et t sont trois réels positifs,

$$\mathbb{E}_x[\exp -k \tilde{R}_t] = \exp(-x/2t) [(1+2kt)^{1-d} \exp(x/(2+4kt)) - (2kt)^{1-d}] .$$

En particulier,

$$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_t \in dy) = \frac{1-d}{\Gamma(d)} (2t)^{1-d} y^{d-2} (1 - e^{-y/2t}) dy \quad (y > 0) .$$

Preuve. Nous avons vu dans [1] que pour toute fonction f de classe C^1 , si F désigne la primitive de f nulle en 0 ,

$$\exp\{ R_t^X f(H_t^X) + (1-d)F(H_t^X) - \frac{1}{2} \int_0^t (f' + f^2)(H_s^X) ds \}$$

est une martingale locale. Pour $a > 0$, $N \in \mathbb{N}$, en prenant $f(y) = 1/(y-a)$, on obtient par application du théorème d'arrêt

$\mathbb{P}_x(T^X(a) > T^X(-N)) = \exp(-x/a) [a/(a+N)]^{1-d}$
 $(T^X(y) = \inf\{ t : H_t^X = y \})$. D'autre part, si l'on prend $b > a$ et $f(y) = 1/(y-b)$, on obtient de même

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\exp\{ R_{T^X(a)} / (a-b) \} ((b-a)/a)^{1-d} 1_{\{ T^X(a) < T^X(-N) \}}] \\ + \exp(-x/a) \left[\frac{b+N}{b} \cdot \frac{a}{a+N} \right]^{1-d} = \exp(-x/b) , \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre N vers l'infini et en posant $k = 1/(b-a)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\exp(-k R_{T^X(a)})] &= \mathbb{E}_{2x}[\exp -\frac{k}{2} \tilde{R}_t] \\ &= \exp(-x/t) [(1+kt)^{1-d} \exp(x/(1+kt)) - (kt)^{1-d}] . \end{aligned}$$

Nous avons donc la première partie de la proposition. La seconde, quant à elle, découle de la première en prenant $x = 0$ et en inversant la transformée de Laplace. \square

4) Théorèmes limites relatifs à certains problèmes d'horloges fluctuantes :

Pour conclure ce paragraphe, nous allons montrer que \tilde{R} intervient de façon naturelle dans le problème, dit de l'horloge fluctuante, posé par Rogers et Williams [13] : considérons B un mouvement brownien réel, f une fonction localement intégrable, et notons

$$T(f,t) = \inf\{ s : \int_0^s f(B_u) du > t \} , \quad \tilde{B}_t = \tilde{B}(f,t) = B_{T(f,t)}$$

(avec la convention $B_\infty = \infty$). Au regard des travaux de Yamada [15], nous nous intéressons au comportement asymptotique de \tilde{B} sous l'hypothèse

(H): Il existe $\eta \in]0; \frac{1}{2}[$, $\eta' > \eta$ et g fonction continue à support compact, höldérienne d'ordre η' , dont la dérivée fractionnaire d'ordre η soit f , c'est-à-dire que

$$f = D^\eta g : x \mapsto \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{-\infty}^x (g(x) - g(a))(x-a)^{-1-\eta} da.$$

Nous avons le

Théorème I.7. Prenons $d = (1-2\eta)/(1-\eta)$. Alors

i) Si $\int_{\mathbb{R}} g(a) da < 0$, la suite de processus $(k^{1/(\eta-1)} \tilde{B}_{kt} : t \geq 0)$ converge en loi au sens des distributions finies dimensionnelles quand $k \uparrow \infty$ vers

$$\left[\left(\frac{4}{\Gamma(-\eta)} \int_{\mathbb{R}} g(a) da \right)^{1/(\eta-1)} \tilde{R}_t^{1/(1-\eta)} : t \geq 0 \right].$$

ii) Si $\int_{\mathbb{R}} g(a) da > 0$, alors pour tout t positif, $k^{1/(\eta-1)} \tilde{B}_{kt}$ converge vers 0 en probabilité quand k tend vers l'infini.

Preuve. Posons $f_k(x) = f(k^{1/2}x)$. Yamada [15] a montré que sous l'hypothèse (H),

(I.6): $k^{(1+\eta)/2} \int_0^t f_k(B_u) du$ converge p.s. uniformément sur tout compact vers

$$\frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left[\int_{\mathbb{R}} g(a) da \right] H(-1-\eta; t), \text{ où } H(-1-\eta; t) = \int_0^\infty (L_t^a(B) - L_t^0(B)) a^{-(1+\eta)} da$$

(la constante $\Gamma(-\eta)$ manque dans le théorème II.2 de Yamada; elle doit en effet être rajoutée dans son égalité (2.11) afin d'être en accord avec son lemme I.3). Supposons maintenant que $\int_{\mathbb{R}} g(a) da < 0$. Il découle de (I.6) que

$$\lim_{k \uparrow \infty} T(k^{(1+\eta)/2} f_k, t) = \inf \{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a) da \right] H(-1-\eta; s) / \Gamma(-\eta) > t \}$$

pour tout temps t en lequel

$$t \mapsto \inf \{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a) da \right] H(-1-\eta; s) / \Gamma(-\eta) > t \}$$

est continue, c'est-à-dire pour tout t p.s., comme on le voit aisément à l'aide de la proposition IV.5 de [1]. D'une part, d'après le paragraphe V de [1], si l'on pose $A(t) = \int_0^t 1_{\{B_s > 0\}} B_s^{-2\eta} ds$ et $d = \frac{1-2\eta}{1-\eta}$, $(R; H)$ a même loi

que $(B \circ A^{-1}(\cdot) / (1-\eta); H(-1-\eta; A^{-1}(\cdot)) / (2-2\eta))$; et c'est donc aussi le cas pour $\left[\frac{1-\eta}{2} \tilde{R}(\cdot / (2-2\eta)) \right]^{1/(1-\eta)}$ et $B(\inf \{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a) da \right] H(-1-\eta; s) / \Gamma(-\eta) > \cdot \})$.

Ainsi, $(\tilde{B}(k^{(1+\eta)/2} f_k, t) : t \geq 0)$ converge au sens des distributions finies dimensionnelles vers $\left[\left(\frac{1-\eta}{2} \tilde{R} \left(\frac{\Gamma(-\eta) t}{(\int g(a) da)(2-2\eta)} \right) \right)^{1/(1-\eta)} : t \geq 0 \right]$, processus qui, par scaling, a même loi que

$$\left[\left(\frac{4}{\Gamma(-\eta)} \int_{\mathbb{R}} g(a) da \right)^{1/(\eta-1)} \tilde{R}_t^{1/(1-\eta)} : t \geq 0 \right].$$

D'autre part, nous déduisons de l'égalité en loi

$$((B_{kt}; \int_0^{kt} f(B_u) du) : t \geq 0) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (k^{1/2} B_t; k \int_0^t f_k(B_u) du) : t \geq 0)$$

que

$$(k^{1/(\eta-1)} \tilde{B}(f, kt) : t \geq 0) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\tilde{B}(k^{(1+\eta)/2} f_k, t) : t \geq 0),$$

ce qui prouve i).

Enfin, si $\int g(a) da > 0$, alors

$$\lim_{k \uparrow \infty} T(k^{(1+\eta)/2} f_k, t) = \inf \{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a) da \right] H(-\eta; s) < \Gamma(-\eta)t \},$$

temps en lequel B est nul (puisque $\Gamma(-\eta) < 0$, voir lemme III.7 de [1]), et ii) est démontré. \square

II Un théorème de Ray-Knight pour la mesure d'occupation de $(R; H)$.

Intéressons nous maintenant à la description des valeurs prises par R sur l'ensemble des temps en lesquels l'horloge H vaut h . Il découle de la décomposition (I.3) des excursions de $(R; H)$ que p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, $\{s : H_s = h \text{ et } R_s > \varepsilon\}$ est discret. Ainsi,

$$\mu_t(h) = \sum_{s < t} 1_{\{R_s \neq 0; H_s = h\}} \delta_{R_s} \quad (t > 0, h \in \mathbb{R})$$

(où δ_x désigne la masse de Dirac au point x , à ne pas confondre avec $\delta(t)$, le temps local à l'instant t de $(R; H)$) est une mesure σ -finie sur \mathbb{R}_+^* . De plus (c.f. corollaire III.10 de [1]), p.s. pour tout h ,

$$(II.1): \quad \lambda_t^h \stackrel{\text{(déf)}}{=} 2 \langle \mu_t(h); Id \rangle = 2 \int_{]0; \infty[} x \mu_t(h)(dx) < \infty,$$

et $(\lambda_t^h : h \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ est une version mesurable des densités d'occupation de H , c'est-à-dire que pour toute fonction f borélienne bornée, on a

$$\int_0^t f(H_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(h) \lambda_t^h dh.$$

Nous en déduisons la désintégration suivante de la mesure d'occupation de $(R; H)$: pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$(II.2): \quad \int_0^t \phi(R_s; H_s) ds = 2 \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(x; h) \times \mu_t^*(h)(dx) .$$

Notons \mathcal{M}_p l'ensemble des mesures μ sur \mathbb{R}_+^* à valeurs entières, dont le support peut être rangé en une suite décroissante éventuellement finie (x_n) de réels strictement positifs (i.e. $\mu = \sum \alpha_n \delta_{x_n}$, $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$). \mathcal{M}_p , muni de la topologie de la convergence vague, est un espace métrisable localement compact. Rappelons que $T(-t)$ désigne le premier temps d'atteinte de $-t$ par H , et énonçons le

Lemme II.1. *Le processus $h \mapsto \mu_{T(-1)}(h)$ admet une version continue.*

Preuve. Soit f une fonction positive à support compact et de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$. Pour toute fonction ϕ borélienne bornée, nous avons d'après (II.2)

$$(II.3): \quad \int_0^{T(-1)} \phi(H_s) f(R_s) / R_s ds = 2 \int_{-1}^\infty dh \phi(h) < \mu_{T(-1)}(h); f > .$$

D'autre part, si nous définissons $\lambda_t^h(f)$ ($h \in \mathbb{R}$) par la formule de Tanaka

$$(II.4): \quad f(R_t) 1_{\{H_t > h\}} = \int_0^t 1_{\{H_s > h\}} f'(R_s) dR_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1_{\{H_s > h\}} f''(R_s) ds + \frac{1}{2} \lambda_t^h(f) ,$$

la formule d'Itô, valable pour toute fonction g de classe C^2 :

$$f(R_t)g(H_t) = \int_0^t g(H_s) f'(R_s) dR_s + \frac{1}{2} \int_0^t g(H_s) f''(R_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t g'(H_s) f(R_s) \frac{ds}{R_s} ,$$

entraîne que

$$\int_0^t g'(H_s) f(R_s) \frac{ds}{R_s} = \int_{\mathbb{R}} g'(h) \lambda_t^h(f) dh ,$$

et donc, d'après (II.3), $\lambda_t^h(f) = 2 < \mu_t(h); f >$ pour presque tout h . On montre aisément à l'aide du critère de Kolmogorov, des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de la formule (II.4) qu'il existe une version continue de $(t; h) \mapsto \lambda_t^h(f) - f(R_t) 1_{\{H_t > h\}}$. Comme $R_{T(-1)}$ est nul, il existe une version continue de $h \mapsto < \mu_{T(-1)}(h); f > = \frac{1}{2} \lambda_{T(-1)}^h(f)$. Rappelons qu'il existe une suite $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de fonctions positives à support compact et de classe C^∞ qui caractérise la convergence vague dans \mathcal{M}_p (i.e. $h \mapsto \mu(h)$ est continue si et seulement si pour tout n ,

$h \mapsto \langle \mu(h) ; f_n \rangle$ est continue); ce qui prouve le lemme. \square

Soit $\varphi :]0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. On note $M\varphi$ le monome

$$M\varphi : M_p \rightarrow [0, 1], \quad M\varphi\left(\sum \alpha_n \delta_{x_n}\right) = \prod \varphi(x_n)^{\alpha_n}.$$

Rappelons que, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, la tribu sur M_p engendrée par les polynômes (c'est-à-dire les combinaisons linéaires de monomes) est la tribu borélienne. Le principal résultat, de ce paragraphe, qui peut être interprété grâce à (II.2) comme un théorème du type de celui de Ray-Knight pour la mesure d'occupation de $(R; H)$ sur $[0; T(-1)]$, est le

Théorème II.2. Les processus $(\mu_{T(-1)}(h-1) : 0 \leq h \leq 1)$ et $(\mu_{T(-1)}(h) : 0 \leq h)$ sont Markoviens. Plus précisément, pour toute $\varphi :]0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ continue,

i) Si $-1 \leq h \leq k \leq 0$,

$$\mathbb{E}(M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)) = C(k-h, \varphi) M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)),$$

ii) Si $0 \leq h \leq k$,

$$\mathbb{E}(M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)) = M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)),$$

où

$$1/C(t, \varphi) = 1 + t^{1-d} \int_{\mathbb{R}_+} dy \frac{1-d}{\Gamma(d)} y^{d-2} \exp(-y/t) (1 - \varphi(y)),$$

$$\varphi_t(x) = \exp(-x/t) + C(t, \varphi) \int_0^\infty \varphi(y) p_t(x, y) dy,$$

$$\text{et } p_t(x, y) = \frac{2x}{t^2} (y/x)^{(d-1)/2} \exp\left(-\frac{x+y}{t}\right) \left[\frac{t}{2\sqrt{xy}} I_{d-2}\left(\frac{2\sqrt{xy}}{t}\right) - \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d-1)} \left(\frac{2\sqrt{xy}}{t}\right)^{d-3} \right].$$

Preuve. i) Considérons $-1 \leq h_1 < \dots < h_n < h < k \leq 0$, et $\psi_1, \dots, \psi_n, \psi, \varphi$, $n+2$ fonctions continues de \mathbb{R}_+^* dans $[0, 1]$. Notons

$$\Theta = \mathbb{E} \left[M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \times M\psi(\mu_{T(-1)}(h)) \times \prod_{j=1}^n M\psi_j(\mu_{T(-1)}(h_j)) \right],$$

et introduisons encore le temps $D(h) = \sup\{t < T(-1) : H_t = h\}$ (notons que R est nul en $T(-1)$ et $D(h)$; voir figure 2). Il découle de la propriété forte de Markov et de la théorie des excursions que les processus $((R; H)_t : 0 \leq t \leq T(h))$, $((R; H-h)_{t+T(h)} : 0 \leq t \leq D(h)-T(h))$ et $((R; H)_{t+D(h)} : 0 \leq t \leq T(-1)-D(h))$ sont indépendants; de plus le processus des excursions du deuxième est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{\{t > -1-h\}}$ m (c.f. notations du § I) tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $(1+h)^{d-1}$ (car $\delta(T(-1+h))$ suit une loi exponentielle de paramètre $(1+h)^{d-1}$, c.f. lemme II.2 de [2]).

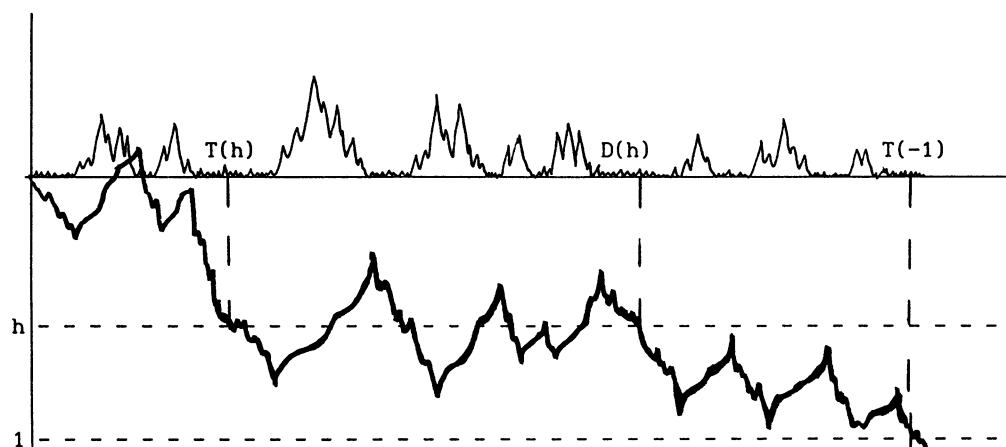


figure 2 (--- = R, — = H)

Par conséquent, $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3$, où

$$\Theta_1 = \mathbb{E} \left(\prod_{A_1} \varphi(R_S) \right), \quad A_1 = \{ s < T(h) : H_S = k, R_S \neq 0 \},$$

$$\Theta_2 = \mathbb{E} \left(\prod_{A_{21}} \varphi(R_S) \times \prod_{A_{22}} \psi(R_S) \times \prod_{j=1}^n \prod_{A_{23j}} \psi_j(R_S) \right),$$

avec $A_{21} = \{ s \in [T(h), D(h)] : H_S = k, R_S \neq 0 \},$

$$A_{22} = \{ s \in [T(h), D(h)] : H_S = h, R_S \neq 0 \},$$

$$A_{23j} = \{ s \in [T(h), D(h)] : H_S = h_j, R_S \neq 0 \},$$

et $\Theta_3 = \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^n \prod_{A_{3j}} \psi_j(R_S) \right), \quad A_{3j} = \{ s \in [D(h), T(-1)] : H_S = h_j, R_S \neq 0 \}.$

La formule pour les fonctionnelles multiplicatives de la théorie des excursions nous donne:

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int m(dw) 1_{i>-1-h} [1 - \psi(\omega^1(u)) \prod_{A_4} \varphi(\omega^1(r)) \prod_{j=1}^n \prod_{A_{5j}} \psi_j(\omega^1(r))],$$

où

$$A_4 = \{ r \leq v : \omega^2(r) = k-h; \omega^1(r) \neq 0 \} = \{ r \in [u, v] : \omega^2(r) = k-h; \omega^1(r) \neq 0 \}$$

$$A_{5j} = \{ r \leq v : \omega^2(r) = h_j-h; \omega^1(r) \neq 0 \} = \{ r \in [0, u] : \omega^2(r) = h_j-h; \omega^1(r) \neq 0 \}.$$

Comme sous $m(\cdot | \omega^1(u)=x), (\omega(u+r) : 0 \leq r \leq v-u)$ et $((\omega^1(u-r); -\omega^2(u-r)) : 0 \leq r \leq u)$ sont indépendants et ont même loi que $((R^X; H^X)_r : 0 \leq r \leq T^X(0))$ (voir (I.3)),

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int_0^\infty dx \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} \times$$

$$[P(T^X(0) < T^X(1+h)) - \varphi(x) E(1_{T^X(0) > T^X(1+h)} \prod_{j=1}^n \prod_{A_{6j}} \psi_j(R_S^X)) \times E(\prod_{A_7} \varphi(R_S^X))] ,$$

où

$$A_{6j} = \{ s < T^X(0) : H_S^X = h-h_j, R_S^X \neq 0 \} \text{ et } A_7 = \{ s < T^X(0) : H_S^X = k-h, R_S^X \neq 0 \} .$$

Si nous notons

$$\varphi_{k-h}(x) = E(\prod_{A_7} \varphi(R_S^X)) ,$$

nous avons alors

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int_0^\infty dx \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} \times$$

$$[P(T^X(0) < T^X(1+h)) - \varphi_{k-h}(x) \varphi(x) E(1_{T^X(0) > T^X(1+h)} \prod_{j=1}^n \prod_{A_{6j}} \psi_j(R_S^X))] \\ = 1/E(\prod_{A_{22}} \varphi_{k-h}(R_S) \times \prod_{A_{22}} \psi(R_S) \times \prod_{j=1}^n \prod_{A_{23j}} \psi_j(R_S)) .$$

Finalement, nous avons obtenu

$$\Theta = \Theta_1 E[M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) \times M\psi(\mu_{T(-1)}(h)) \times \prod_{j=1}^n M\psi_j(\mu_{T(-1)}(h_j))] .$$

Par classe monotone, $\mu_{T(-1)}(k)$ et $(\mu_{T(-1)}(h_j) : j = 1 \text{ à } n)$ sont indépendants conditionnellement à $\mu_{T(-1)}(h)$, et

$$E(M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)) = \Theta_1 M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) .$$

Il nous reste à expliciter le membre de droite de cette égalité. Grâce à la propriété forte de Markov,

$$\Theta_1 = E(\prod_{A_8} \varphi(R_S)) , \text{ où } A_8 = \{ s < T(h-k) : H_S = 0 \text{ et } R_S \neq 0 \} .$$

Comme plus haut, le processus des excursions de $(R;H)$ effectuées (en totalité) avant $T(h-k)$ est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{t>h-k}$ m tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $(k-h)^{d-1}$. La formule pour les fonctionnelles multiplicatives de la théorie des excursions nous donne

$$1/\Theta_1 = 1 + (k-h)^{1-d} \int_0^\infty dy \frac{1-d}{\Gamma(d)} y^{d-2} (1-\varphi(y)) P(T^Y(0) < T^Y(h-k)) ,$$

et l'on montre aisément à l'aide du calcul stochastique que

$$P(T^Y(0) < T^Y(h-k)) = \exp\{-y/(k-h)\} .$$

Nous avons alors

$$1/\Theta_1 = 1/C(k-h, \varphi) = 1 + (k-h)^{1-d} \int_0^\infty dy \frac{1-d}{\Gamma(d)} y^{d-2} (1-\varphi(y)) \exp\{-y/(k-h)\} dy.$$

Calculons maintenant $\varphi_t(x)$ ($t=k-h$).

D'une part,

$$P(A_7=\emptyset) = P(T^x(0) < T^x(t)) = \exp -x/t.$$

D'autre part, sur $T^x(t) < T^x(0)$, introduisons

$$V^x(t) = \inf\{r > T^x(t) : H_r^x = t\}, \quad D^x(t) = \sup\{r < T^x(0) : H_r^x = t\}$$

(H^x est strictement croissant sur un voisinage de $T^x(t)$, $V^x(t)$ est le deuxième temps de passage de H^x en t , $D^x(t)$ le dernier temps de passage en t avant $T^x(0)$, et bien sûr, R^x est nul en $V^x(t)$ et en $D^x(t)$). Conditionnellement à $T^x(t) < T^x(0)$, les processus $((R^x; H^x)_r : 0 \leq r \leq V^x(t))$, $((R^x; H^x - t)_{r+V^x(t)} : 0 \leq r \leq D^x(t) - V^x(t))$ et $((R^x; H^x)_{r+D^x(t)} : 0 \leq r \leq T^x(0) - D^x(t))$ sont indépendants, et le processus des excursions du deuxième est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{\{i>-t\}}$ m tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre t^{d-1} . En découpant la trajectoire en $V^x(t)$ et $D^x(t)$, nous obtenons

$$\varphi_t(x) = e^{-x/t} + \int_0^\infty \varphi(y) p_t(x, dy) \left[1 + t^{1-d} \int_0^\infty ds \frac{1-d}{\Gamma(d)} s^{d-2} (1-\varphi(s)) \exp(-s/t) ds \right]^{-1},$$

où $p_t(x, dy) = P_x(R^x(T^x(t)) \in dy ; T^x(t) < T^x(0))$. De même que dans la proposition I.6, le calcul stochastique donne pour tout γ positif,

$$(II.5): \quad E[\exp\{-\gamma R^x(T^x(t))\} 1_{\{T^x(t) < T^x(0)\}}] \\ = (1+\gamma t)^{1-d} [\exp(-\gamma x/(1+\gamma t)) - \exp(-x/t)],$$

d'où l'on déduit, par inversion de la transformée de Laplace, l'expression de $p_t(x, dy) = p_t(x, y) dy$ donnée dans l'énoncé du théorème.

ii) se démontre par des arguments analogues à ceux employés pour i) . \square

On obtient de même un second théorème du type précédent en remplaçant $T(-1)$ par $\delta^{-1}(1)$ (c'est-à-dire par le premier instant où le temps local de $(R; H)$ vaut 1) :

Théorème II.3. Les processus $(\mu_{\delta^{-1}(1)}^{(-h)} : h \geq 0)$ et $(\mu_{\delta^{-1}(1)}^{(h)} : h \geq 0)$ sont Markoviens et continus. Ils ont même loi et sont indépendants conditionnellement à $\mu_{\delta^{-1}(1)}^{(0)}$. Pour toute fonction continue φ à valeurs dans $[0; 1]$ et pour tout $0 \leq h \leq k$, on a

$$E(M\varphi_{\mu_{\delta^{-1}(1)}^{(k)}} \mid \mu_{\delta^{-1}(1)}^{(h)}) = M\varphi_{\mu_{\delta^{-1}(1)}^{(k-h)}}.$$

Pour conclure, notons que ces deux résultats permettent de retrouver très rapidement les théorèmes de Ray-Knight pour les densités d'occupation de H (théorèmes IV.1 de [1] et IV.2 de [2]) que nous rappelons ci-dessous:

Corollaire II.4. i) $(\lambda_{T(-1)}^{h-1} : 0 \leq h \leq 1)$ est un $BESQ_0(2-2d)$.

ii) Conditionnellement à $\lambda_{T(-1)}^0 = x$, $(\lambda_{T(-1)}^h : h \geq 0)$ est un $BESQ_x(0)$.

iii) Conditionnellement à $\lambda_{\delta^{-1}(x)}^0 = x$, $(\lambda_{\delta^{-1}(x)}^h : h \geq 0)$ est un $BESQ_x(0)$.

Preuve. Soit $\theta > 0$ et $\varphi(x) = e^{-\theta x}$. D'après (II.1), $M\varphi(\mu_t(h)) = \exp - \frac{\theta}{2} \lambda_t^h$, et l'on trouve $C(t, \varphi) = (1+\theta t)^{d-1}$. Enfin, grâce à (II.5),

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= \exp(-x/t) + (1+\theta t)^{d-1} (1+\theta t)^{1-d} [\exp(-x\theta/(1+\theta t)) - \exp(-x/t)] \\ &= \exp(-x\theta/(1+\theta t)). \end{aligned}$$

Les théorèmes II.2.i, ii et II.3 entraînent respectivement i, ii et iii. \square

REFERENCES

- [1] J. Bertoin : Complements on the Hilbert transform and the fractional derivatives of brownian local times, à paraître dans J.Math. Kyoto Univ.
- [2] J. Bertoin : Excursions of a $BES_0(d)$ and its drift term ($0 < d < 1$), à paraître dans Probab. Th. Rel. Fields.
- [3] Ph. Biane et M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, Bull.Sc.Math. 2^{ème} série 111 (1987), p. 23-101.
- [4] R.M. Blumenthal et R.K. Gettoor : *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press (1968).
- [5] R.K. Gettoor : The brownian escape process, Annals of Probab. 5, t.7 (1979), p. 864-867.
- [6] R.K. Gettoor et M.J. Sharpe : Excursions of brownian motion and Bessel processes, Z.f.W. 47 (1979), p. 83-106.
- [7] K. Itô : Poisson point process attached to Markov processes, Proc. 6th Berkeley Symp. vol.III (1971), p. 225-239.
- [8] R.R. London, H.P. Mc Kean, L.C.G. Rogers et D. Williams : A martingale approach to some Wiener-Hopf problems I , Séminaire de Probabilités XVI , Lect. Notes in Math. n° 920 (1981), p. 41-67.
- [9] P. Mc Gill : Wiener-Hopf factorisation of Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields 83 (1989), p. 355-389.
- [10] B. Maisonneuve : Changement de temps d'un processus de Markov additif, Séminaire de Probabilités XI, Lect. Notes in Math. n° 528 (1977), p.529-538.
- [11] L.C.G. Rogers : Wiener-Hopf factorization of diffusions and Lévy processes, Proc. London Math. Soc. 47 (1983), p. 177-191.
- [12] L.C.G. Rogers : A new identity for real Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré vol.20 n°1 (1984), p. 21-34.
- [13] L.C.G. Rogers et D. Williams : Time substitution based on fluctuating additive functionals (Wiener-Hopf factorization for infinitesimal generators), Séminaire de Probabilités XIV , Lect. Notes in Math. n° 784 (1979), p. 332-342.
- [14] D. Williams : On Lévy's downcrossing theorem, Z.f.W. 40 (1977), p. 157-158.
- [15] T. Yamada : On some limit theorems for occupation times of one dimensional brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy, J.Math. Kyoto Univ. vol. 26-2 (1986), p. 309-322.