SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER
JIA-AN YAN

Distributions sur l'espace de Wiener (suite), d'après Kubo et Yokoi

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 382-392
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__382_0>

DISTRIBUTIONS SUR L'ESPACE DE WIENER (SUITE)

d'après I. KUBO et Y. YOKOI

par P.A. MEYER et J.A. YAN

Cet exposé est une mise au point sur divers travaux récents concernant les distributions sur l'espace de Wiener. En particulier, nous présentons un espace de fonctions–test et de distributions défini par I. Kubo et Y. Yokoi, avec quelques applications nouvelles. Les résultats de K–Y, antérieurs à notre travail du *Sém. XXI*, ne sont pas encore publiés. Ils sont l'illustration concrète de théorèmes généraux de Kubo–Takenaka, qui n'ont pas non plus fait l'objet d'une publication détaillée. C'est pourquoi nous donnons dans cet exposé des démonstrations presque complètes. Nous remercions J. Potthoff de nous avoir fait connaître ces articles.

1. L'espace de Fock au dessus d'un espace nucléaire. Nous devons malheureusement commencer par quelques rappels et considérations abstraites. Rappelons d'abord que, pour tout espace de Hilbert H, l'espace de Fock (symétrique) $\mathcal{F}(H)$ construit sur H est l'ensemble des sommes

$$f = \sum_n \frac{1}{n!} f_n \quad \text{avec} \quad f_n \in H^{\otimes n} , \tag{1}$$

telles que les f_n soient symétriques et que la série suivante soit convergente

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|f_n\|^2 . \tag{2}$$

Ceci n'est pas exactement la définition de *Sém. Prob. XX*, p. 249–251, et en particulier l'insertion des factorielles nous évite d'utiliser deux normes différentes pour les tenseurs ordinaires et symétriques. Etant donnée une application linéaire $u \;:\; H \longrightarrow H'$ entre deux espaces de Hilbert, on définit (même réf., p. 257) la "seconde quantification" de u, $\mathcal{F}(u) \;:\; \mathcal{F}(H) \longrightarrow \mathcal{F}(H')$, continue si $\|u\| \leq 1$, et on vérifie sans peine qu'elle est de Hilbert-Schmidt si $\|u\|_{HS} < 1$.

Le cas le plus intéressant pour nous sera celui de $H = L^2(\mathbb{R})$; on sait qu'alors $\mathcal{F}(H) = L^2(\Omega)$, l'espace de Wiener. Plus précisément, nous avons utilisé $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+$ pour éviter la singularité en 0, et la mesure de Wiener est construite sur l'ensemble Ω des trajectoires continues nulles en 0 *définies sur* $\mathbb{R}$, les processus de coordonnées $(B_t)_{t\geq 0}$

et $(B_{-t})_{t \geq 0}$ étant deux mouvements browniens ordinaires indépendants. La représentation (1) prend alors la forme familière du développement en chaos de Wiener

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(f_n) , \tag{1'}$$

où f_0 est la constante $\mathbb{E}[f]$, et pour $n > 0$ $I_n(f_n)$ est l'intégrale multiple d'Ito d'une fonction symétrique appartenant à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Revenons au cas général, et considérons un espace nucléaire $K \subset H$ défini comme intersection d'une suite de sous-espaces de H munis de topologies de plus en plus fortes

$$\ldots H_{k+1} \xrightarrow[i_k]{} H_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_1 \xrightarrow[i_0]{} H_0 \ , \tag{3}$$

avec $H_0 = H$, chaque injection i_k ayant une norme $< c < 1$, et étant de Hilbert-Schmidt. En passant aux espaces de Fock, on obtient une suite d'espaces hilbertiens avec injections continues

$$\ldots \mathcal{F}(H_{k+1}) \xrightarrow[\mathcal{F}(i_k)]{} \mathcal{F}(H_k) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}(H_1) \xrightarrow[\mathcal{F}(i_0)]{} \mathcal{F}(H_0) \ , \tag{4}$$

les injections $\mathcal{F}(i_k)$ étant des contractions. Pour tout k il existe un $\ell > k$ tel que l'injection de H_ℓ dans H_k ait une norme de Hilbert-Schmidt < 1, ce qui en passant aux espaces de Fock va donner une injection de Hilbert-Schmidt. L'intersection des espaces $\mathcal{F}(H_k)$ de v.a., avec la topologie définie par la famille des normes hilbertiennes correspondantes, est alors un espace nucléaire, que nous noterons ici $\mathcal{N}(K)$, une sorte d'espace de Fock au dessus de l'espace nucléaire K.

Si l'on remplace la norme de H_k par une norme équivalente, on n'obtient pas le même espace de Fock $\mathcal{F}(H_k)$. Mais cela ne présente pas d'inconvénient sérieux. Soit en effet L un espace de Hilbert tel que $K \subset L \subset H$ avec injections continues. Il existe alors un H_k tel que $H_k \subset L$ avec injection continue, puis en remontant en arrière un ℓ tel que l'injection de H_ℓ dans L ait une norme < 1. On peut alors passer aux Fock et voir que $\mathcal{F}(K) \subset \mathcal{F}(L)$ avec injection continue.

Cette remarque permet de voir les choses d'une manière un peu différente, indépendante du choix d'une suite du type (3) : *L'espace $\mathcal{F}(K)$ est l'intersection de tous les espaces de Fock $\mathcal{F}(L)$, où L est le complété de K pour une norme hilbertienne continue sur K.* Autrement dit, toute forme quadratique positive continue q sur K, définissant donc une (semi)-norme hilbertienne continue $\|\cdot\| = \sqrt{q(.)}$, se prolonge en une forme quadratique positive continue sur $\mathcal{F}(K)$ (désignée encore par q), telle que l'on ait, si $f \in \mathcal{F}(K)$ est représentée sous la forme (1)

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^{\otimes n}(f_n) < \infty \, . \tag{5}$$

Mais si l'on remplace la forme quadratique q par tq avec $q > 0$, on voit qu'en fait la série $\sum_n \frac{t^n}{n!} q^{\otimes n}(f_n)$ est convergente. Par conséquent, en revenant à (3), $f \in \mathcal{F}(H)$ donnée par

(1) appartient à $\mathcal{F}(K)$ si et seulement si l'on a, pour tout entier $k \geq 0$ et tout $t > 0$

$$\|f\|^2_{(k,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|f_n\|^2_k < \infty \,, \tag{6}$$

la norme utilisée du côté droit étant celle de $H_k^{\otimes n}$. L'espace des éléments de $\mathcal{F}(H)$ pour lesquelles cette norme est finie sera noté $H_{(k,t)}$, et simplement $H_{(k)}$ si $t=1$.

ILLUSTRATION. Avant de passer à l'espace de Wiener, nous allons traiter le cas où $H=K$ est de dimension 1, exemple instructif, que nous retrouverons à plusieurs reprises. L'espace de Fock sur H s'identifie à $L^2(\Omega)$, où $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la mesure gaussienne standard γ. Dans ce cas l'analogue du développement en chaos de Wiener est le développement d'un élément de $f \in L^2(\gamma)$ en polynômes d'Hermite $h_n(x)$ (les polynômes des probabilistes, relatifs à la mesure gaussienne standard), et notre espace nucléaire $\mathcal{N}(K)$ de fonctions-test est constitué par les fonctions

$$f = \sum_n \frac{a_n}{n!} h_n(x) \quad \text{telles que } \forall t > 0 \quad \sum_n t^n \frac{\|a_n\|^2}{n!} < \infty \,.$$

Pour faciliter la comparaison avec les espaces usuels, il vaut mieux pour un instant passer de $L^2(\gamma)$ à $L^2(\mathbb{R})$ et transformer f en $g = f\sqrt{\gamma}$ où γ est ici la *densité* gaussienne standard, de sorte que h_n devient ϕ_n, la n-ième fonction propre de l'oscillateur harmonique, normalisée dans $L^2(\mathbb{R})$ par $<\phi_n, \phi_n> = n!$. Dans un article (*J. Math. Phys.* 12, 1971, p. 140–148) que Kubo et Yokoi ne semblent pas connaître, B. Simon a étudié l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ au moyen des développements (en base orthonormale) $g = b_n \phi_n / \sqrt{n!}$, et $\mathcal{S}$ est caractérisé par la *décroissance rapide* de la suite (b_n). Ceci ne suffit pas à assurer la convergence des séries $\sum_n t^n n! \|b_n\|^2$, et nous aboutissons donc à un espace beaucoup plus petit que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Les fonctions-test de Kubo–Yokoi. Nous allons maintenant prendre $H = L^2(\mathbb{R})$, $H = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et indiquer la suite d'espaces Hilbertiens (3) utilisée par K-Y. Nous partons d'un développement dans $L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_n \frac{a_n}{n!} \phi_n(x) \quad \text{avec} \quad \sum_n \frac{\|a_n\|^2}{n!} < \infty \,, \tag{7}$$

et nous posons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|f\|^2_\alpha = \sum_n c_n^{2\alpha} \frac{\|a_n\|^2}{n!} \leq \infty$$

avec $c_n = 2(n+1)$. Cela peut aussi s'interpréter comme la norme dans L^2 de $\Lambda^\alpha f$, Λ étant l'opérateur différentiel $I + x^2/2 - 2D^2$, tel que $\Lambda\phi_n = c_n\phi_n$. L'espace des développements de norme finie est noté H_α, c'est un espace de Hilbert de fonctions pour $\alpha \geq 0$, un espace de Hilbert de distributions pour $\alpha < 0$, et le dual de H_α s'identifie à $H_{-\alpha}$. La suite (3) est celle des H_k avec $k \geq 0$ entier, et l'article de Simon, ou un raisonnement direct facile, nous dit que l'intersection des H_k est $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le fait que tous les c_n soient > 2 entraîne que l'injection de $H_{\alpha+1}$ dans H_α a une norme $\leq 1/2$. D'autre part, on dispose d'une base orthonormale $e_n = \phi_n / c_n^\alpha \sqrt{n!}$ de H_α , avec laquelle on peut évaluer la norme de Hilbert–Schmidt de l'injection de $H_{\alpha+\beta}$ dans H_α , dont le carré vaut $\sum_n c_n^{2\beta}$, et qui est donc finie si et seulement si $\beta > 1/2$.

Considérons maintenant la distribution ε_u ; son développement est donné par

$$\varepsilon_u(x) = \sum_n \frac{\phi_n(u)\phi_n(x)}{n!} . \tag{8}$$

En effet, on a pour $f \in \mathcal{S}$ donnée par (7)

$$< f, \varepsilon_u > = \sum_n \frac{a_n}{n!} \phi_n(u) = f(u) .$$

Sur quels espace H_α est elle continue ? Nous avons d'abord un calcul qui vaut pour u pris individuellement

$$\|\varepsilon_u\|_{-\alpha}^2 = \sum_n \frac{\phi_n^2(u)}{n!\, c_n^{2\alpha}} .$$

Sachant que $\|\phi_n(u)\|^2 \leq C\sqrt{n!}\, n^{-1/2}$ (dans tout intervalle borné), on en déduit que l'on peut prendre $\alpha > 1/4$ (comme Λ est d'ordre 2, cela correspond à une différentiabilité L^2 d'ordre $> 1/2$). D'autre part, on a un calcul global

$$\int \|\varepsilon_u\|_{-\alpha}^2 \, du = \sum_n c_n^{2\alpha} \tag{9}$$

qui montre que pour $\alpha > 1/2$ l'intégrale de gauche est finie, propriété qui aura une grande importance pour la suite. Nous désignerons par $\delta(a)^2$ la constante (9).

Tout ce que nous venons de faire s'étend à des fonctions f à valeurs dans un espace de Hilbert séparable E, les coefficients a_n étant des éléments de E, l'application ε_u étant aussi à valeurs dans E et la norme calculée pour cette application étant prise au sens de Hilbert–Schmidt. On définit ainsi des espaces que l'on peut noter provisoirement $H_\alpha[E]$. On peut d'autre part définir $H_\alpha(\mathbb{R}^n)$, comme le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ domaine de l'opérateur $(\Lambda^{\otimes n})^\alpha$; on a alors l'égalité (triviale : regarder les bases) $H_\alpha(\mathbb{R}^n) = H_\alpha[H_\alpha(\mathbb{R}^{n-1})]$, de laquelle on peut déduire la conséquence importante suivante : pour $f \in H_\alpha(\mathbb{R}^n)$ avec $\alpha > 1/4$ et pour $u \in \mathbb{R}$, la fonction $f_u = f(\cdot, u)$ appartient à $H_\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$, avec une norme dans ce dernier espace

$$\|f_u\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \|\varepsilon_u\|_{-\alpha} .$$

Recommençant alors l'opération, on obtient pour $\alpha > 1/2$ la formule

$$\| \int f(\cdot, u, u) du \|_\alpha^2 \leq \|f\|_\alpha^2 \int \|\varepsilon_u\|_{-\alpha}^2 \, du = \delta(a)^2 \|f\|_\alpha^2 . \tag{10}$$

Nous quittons maintenant $\mathbb{R}$ pour Ω. Nous définissons pour $\alpha \geq 0$ les espaces $H_{(\alpha)}(\Omega)$ ou $H_{(\alpha,t)}(\Omega)$ de v.a. (complexes) sur l'espace de Wiener par la finitude des normes suivantes, où f est donnée par son développement (1') en chaos de Wiener

$$\|f\|^2_{(\alpha,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|f_n\|^2_\alpha < \infty$$

(si $t=1$ il est omis de la notation). Enfin, l'espace $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ des fonctions-test de K-Y sur l'espace de Wiener (que nous noterons plutôt $\mathcal{Y}(\Omega)$) est l'intersection $\bigcap_k H_{(k)}(\Omega)$. Son dual $\mathcal{Y}'(\Omega)$ est l'espace des développements formels

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n)\,, \tag{11}$$

où T_n est une distribution tempérée symétrique sur $\mathbb{R}^n$ (pour $n=0$, une constante), telle que pour un α et un $t>0$ la série

$$\|T\|^2_{(-\alpha,1/t)} = \sum_n \frac{t^{-n}}{n!} \|T_n\|^2_{-\alpha}$$

soit convergente. L'espace des distributions (11) de norme $\|\cdot\|_{(-\alpha,1/t)}$ finie sera naturellement noté $H_{(-\alpha,1/t)}(\Omega)$, et c'est le dual de $H_{(\alpha,t)}(\Omega)$. On peut se borner aux α entiers et à $t=1$ si on le désire. La dualité entre fonctions-test et distributions est donnée par la formule

$$< f,T > = \sum_n \frac{1}{n!} < f_n, T_n > . \tag{12}$$

Noter que cette expression prolonge la forme bilinéaire $(f,g) \longmapsto \mathbb{E}[fg]$ sur $L^2(\Omega)$, et non le produit scalaire hermitien.

3. Propriétés des fonctions-test sur Ω. Il y a suffisamment de fonctions-test. En effet, tout vecteur exponentiel

$$\mathcal{E}(\xi) = \sum\nolimits_n \frac{1}{n!} I_n(\xi^{\otimes n}) \quad \text{avec} \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

appartient à $\mathcal{Y}(\Omega)$. On a (avec les notations de (5)) $q(\mathcal{E}(\xi)) = e^{q(\xi)}$ pour toute forme quadratique positive continue sur $\mathcal{S}$. Yokoi montre que l'application $\xi \longmapsto \mathcal{E}(\xi)$ est *continue* de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{Y}(\Omega)$, et que les combinaisons linéaires (complexes) de vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(\xi)$ avec ξ imaginaire pur sont denses dans $\mathcal{Y}(\Omega)$ (le même résultat vaut pour ξ réel).

Les vecteurs exponentiels appartenant à $\mathcal{Y}(\Omega)$, on peut définir la *fonction caractéristique* d'une distribution T donnée par (11) (*cf. Sém. Prob. XXI*, p. 11)

$$U_T(\xi) = < T, \mathcal{E}(\xi) > = \sum\nolimits_n \frac{1}{n!} < T_n, \xi^{\otimes n} > . \tag{13}$$

(pour une v.a. f, la fonction caractéristique est $U_f(\xi) = \mathbb{E}[\, f\mathcal{E}(\xi)]$).

Ensuite K-Y montrent que $\mathcal{S}(\Omega)$ *est stable pour la multiplication ordinaire des v.a., et que la multiplication est continue*. La démonstration ne sera pas reproduite ici, car elle utilise la formule de multiplication des intégrales stochastiques de la même façon que *Sém. Prob. XX* p. 283. Nous allons établir plus bas un résultat un peu plus délicat, la possibilité de multiplier une fonction-test par une distribution pour obtenir une distribution. Mais commençons par un résultat plus simple du même genre.

THÉORÈME. *Les espaces $\mathcal{Y}(\Omega)$ et $\mathcal{Y}'(\Omega)$ sont stables pour le produit de Wick.*

Rappelons (*cf. Sém. Prob. XXI*, p.12) la définition du produit de Wick $R = S{:}T$ de deux distributions S et T données par leurs développements formels (11)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(S_n) \quad , \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n) \quad ;$$

le développement formel $R = \sum_n \frac{1}{n!} I_n(R_n)$ est donné par

$$R_n = \sum\nolimits_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!} S_k \circ T_m \ ,$$

où $\circ$ représente le ***produit tensoriel symétrique*** de deux distributions tempérées ordinaires. Le produit de Wick est en fait une sorte de convolution : la fonction caractéristique de R est le produit ordinaire des fonctions caractéristiques de S et T.

Soit $\|\cdot\| = \sqrt{q}$ une norme hilbertienne continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et soit H le complété pour cette norme. Soit H^p la p-ième puissance symétrique de H, identifiée avec sa norme au sous-espace symétrique de la puissance tensorielle correspondante. Pour alléger la notation, nous noterons $\|\cdot\|$ toutes ces normes tensorielles. Alors on a $\|S_k \circ T_m\| \leq \|S_k\|\,\|T_m\|$, donc

$$\|R_n\| \leq \sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!} \|S_k\|\,\|T_m\|$$

Appliquant l'inégalité de Schwartz, nous obtenons

$$\|R_n\|^2 \leq \Big(\sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!} \|S_k\|^2\,\|T_m\|^2 \Big) \Big(\sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!} \Big)$$

Cette dernière somme valant 2^n, on a

$$\sum_n \frac{t^n}{n!} \|R_n\|^2 \leq \sum_n \sum_{k+m=n} \frac{(2t)^k \|S_k\|^2}{k!} \, \frac{(2t)^m \|T_m\|^2}{m!}$$

Les deux séries $\sum_k \frac{u^k \|S_k\|^2}{k!}$ et $\sum_k \frac{u^k \|T_k\|^2}{k!}$ convergeant pour u petit, il ne reste plus qu'à les multiplier et à prendre $t = u/2$. La démonstration est la même du côté des fonctions-test.

REMARQUE. Revenons à l'espace des fonctions-test et des distributions en dimension 1, considéré plus haut. On a pour les polynômes d'Hermite $h_n(x)$ la relation

$$h_m : h_n = h_{m+n} \ , \qquad \text{en particulier} \quad h_n(x) = x^{:n}$$

conformément à ce que l'on attend d'un produit de Wick.

Les vecteurs exponentiels sont ici les fonctions $\mathcal{E}(t) = \exp(tx - \frac{t^2}{2})$. Par exemple, la distribution ε_0 admet pour fonction caractéristique $\exp(-\frac{t^2}{2})$, et le développement en polynômes d'Hermite

$$\varepsilon_0(x) = \sum_k (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k} h_{2k}(x) \,,$$

et la mesure gaussienne centrée de variance σ^2 admet la fonction caractéristique $\exp(\frac{t^2}{2}(\sigma^2 - 1))$. La n–ième puissance de Wick de ε_0 est une distribution admettant la fonction caractéristique $\exp(-\frac{1}{2}nt^2)$, donc appartenant formellement à la famille gaussienne, avec $\sigma^2 < 0$.

Passons à l'espace de Wiener, et au résultat annoncé plus haut : *le produit ordinaire d'une distribution par une fonction-test est une distribution.* Pour cela, nous devons rappeler la formule de multiplication ordinaire des variables aléatoires sur l'espace de Wiener. Si nous posons

$$f = \sum_m \frac{1}{m!} I_m(f_m) \,, \quad g = \sum_n \frac{1}{n!} I_n(g_n) \,, \quad h = fg = \sum_p \frac{1}{p!} I_p(h_p) \,,$$

la fonction h_p est donnée par

$$h_p = \sum_{\mu+\nu=p} \frac{p!}{\mu!\,\nu!} \sum_k \frac{1}{k!} (f_{\mu+k} \underset{k}{=} g_{\nu+k})$$

Il faut définir ce dernier symbole, qui est une contraction d'ordre k. Commençons par une remarque : soient trois espaces de Hilbert H, K et E, f et g deux éléments de $H \otimes E$ et $E' \otimes K$ respectivement. Alors on peut définir leur contraction $f \underset{E}{=} g$ appartenant à $H \otimes K$, de telle sorte que $(f \otimes x) \underset{E}{=} (x' \otimes g) = (x', x) f \otimes g$ (noter que l'on a pris E' et non E afin d'avoir une application bilinéaire). On montre assez facilement l'inégalité $\|f \underset{E}{=} g\| \leq \|f\|\,\|g\|$. Prenons alors $H = H_\alpha^{\otimes\mu}$, $K = H_{-\alpha}^{\otimes\nu}$ et $E = H_\alpha^{\otimes k}$, avec $\alpha > 0$. La contraction $f \underset{E}{=} g$ est alors une distribution sur $\mathbb{R}^{\mu+\nu}$, mais non symétrique en général, et $f \underset{k}{=} g$ désigne la distribution symétrisée correspondante. On ne peut pas attribuer à cette distribution une meilleure régularité que l'appartenance à $H_{-\alpha}^{\otimes(\mu+\nu)}$, mais avec une norme majorée par $\gamma^\mu \|f\|_\alpha \|g\|_{-\alpha}$, $\gamma < 1$ étant la norme de l'injection de H_α dans $H_{-\alpha}$. Nous n'utiliserons pas ce dernier raffinement.

Revenons alors à notre problème de multiplication : si f appartient à $H_{(\alpha,t)}(\Omega)$ pour tout t et g à $H_{(-\alpha,t)}(\Omega)$ pour un t, nous avons (toutes les normes étant désormais du type $\|\cdot\|_{-\alpha}$) $\|g_n\|^2 \leq AC^n n!$, où C peut être choisi > 4, et alors $\|f_n\|^2 \leq BC^{-2n} n!$.

Cela nous donne

$$\|h_p\| \leq M\sqrt{p!}\,C^{p/2} \sum_{\mu+\nu=p} \frac{\sqrt{p!}}{\sqrt{\mu!}\sqrt{\nu!}} \sum_k \frac{\sqrt{(\mu+k)!}}{\sqrt{\mu!}\sqrt{k!}} \frac{\sqrt{(\nu+k)!}}{\sqrt{\nu!}\sqrt{k!}} C^{-k/2}$$

Dans la somme intérieure, nous majorons grossièrement chaque coefficient binômial $\binom{i}{j}$ par 2^i, et il nous reste alors une majoration

$$\|h_p\| \leq M\sqrt{p!}\,(2C)^{p/2} \sum_{\mu+\nu=p} \frac{\sqrt{p!}}{\sqrt{\mu!}\sqrt{\nu!}} \sum_k 2^k C^{-k/2} .$$

Comme $C>4$ la série géométrique est convergente, et nous faisons entrer sa somme dans la constante M. La somme restante est alors majore par 2^p, et il nous reste finalement une majoration du type $\|h_p\| \leq M\sqrt{p!}\,N^p$, montrant que h appartient à un espace du type $H_{(-a,t)}(\Omega)$, le résultat désiré.

4. Versions continues des fonctions–test. L'un des plus intéressants résultats de K–Y est celui-ci : considérons la mesure de Wiener comme une mesure sur S' (l'espace Ω des trajectoires continues nulles en 0 n'est pas contenu dans S', mais la mesure de Wiener est portée par son intersection avec S', comme le montrent la loi forte des grands nombres, ou bien d'autres propriétés). On peut donc considérer les fonctions–test comme des classes de fonctions définies p.p. sur S'. *Alors les fonctions–test admettent des versions continues sur* $S'(\mathbb{R})$. Pour comprendre la méthode utilisée par K–Y, commençons par le cas d'une intégrale multiple

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(s_1,\ldots,s_n)\, dB_{s_1}\ldots dB_{s_n} . \tag{14}$$

Lorsque $n=1$, on peut transformer cette intégrale stochastique en l'intégrale ordinaire $-\int f'(s)B_s\,ds$, et lui donner alors la signification $-<f',T> \,=\, <f,T'>$ pour toute distribution $T\in S'$. On notera que nous avons T' parce que nous travaillons sur l'espace de Wiener; K–Y travaillant sur le bruit blanc n'ont pas de dérivation. Si l'on essaie de faire de même pour $n>1$, l'intégrale obtenue en effectuant les intégrations par parties naturelles

$$(-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^n f}{\partial s_1\ldots\partial s_n}(s_1,\ldots,s_n)\, B_{s_1}\ldots B_{s_n}\, ds_1\ldots ds_n$$

ne représente pas l'intégrale d'Ito (14), mais *l'intégrale multiple de Stratonovich correspondante.* C'est donc l'intégrale de Stratonovich qui admet naturellement un prolongement continu à S'

$$T \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(s_1,\ldots,s_n)\, T'_{s_1}\ldots T'_{s_n}\, ds_1\ldots ds_n = \,<f, T'^{\otimes n}> . \tag{15}$$

K–Y sont donc amenés à transformer les intégrales d'Ito en intégrales de Stratonovich (sans d'ailleurs mentionner celles-ci), par les mêmes formules que *Sém. Prob. XXII* p. 72. Pour plus de clarté, écrivons la formule de représentation (1') sous la forme $f=I(\hat{f})$, où f est la v.a. et $\hat{f}=(f_n)$ la suite de ses coefficients de Wiener; nous distinguons donc ***pour un instant*** les "fonctions-test" des "suites-test". Définissons l'opérateur de trace Tr sur les *suites* (f_n), la valeur au niveau n de la suite $\mathrm{Tr}(\hat{f})$ étant la fonction $\mathrm{Tr}(f_{n+2}) = \int f_{n+2}(\cdot, u, u)\,du$. La formule donnant l'intégrale de Stratonovich $S(\hat{f})$ de la suite $\hat{f}$ est alors

$$S(\hat{f}) = I(e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}}\hat{f}) \quad ; \quad I(\hat{f}) = S(e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}}\hat{f}) , \tag{16}$$

où les exponentielles désignent bien entendu $\sum_k \frac{(\pm 1)^k}{2^k k!}\mathrm{Tr}^k$. Il convient alors de se demander si les opérateurs Tr et $e^{\lambda \mathrm{Tr}}$ préservent les suites-test (ou par abus de langage les "fonctions-test"). Nous verrons que la réponse est *oui* pour le premier, mais *non* pour le second.

Partons de la formule (10), qui nous donne

$$\sum_n \frac{t^n}{n!} \|\mathrm{Tr}(\hat{f})_n\|_\alpha^2 \le \delta(\alpha)^2 \sum (n+2)(n+1)\frac{t^n}{(n+2)!}\|f_{n+2}\|_\alpha^2 \tag{17}$$

Le coefficient $(n+2)(n+1)t^n$ peut être majoré par $C(t+\varepsilon)^n$, pour tout $\varepsilon > 0$, et il en résulte aussitôt que l'application Tr est continue de l'espace des suites-test dans lui-même. Il en est alors de même pour chaque opérateur Tr^k, et la formule de transformation d'Ito en Stratonovich montre que pour tout n l'application $I_n(f_n)$, considérée comme une v.a. définie sur $\mathcal{S}'$, est continue.

Evaluons la de manière plus précise : nous avons d'aprés (15) et (16)

$$\frac{I_n(f_n)(T)}{n!} = \sum_{2k\le n} \frac{1}{2^k k!}\frac{S_{n-2k}(\mathrm{Tr}^k f_n)(T)}{(n-2k)!}$$
$$= \sum_{2k\le n} \frac{1}{2^k k!}\frac{< \mathrm{Tr}^k(f_n), T'^{\otimes(n-2k)} >}{(n-2k)!}$$

Nous majorons $|< \mathrm{Tr}^k(f_n), T'^{\otimes(n-2k)} >|$ par $\delta(\alpha)^{2k}\|f_n\|_\alpha \|T'\|_{-\alpha}^{n-2k}$, et d'autre part $\frac{n!}{2^k k!\,(n-2k)!}$ par $C\sqrt{n!}\frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!}$. On a donc

$$|\, I_n(f_n)(T)\,| \le C\sqrt{n!}\; \|f_n\|_\alpha \,(\delta(\alpha) + \|T'\|_{-\alpha})^n \; .$$

Pour toute partie bornée de $\mathcal{S}$, en prenant α assez grand on aura $\|T'\|_{-\alpha}) \le M$, d'où une majoration du type $\|I_n(f_n)(T)\| \le C\lambda^n\sqrt{n!}$, et la convergence uniforme de la série $\sum_n \frac{I_n(f_n)(T)}{n!}$ sur les bornés, d'où la continuité de cette fonction de T.

Toute fonction-test admettant une "valeur" en $T \in \mathcal{S}'$, on peut définir l'évaluation (masse unité) ε_T, qui est une distribution d'après le calcul précédent. En particulier, la masse unité ε_0. Cela rejoint le *Sém. Prob. XXI*, p. 14—17.

REMARQUE. Revenons au cas élémentaire où $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la mesure γ. Dans ce cas la suite $\widehat{f} = (f_n)$ est simplement une suite de nombres complexes, et l'on a

$$I(f) = \sum_n \frac{f_n}{n!} h_n(x) \quad ; \quad S(f) = \sum_n \frac{f_n}{n!} x^n \ .$$

Si l'on interprète $\mathrm{Tr}(\widehat{f})$ comme la suite décalée (f_{n+2}), les formules (16) sont équivalentes à l'expression explicite des polynômes d'Hermite

$$\frac{h_n(x)}{n!} = \sum_{2k \leq n} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \quad ; \quad \frac{x^n}{n!} = \sum_{2k \leq n} \frac{1}{2^k k!} \frac{h_{n-2k}(x)}{(n-2k)!} \ .$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'opérateur $\exp(\lambda \,\mathrm{Tr})$ n'est pas partout défini sur l'espace des "suites-test".

Mais cet exemple a d'autres aspects amusants. D'abord, de même que le développement en polynômes d'Hermite correspond en dimension 1 au développement en intégrales multiples d'Ito, le développement en série de Taylor correspond au développement de Stratonovich. Ensuite, la formule de transformation de Stratonovich en Ito correspond à la transformation linéaire qui fait passer des puissances aux polynômes d'Hermite de même terme dominant : c'est la *transformation d'Hermite*, bien connue en analyse harmonique euclidienne. Enfin, sur la série de puissances $\sum_n \frac{f_n}{n!} x^n$, aussi bien que sur la série de polynômes d'Hermite $\sum_n \frac{f_n}{n!} h_n(x)$, l'opérateur de décalage (de trace) $f_n \longmapsto f_{n+2}$ correspond à la dérivée seconde. L'opérateur $exp(\lambda \,\mathrm{Tr})$ correspond donc, pour $\lambda < 0$, au semi-groupe brownien. Or une série de puissances du type ci-dessus avec $|f_n| \leq MC^n$ représente une fonction entière de type exponentiel, classe de fonctions préservée par le semi-groupe brownien (mais l'action du semi-groupe brownien sur ces fonctions ne se calcule pas en développant $\exp(\lambda D^2)$ en série !). Cela suggère que l'espace des fonctions-test de Yokoi devrait être encore restreint par une condition de croissance des normes.

5. Distributions positives. En dimension finie, il est bien connu que toute distribution positive est une mesure positive. Yokoi a montré dans [6] que toute distribution positive F sur l'espace des fonctions-test de K-Y est une mesure positive sur $\mathcal{S}'$. Le principe de la démonstration est très simple. Tout d'abord, pour tout $\xi \in$ réel la fonction $\exp(i\xi)$ est une fonction-test complexe. On déduit de la positivité de F que la fonction $\xi \longmapsto \langle \exp(i\xi), F \rangle$ est de type positif sur $\mathcal{S}$. Comme F est une distribution, les résultats de Kubo-Yokoi rappelés plus haut entraînent que cette fonction de type positif est continue. D'après le théorème de Minlos, elle est transformée de Fourier d'une mesure positive ν sur $\mathcal{S}'$, et il reste à étendre l'égalité de la mesure et de la distribution, des vecteurs exponentiels complexes à toutes les fonctions-test. Nous ne donnerons pas les détails ici.

Il existe d'autres versions de ce théorème. La plus ancienne est celle de Potthoff [4], qui s'applique à des espaces de fonctions-test définis au moyen d'un opérateur du type Ornstein-Uhlenbeck (comme les fonctions-test de Watanabe), et qui utilise aussi le théorème de Minlos pour construire la mesure. Il se présente pour les fonctions-test de Watanabe, qui sont des classes de fonctions, une difficulté qui n'existait pas pour les fonctions–test partout définies de Kubo–Yokoi. En effet, les mesures correspondant aux distributions positives sont singulières, et leur valeur sur une classe de fonctions n'est pas bien définie a priori. L'égalité entre la distribution et la mesure n'a donc de sens que pour certaines fonctions–test plus régulières. Cette difficulté se retrouve dans une note toute récente de Nualart et Ustunel [3] (qui construit la mesure directement, sans utiliser le théorème de Minlos). Elle est complètement résolue dans un travail de Sugita [5] (présenté à Oberwolfach en Octobre 88). Celui–ci montre que la mesure associée à une distribution positive ne charge pas les ensembles de capacité nulle (pour une capacité convenable, liée aux propriétés de continuité de la distribution), et d'autre part utilise l'existence (établie par Malliavin) de versions précisées des fonctions–test de Watanabe, continues en dehors d'ensembles de petite capacité. Alors on peut donner un sens à l'intégrale d'une fonction–test par rapport à la mesure, malgré la singularité de celle–ci.

REFERENCES

[1] KUBO I. et TAKENAKA S. Calculus on Gaussian White Noise I–IV. *Proc. Japan Acad.* 56, 1980; 56, 1980; 57, 1981; 58, 1982 (sans démonstrations).

[2] KUBO I. et YOKOI. Y. A remark on the space of testing random variables in the white noise calculus. A paraître.

[3] NUALART D. et USTUNEL A.S. Mesures cylindriques et distributions sur l'espace de Wiener. *CRAS Paris.* A paraître (1988).

[4] POTTHOFF J. On positive generalized functionals. *J. Funct. Anal.* 74, 1987, p. 81–95.

[5] SUGITA H. Positive generalized Wiener functionals and potential theory over abstract Wiener spaces. *Osaka M. J.*, à paraître.

[6] YOKOI .Y. Positive generalized brownian functionals. A paraître.

P.A. Meyer
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
67084 Strasbourg–Cedex

J.A. Yan
Institute of Applied
Mathematics
Academia Sinica
Beijing, R.P. de Chine