Rémi Léandre
Michel Weber

Une représentation gaussienne de l'indice d'un opérateur

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 105-106
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__105_0>

UNE REPRESENTATION GAUSSIENNE DE
L'INDICE D'UN OPERATEUR

Rémi LEANDRE et Michel WEBER

Soit M une variété compacte de dimension n, S_+ et S_- deux fibrés complexes hermitiens sur M. On désignera par φ^+ (resp. φ^-), une section de S_+ (resp. S^-). Soit D_+ un opérateur pseudo-différentiel ([G], chap. 1.3) elliptique d'ordre d de S_+ sur S_-, et soit D_- son adjoint. Puisque M est compacte, il possède un indice fini. On note D^2 l'opérateur sur $S_+ \oplus S_-$ égal à D_-D_+ sur S_+ et D_+D_- sur S_-, préservant la décomposition de $S_+ \oplus S_-$. Alors D_-D_+ et D_+D_- possèdent un spectre discret $\{ \lambda_{i,+} \}$ et $\{ \lambda_{i,-} \}$. Si $\lambda_{i,+}$ est une valeur propre non nulle d'ordre r pour D_-D_+, $\lambda_{i,+}$ est encore une valeur propre de D_+D_- et de même ordre. De plus, on a classiquement,([G], chap. 1.7)

$$(1)\ \zeta(s) = \sum_{\lambda_{i,+}\neq 0} (\lambda_{i,+})^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}(\mathrm{tr}\ \exp[-tD_-D_+] - \dim\mathrm{Ker}D_-D_+)\, dt$$

Lorsque t tend vers zéro, on a ([G], chap. 1.7, lemme 1.7.4),

$$(2)\ \mathrm{tr}\ \exp[-tD_-D_+] = \Sigma_{i=0}^{n} \int_M a_i^+(x)\ t^{(i-n)/2d}\, dx + o(t);$$

la série dans (1) converge donc pour tout $s>s_0=n/2d$. Il en est de même pour la série $\sum_{\lambda_{i,-}\neq 0} 1/\lambda_{i,-}^s$. Soit m un réel positif. On conclut que

$$(3)\ \mathrm{Ind}(\ D_+\ ) = m\{ \sum_i 1/[\lambda_{i,+}^s + m] - \sum_i 1/[\lambda_{i,-}^s + m] \}.$$

Soit $P_{+,s}$ le champ gaussien sur l'ensemble des sections φ_+ de S_+, de covariance $(m + (D_-D_+))^{-1}$, et $P_{-,s}$ le champ ''symétrique'' sur l'ensemble des sections φ_- de S_- de covariance $(m + (D_+D_-))^{-1}$. Soit $\{ \varphi_i^+ \}$ un système orthonormé de vecteurs propres associé à $\{ \lambda_i^+ \}$; et soit $\{ \eta_i^+ \}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées réduites. Le champ gaussien $P_{+,s}$ peut-être représenté suivant le développement convergent dans L^2

$$\sum_i [\lambda_{i,+}^s + m]^{-1/2}\ \eta_i^+\ \varphi_i^+ .$$

On a une représentation analogue pour le champ $P_{-,s}$.

Théorème: Pour tout $s>s_0$, on a la représentation suivante de l'indice de D_+

$$(4)\quad \mathrm{Ind}(D_+) = m\{ E_{+,s}[\ |\varphi^+|^2\ ] - E_{-,s}[\ |\varphi^-|^2\ ]\ \} .$$

Preuve: Il suffit d'observer que

$$(5)\quad E_{+,s}[\ |\varphi^+|^2\ ] = E[\ \sum_{i,j} (\lambda_{i,+}^s + m)^{-1/2} (\lambda_{j,+}^s + m)^{-1/2}\ \eta_i^+\eta_j^+ \ \langle\varphi_i^+,\varphi_j^+\rangle\ ],$$

$$= \sum_i (\lambda_{i,+}^s + m)^{-1} \quad ,$$

puisque la suite $\{ \eta_i^+ \}$ est gaussienne indépendante centrée réduite.
On a de la même façon

$$(5')\quad E_{-,s}[\ |\varphi^-|^2\ ] = \sum_i (\lambda_{i,-}^s + m)^{-1} \quad .$$

On conclut en appliquant (5) et (5') à (3).

Remerciements: Nous remercions D. Bennequin et P.A. Meyer pour d'utiles suggestions.

References:

[G] GILKEY, P.B. Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem. Boston Publish. and Perish, (1984).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C.N.R.S.,
Université Louis-Pasteur,
67084 Strasbourg Cedex .