SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Sur la transformée de Fourier de H. H. Kuo

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 393-394
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__393_0>

SUR LA TRANSFORMEE DE FOURIER DE H.H. KUO

par J.A. YAN
Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing

La transformation de Fourier classique dans $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}g(u) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^d \int e^{-iux} g(x)\,dx$ échange les opérateurs D_j de dérivation et M_j de multiplication par x_j

$$\mathcal{F}D_j = iM_j\mathcal{F} \quad ; \quad \mathcal{F}M_j = iD_j\mathcal{F} \, .$$

Dans l'article [1], H.H. Kuo a cherché à décrire une transformation des distributions sur l'espace de Wiener possédant la même propriété, i.e. échangeant l'opérateur $-i\partial_t$ et l'opérateur de multiplication par $\dot{B}_t$, le système $\{\dot{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ jouant formellement le rôle du système de coordonnées. Malheureusement, sa définition est très formelle et nous emble un peu obscure. A l'aide des résultats de l'exposé précédent, nous pouvons donner une expression explicite de la transformation de Fourier de Kuo, et montrer qu'elle préserve l'espace des distributions de Kubo–Yokoi.

Notre point de départ sera la remarque suivante sur la transformation de Fourier classique. Soit γ la mesure Gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$. Pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ définissons la fonction caractéristique de ϕ par la formule

$$U_\phi(x) = e^{-<x,x>/2} \int e^{<x,y>} \phi(y) \gamma(dy) \, .$$

Il est alors facile de vérifier que la f.c. de la transformée de Fourier ordinaire $\hat{\phi}$ est donnée par

$$U_{\hat{\phi}}(x) = U_\phi(-ix)\, e^{-<x,x>/2} \, .$$

Cette égalité nous suggère un moyen de définir la transformation de Fourier pour les distributions sur l'espace de Wiener.

Nous aurons besoin des notations suivantes : si T est une distribution (complexe) sur l'espace de Wiener, sa fonction caractéristique $U(T,\cdot)$ est la fonction sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par

$$U(T,\xi) = <\mathcal{E}(\xi), T>$$

où $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ peut être complexe, et où $<,>$ dans cette note doit être toujours compris au sens bilinéaire, et jamais hermitien. Nous définissons la *transformation de Fourier-Wiener* $\mathcal{W}$ comme l'opérateur unitaire qui opère sur L^2, sur les fonctions-test de Kubo–Yokoi, et sur les distributions, en multipliant par $(-i)^n$ le coefficient du n-ième chaos. Ainsi

$\mathcal{W}(\mathcal{E}(\xi))=\mathcal{E}(-i\xi)$. Il est clair que $\mathcal{W}$ est une application linéaire continue de l'espace des fonctions–test ou des distributions sur lui même. On a d'autre part

$$W^{-1}a_f^- W = -ia_f^- \quad ; \quad W^{-1}a_f^+ W = ia_f^+ \ . \tag{1}$$

La "transformation de Fourier" proposée par Kuo peut être présentée de la manière suivante : c'est l'application de l'espace des distributions dans lui même

$$T \longmapsto \mathcal{F}(T) = \varepsilon_0 : \mathcal{W}(T) \tag{2}$$

où ε_0 est la distribution "valeur en 0" dont la f. c. est $\exp(-<\xi,\xi>/2)$, et $:$ est le produit de Wick. Sur les fonctions caractéristiques, le produit de Wick se lit en effet comme une multiplication et l'on a bien

$$U(\mathcal{F}(T),\xi) = U(T,-i\xi)\,e^{-<\xi,\xi>/2}$$

Remarquons que cette transformation ne préserve pas les fonctions–test, mais qu'elle applique continûment l'espace des distributions sur lui même, car ε_0 est inversible pour le produit de Wick, la fonction $\exp(<\xi,\xi>/2)$ étant f.c. de la distribution $\mathcal{W}(\varepsilon_0)$.

Nous allons vérifier que $\mathcal{F}$ échange bien dérivation et multiplication.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *réelle*; l'opérateur de dérivation D_f suivant f est aussi l'opérateur d'annihilation a_f^-, tandis que l'opérateur de création a_f^+ est le produit de Wick avec f, en identifiant toujours f à l'élément correspondant du premier chaos (*i.e.* l'intégrale stochastique $\int f(s)\,dB_s = \int f(s)\,\dot{B}(s)\,ds$). On a donc

$$U(D_f T,\xi) = <\mathcal{E}(\xi), a_f^- T> = <a_f^+\mathcal{E}(\xi), T> =$$
$$<\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\xi+tf)\mid_{t=0}, T> = D_f U(T,\xi)\ .$$

En particulier, le calcul de la f.c. de $D_f\varepsilon_0$ montre que cette distribution vaut $-f{:}\varepsilon_0$. Désignons alors par Θ l'opérateur de produit de Wick par ε_0, qui commute avec a_f^+. On a d'après le calcul précédent, D_f étant une dérivation pour le produit de Wick

$$a_f^-\Theta = \Theta\,(a_f^- - a_f^+)\ . \tag{3}$$

Sachant que $\mathcal{F} = \Theta\mathcal{W}$, prouvons la relation $M_f\mathcal{F} = -i\,\mathcal{F}D_f$. Le côté gauche s'écrit (en omettant l'indice f) $(a^+ + a^-)\Theta\mathcal{W} = \Theta a^-\mathcal{W}$ d'après (3). Il ne reste plus qu'à appliquer (1). De même pour l'autre relation $\mathcal{F}M_f = i\,D_f\mathcal{F}$.

Il faut noter que le problème considéré par Kuo n'est pas très naturel dans une situation gaussienne, où l'opérateur iD_f, n'étant pas autoadjoint, n'est pas le véritable conjugué de M_f. Cependant, le fait que la transformation de Kuo opère continûment sur les distributions est intéressant.

L'auteur remercie P.A. Meyer pour plusieurs discussions sur le sujet de cette note.

[1] KUO (H.H.). On Fourier transforms of generalized Brownian functionals. *J. Multivar. Anal.* 12, 1982, 415–431.