SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LUCA PRATELLI

La loi des grands nombres pour une suite échangeable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 527-530
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__527_0>

LA LOI DES GRANDS NOMBRES POUR UNE SUITE ECHANGEABLE

Luca Pratelli
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa

Résumé - On expose une démonstration élémentaire de la loi forte des grands nombres pour une suite échangeable de variables aléatoires réelles intégrables.

La loi forte des grands nombres pour une suite échangeable de variables aléatoires réelles et le théorème de de Finetti sont deux résultats étroitement liés. D'une part, le théorème de de Finetti (ainsi que le théorème de Hewitt-Savage) peut être démontré aisément à l'aide de la loi des grands nombres (voir, par ex., [1]). D'autre part, la loi forte des grands nombres pour une suite échangeable peut être ramenée, à l'aide du théorème de de Finetti, au cas particulier de l'indépendance (c'est-à-dire à la loi forte de Kolmogorov).

Les démonstrations qu'on donne couramment soit du théorème de de Finetti, soit de la loi forte des grands nombres pour une suite échangeable, sont fondées sur la théorie des martingales à temps discret (voir, par ex., [1], [2]). Une démonstration différente des théorèmes de de Finetti et de Hewitt-Savage a été proposée récemment par G. Letta [3]. Même si cette démonstration n'utilise pas la théorie des martingales, elle s'appuie sur certains résultats classiques d'analyse fonctionnelle (tels que le théorème de Dunford-Pettis), qui ne sont pas d'un niveau vraiment élémentaire.

Dans le présent article nous proposons, par contre, une démonstration directe et tout à fait élémentaire de la loi forte des grands nombres pour une suite échangeable.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on se donne une suite échangeable $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles, et l'on pose:

$$S_n = X_1+\ldots+X_n \quad , \quad Y_n = S_n/n.$$

On désigne en outre par $\mathcal{T}$ la tribu terminale (ou asymptotique) relative à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

On se propose de démontrer de façon élémentaire la version suivante de la loi des grands nombres:

THEOREME. Supposons les X_n intégrables.

La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge alors presque sûrement et dans L^1 vers l'espérance conditionnelle de X_1 par rapport à la tribu $\mathcal{T}$.

Ce résultat va être une conséquence immédiate des trois petits lemmes suivants.

LEMME 1. Supposons les X_n intégrables. Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, et posons

$$X'_n = f\circ X_n \ , \quad S'_n = X'_1+\ldots+X'_n \ , \quad Y'_n = S'_n/n.$$

On a alors

$$E[\,|Y_n - Y'_n|\,] \leq E[\,|X_1 - X'_1|\,]\ .$$

Démonstration. La quantité $E[\,|X_i-X'_i|\,] = E[\,|X_i-f\circ X_i|\,]$ ne dépend que de la loi de X_i. Elle est donc constante par rapport à i. Il en résulte

$$E[\,|Y_n - Y'_n|\,] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\,|X_i - X'_i|\,] = E[\,|X_1 - X'_1|\,].$$

LEMME 2. Supposons les X_n de carré intégrable.

On a alors

$$E[\,(Y_m - Y_n)^2] = E[Y_m^2] - E[Y_n^2] \quad \text{pour} \quad 1 \leq m \leq n.$$

Par conséquent, la suite $(E[Y_n^2])_{n\geq 1}$ est décroissante, et la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans L^2.

Démonstration. Posons $a = E[X_1^2]$, $b = E[X_1X_2]$. Pour tout couple m,n d'entiers, avec $1 \leq m \leq n$, l'espérance de S_mS_n est la somme des m termes du type $E[X_i^2]$ avec $1 \leq i \leq m$ (qui sont tous égaux à a) et des $m(n-1)$ termes du type $E[X_iX_j]$ avec $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, $i\neq j$ (qui sont tous égaux à b). On a donc

$$E[Y_m Y_n] = \frac{1}{mn}(ma + m(n-1)b) = \frac{1}{n}(a + (n-1)b) = E[Y_n^2],$$

d'où la conclusion.

LEMME 3. <u>Supposons les</u> X_n <u>intégrables</u>.
<u>On a alors</u>

$$\varepsilon P\{\sup_{m\le j<n} |Y_n - Y_j| > \varepsilon\} \le E[|Y_n - Y_m|]$$

<u>pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>et tout couple</u> m,n <u>d'entiers, avec</u> $1 \le m < n$.

<u>Démonstration</u>. Posons

$$T = \sup\{j : m \le j < n, |Y_n - Y_j| > \varepsilon\}$$

(avec la convention $\sup \emptyset = -\infty$). On a alors

$$\{\sup_{m\le j<n} |Y_n - Y_j| > \varepsilon\} = \{T \ge m\} = \bigcup_{m\le j<n} \{T = j\}.$$

Fixons j (avec $m \le j < n$) et remarquons que l'on a

$$\begin{aligned}\varepsilon P\{T = j\} &\le \int_{\{T=j\}} |Y_n - Y_j|\,dP \\ &= \int_{\{T=j, Y_j<Y_n\}} (Y_n - Y_j)\,dP + \int_{\{T=j, Y_n<Y_j\}} (Y_j - Y_n)\,dP \\ &= \int_{\{T=j, Y_j<Y_n\}} (Y_n - Y_m)\,dP + \int_{\{T=j, Y_n<Y_j\}} (Y_m - Y_n)\,dP,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due au fait que la suite $(X_i)_{i\ge 1}$ est échangeable. Sommons sur j. Il vient

$$\varepsilon P\{T \ge m\} \le \int_A (Y_n - Y_m)\,dP + \int_B (Y_m - Y_n)\,dP,$$

où A, B désignent les ensembles définis comme suit:

$$A = \bigcup_{m\le j<n} \{T=j, Y_j<Y_n\}, \quad B = \bigcup_{m\le j<n} \{T=j, Y_n<Y_j\}.$$

Puisque ces deux ensembles sont disjoints, le lemme est démontré.

Démonstration du Théorème

(a) Montrons d'abord que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans L^1. Puisque X_1 est intégrable, on peut choisir, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction f, borélienne bornée su $\mathbb{R}$, telle que l'on ait

$$E[\,|X_1 - f\circ X_1|\,] < \varepsilon .$$

Grâce au Lemme 1, ceci permet de se ramener au cas où les X_n sont bornées (donc de carré intégrable). La conclusion résulte alors du Lemme 2.

(b) Montrons maintenant que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Ceci résulte immédiatement de (a), grâce au Lemme 3.

(c) Vérifions enfin que la variable aléatoire $Y = \limsup_n Y_n$ (évidemment $\mathcal{T}$-mesurable) est une version de $E[X_1|\mathcal{T}]$.

Il suffit pour cela de remarquer que, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{T}$-mesurable bornée, on a

$$E[Y_n Z] = E[X_1 Z] \quad \text{pour tout } n,$$

d'où

$$E[YZ] = E[X_1 Z] \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. DABONI, A. WEDLIN, Statistica. UTET, 1982

[2] C. DELLACHERIE, P.-A. MEYER, Probabilités et potentiel. Chap. V à VIII.

[3] G. LETTA, Sur les théorèmes de Hewitt-Savage et de de Finetti. Séminaire de Probabilités XXIII (à paraître).