SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LAURENT SCHWARTZ

Quelques propriétés de la tribu accessible : les discontinuités d'un processus croissant intégrable et les discontinuités de sa projection prévisible duale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 355-361
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__355_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Quelques propriétés de la tribu accessible ;
les discontinuités d'un processus croissant intégrable
et les discontinuités de sa projection prévisible duale.

Laurent Schwartz

1. Rappels[1]

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P}\right)$ont la signification et les propriétés habituelles ; $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$, et on ajoutera en général un temps $\overline{+\infty} > +\infty$, isolé, $\mathcal{F}_{\overline{+\infty}} = \mathcal{F}_{+\infty}$; mais le graphe d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \overline{+\infty}]$ sera toujours la partie du graphe contenue dans $[0, +\infty] \times \Omega$; l'expression **P**-ps. ou : aux ensembles **P**-négligeables près, sera toujours omise. Cl. DELLACHERIE a introduit les trois tribus fondamentales : optionnelle, prévisible, accessible. Les deux premières sont d'un usage courant, la troisième plus étrange, est un peu tombée dans l'oubli ; nous voulons ici montrer que, dans certains problèmes bien naturels, elle est indispensable. Et avant tout dans la décomposition d'un temps d'arrêt T (à valeurs dans $[0, \overline{+\infty}]$) : son graphe $[T]$ est, d'une manière unique, réunion disjointe d'un graphe de temps d'arrêt inaccessible et d'un graphe de temps d'arrêt accessible (en général non prévisible)[2].

Soit alors X un processus réel adapté cadlag sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, donc optionnel. Le processus de ses discontinuités : $t \mapsto \Delta X_t$ est alors optionnel (accessible ou prévisible si X l'est). Il en est donc de même de l'ensemble de ses discontinuités, $\{\Delta X_t \neq 0\}$. Comme il est mince, il est réunion d'un ensemble dénombrable de graphes de temps d'arrêts disjoints[3] ; par la décomposition ci-dessus, il est réunion $(\bigcup_m [T'_m]) \cup (\bigcup_n [T_n])$, T'_m inaccessible, T_n accessible ; la première réunion constitue l'ensemble des discontinuités inaccessibles de X, la deuxième l'ensemble A, accessible, des discontinuités accessibles de X ; ces deux réunions sont disjointes, et en général les T_n et A ne sont pas prévisibles (sauf bien évidemment si X est prévisible, auquel cas les T'_m n'existent pas, et les T_n et A sont prévisibles).
Ces deux réunions sont indépendantes du choix des T'_m, T_n. Comme A est accessible et mince, il admet une enveloppe prévisible $\overline{A}$, le plus petit ensemble prévisible qui le contienne. [En effet, par définition des temps d'arrêt accessibles, chaque $[T_n]$ est contenu dans une réunion disjointe de graphes $[T_{n,k}]$ de temps d'arrêt prévisibles. Si $H \subset \Omega$ est dans $\mathcal{F}_{T_{n,k}-}$, le temps d'arrêt $(T_{n,k})_H$, égal à $T_{n,k}$ sur H et à $\overline{+\infty}$ ailleurs, est prévisible, et on obtient ainsi tous les temps d'arrêt prévisibles de graphe $\subset [T_{n,k}]$ [4]. Il y a donc un plus petit ensemble prévisible $\supset A \cap [T_{n,k}]$, c'est $(T_{n,k})_{H_{n,k}}$, où $H_{n,k}$ est le plus petit ensemble de Ω, de la tribu $\mathcal{F}_{T_{n,k}-}$, tel que $[(T_{n,k})_{H_{n,k}}] \supset A \cap [T_{n,k}]$, et alors $\overline{A} = \bigcup_{n,k} [(T_{n,k})_{H_{n,k}}]$].

Supposons que X soit une semi-martingale spéciale[5] (cadlag), c-à-d. de la forme

$$X = X^\natural + M \tag{1.0}$$

où $X^\natural$ est un processus à variation finie (cadlag) prévisible, M une martingale locale nulle au temps 0 ; cette décomposition est unique ; $X^\natural$ s'appelle la projection prévisible duale de X.

Nous appellerons A l'ensemble des discontinuités accessibles de X, $A^\natural$ l'ensemble prévisible des discontinuités de $X^\natural$, $\overline{A}$ l'enveloppe prévisible de A.

Nous voulons démontrer le théorème suivant :

Théorème (1.1).— *$A^\natural \subset \overline{A}$; si X est un processus croissant, $A^\natural = \overline{A}$.*

2. Démonstration du théorème

Lemme (2.1) (connu).— *Si X est une D-quasi-martingale*[6], *c-à-d. une semi-martingale spéciale, où X est à variation intégrable, et M martingale, et si T est un temps d'arrêt prévisible,*

$$\Delta X^\natural{}_T = \mathbf{E}(\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T_-})^{(7)} \tag{2.1.1}$$

en prenant $\Delta X^\natural{}_T$ et $\Delta X_T = 0$ sur $\{T = \overline{+\infty}\}$.

Corollaire (2.2).— *Si X est continue, $X^\natural$ aussi, et plus généralement* $\operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X^\natural(t,\omega)| \leq \operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X(t,\omega)|$.

Démonstration. Cela résulte de ce que l'ensemble $A^\natural$ des discontinuités de $X^\natural$ est porté par une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, et de (2.1) (par localisation, on peut se ramener au cas où X est une D-quasi-martingale).

Remarques :

1) On en déduit que $\operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta M(t,\omega)| \leq 2 \operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X(t,\omega)|$.
2) La majoration (2.2) est globale, mais on n'a pas individuellement $|\Delta X^\natural(t,\omega)| \leq |\Delta X(t,\omega)|$. Nous verrons justement des cas où $X^\natural$ est discontinue en certains points où X est continue.

Proposition (2.3).— $A^\natural \subset \overline{A}$.

Démonstration. En localisant, on peut supposer X D-quasi-martingale. Soit G l'ensemble $A^\natural \setminus \overline{A}$. Soit T un temps d'arrêt prévisible. $G \cap [T]$ est un graphe de temps d'arrêt prévisible (parce que G et $[T]$ sont prévisibles), donc de la forme $[T_H]$, $H \subset \Omega$, $H \in \mathcal{F}_{T_-}$. Appliquons-lui (2.1) :

$$\Delta X^\natural{}_{T_H} = \mathbf{E}\left(\Delta X_{T_H} \mid \mathcal{F}_{T_{H-}}\right). \tag{2.4}$$

Mais $[T_H] \subset (\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega) \setminus \overline{A} \subset (\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega) \setminus A$, donc $\Delta X_{T_H} = 0$, donc $\Delta X^\natural{}_{T_H} = 0$. Donc $\Delta X^\natural$ est nul sur $G \cap [T]$, et comme G est dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, $\Delta X^\natural = 0$ sur G et puisque $A^\natural$ est l'ensemble des points de discontinuité de $X^\natural$, $A^\natural \subset \overline{A}$.

Proposition (2.5).— *Si X est un processus croissant, $A^\natural = \overline{A}$.*

Démonstration. Nous appelons cette fois G l'ensemble $\overline{A} \setminus A^\natural$ et appliquons encore (2.4). Cette fois c'est $\Delta X^\natural{}_{T_H}$ qui est nul, puisque les discontinuités de $X^\natural$ sont sur $A^\natural$, donc pas dans G, donc pas dans $[T_H]$.

Comme $\Delta X_{T_H} \geq 0$, on en déduit qu'il est p.p. nul, donc X n'a pas de discontinuités sur $\overline{A} \setminus A^\natural$, a fortiori pas sur $A \setminus A^\natural$, et comme A est l'ensemble de ses points de discontinuité, $A \subset A^\natural$, donc $\overline{A} \subset \overline{A^\natural} = A^\natural$, donc d'après (2.3), $A^\natural = \overline{A}$.

3. Des exemples.

Nous allons donner des exemples aboutissant à des résultats tout-à-fait opposés.

(3.1) Dans cet exemple, A n'est pas vide et $A^\natural$ est vide. Prenons pour X une martingale M ayant des discontinuités accessibles (par exemple telle que, pour un temps τ, $M_\tau \neq 0$ partout, et $M_{\tau_-} = 0$). On a $X = 0 + M$, $X^\natural = 0$, $A^\natural = \phi$.

(3.2) Dans ce deuxième exemple au contraire, $A \not\subseteq A^\natural = \overline{A}$; toutes les discontinuités accessibles de X seront des discontinuités communes de $X^\natural$ et de M, et il y aura des points de continuité de X, formant $A^\natural \setminus A$, qui seront discontinuités de $X^\natural$, donc aussi de M, avec des sauts opposés puisque X est continue.

On prendra, pour τ quelconque > 0, $X = 1_{\Omega_1}$ pour $t \geq \tau$, $\mathbf{P}(\Omega_1) = \alpha$, et 0 pour $t < \tau$; $\mathcal{F}_t = \{\phi, \Omega_1, \Omega \setminus \Omega_1, \Omega\}$ pour $t \geq \tau$, $= \{\phi, \Omega\}$ pour $t < \tau$; $X^\natural = \alpha$ pour $t \geq \tau$ et 0 pour $t < \tau$ est bien prévisible puisque dépendant seulement du temps, et
$X - X^\natural = M = 1_{\Omega_1} - \alpha$ pour $t \geq \tau$ et 0 pour $t < \tau$, est bien une martingale. Les discontinuités de X forment l'ensemble $\{\tau\} \times \Omega_1$, celles de $X^\natural$ et de M l'ensemble $\{\tau\} \times \Omega$. On retrouve bien $\Delta X^\natural_\tau = \mathbf{E}(\Delta X_\tau \mid \mathcal{F}_{\tau_-}) = \alpha$.

Corollaire (3.3).— *Si N est localement une martingale de carré intégrable, l'ensemble $B^\natural$ des points de discontinuité de $\langle N, N \rangle$ est l'enveloppe prévisible $\overline{B}$ de l'ensemble B des points de discontinuité de N, $B \subset B^\natural = \overline{B}$.*

Démonstration. Les points de discontinuité de N sont ceux de $X = [N, N]$, processus croissant de projection prévisible duale $X^\natural = \langle N, N \rangle$. [8]

4. Les désintégrations de P pour les 3 tribus.

(4.1) Soit f une fonction réelle, bornée ou ≥ 0, $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$- mesurable sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ($\mathcal{R}$ est la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}_+$). On appelle respectivement projections optionnelle, accessible, prévisible des fonctions f^{opt}, f^{acc}, $f^{\text{pré}}$, respectivement optionnelle, accessible, prévisible, ayant la propriété suivante [9] :

si T est un temps d'arrêt, $f_T^{\text{opt}} = \mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_T)$;
si T est un temps d'arrêt accessible, $f_T^{\text{acc}} = \mathbf{E}(f_t \mid \mathcal{F}_T)$;
si T est un temps d'arrêt prévisible, $f^{\text{pré}} = \mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_{T_-})$.

Si f est optionnelle, elle coïncide avec f^{acc} sur tout graphe de temps d'arrêt accessible[10].

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendent vers 0 simplement sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ en restant bornées[11], leurs projections ont la même propriété.

(4.2) Si $(\Omega, \mathbf{P})$ vérifie des conditions très générales, par exemple si Ω est un espace topologique et $\mathbf{P}$ portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, $\mathbf{P}$ possède une désintégration régulière[11], $\mathcal{P} : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)$, unique aux ensembles négligeables près, ayant les propriétés suivantes : les $\mathbf{P}_t(\omega)$ sont des probabilités, $\mathcal{P}$ est adaptée cadlag, donc optionnelle [ceci veut dire : il existe un système de limites à gauche, $\mathcal{P}_- : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_-(\omega)$, et, pour toute fonction réelle φ bornée $\mathcal{F}$-mesurable sur Ω, $\mathcal{P}(\varphi) : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(\varphi)$ est adaptée cadlag, donc optionnelle, et le système des limites à gauche est $\mathcal{P}_-(\varphi) : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)\varphi$; $\mathcal{P}$ est adaptée aux $\mathcal{F}_{t_-}$ et caglad, donc prévisible]. En fait, $\mathcal{P}$ est la martingale de mesures, de valeur finale sur la tribu $\mathcal{F} : \delta : \omega \mapsto \delta_\omega$; $\mathcal{P}_t$ (resp. $\mathcal{P}_{t_-}$) est l'espérance conditionnelle de δ pour la tribu $\mathcal{F}_t$ (resp. $\mathcal{F}_{t_-}$) ; $\mathcal{P}$ est aussi la projection optionnelle du processus $\delta : (t, \omega) \mapsto \delta_\omega$, $\mathcal{P}_-$ sa projection prévisible ; tout ceci se voit avec des φ comme précédemment.

En fait on voit que les principales propriétés peuvent être obtenues à partir d'un ensemble dénombrable Φ, dit déterminant, de fonctions φ réelles bornées $\mathcal{F}$-mesurables sur Ω [13].

L'ensemble des discontinuités du système $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_-)$ (c'est à dire l'ensemble $\{\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_-\}$ de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$) est la réunion des ensembles de discontinuités $\{\mathcal{P}(\varphi) \neq \mathcal{P}_-(\varphi)\}$ pour $\varphi \in \Phi$, il est mince donc égal à une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt inaccessibles ou accessibles, d'où l'ensemble des discontinuités inaccessibles, et l'ensemble A accessible des discontinuités accessibles.

Théorème (4.3).—

(4.3.1) *La désintégration optionnelle de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{P} : (t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)$, *en ce sens que si,* f *est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$*-mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection optionnelle est* $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$.

(4.3.2) *La désintégration prévisible de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{P}_- : (t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)$, *en ce sens que, si* f *est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$*-mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection prévisible est* $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$.

(4.3.3) *La désintégration accessible de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{Q} : (t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega) = \mathbf{P}_t(\omega) = \mathbf{P}_{t_-}(\omega)$ *aux points de continuité de* $\mathcal{P}$, $\mathbf{P}_{t_-}(\omega)$ *aux points de discontinuité inaccessibles,* $\mathbf{P}_t(\omega)$ *aux points de discontinuité accessibles, en ce sens que, si* f *est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathbf{R} \otimes \mathcal{F})$*- mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection accessible est* $(t,\omega) \mapsto \mathcal{Q}_t(\omega)(f_t)$.

Démonstration.

(4.3.1) On sait que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_T$ d'une fonction g sur Ω est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(g)$. Alors $\mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_T)$ est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(f_T)$ [14] ; mais, $\mathbf{P}_T(\omega)$-ps., $T = T(\omega)$, c'est donc aussi $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(f_{T(\omega)})$, c'est-à-dire g_T, où g est la fonction $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$. Donc, pour montrer que f^{opt} est $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$, il suffit de montrer que cette fonction est optionnelle. Par la continuité pour la convergence simple bornée, il suffit de le voir pour $f(t,\omega) = g(t)h(\omega), g \in \mathcal{R}, h \in \mathcal{F}$, où cela résulte de ce que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(h)$ est optionnelle.

(4.3.2) Soit T prévisible ; $\mathbf{E}(f_T|\mathcal{F}_{T_-})$ est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega)(f_T)$ [15] ; mais $T \in \mathcal{F}_{T_-}$ [16], donc $\mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega)ps., f_T = f_{T(\omega)}$; c'est donc $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega)(f_{T(\omega)})$ ou g_T, où g est la fonction $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$. Donc, pour montrer que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$ est la projection prévisible de f, il suffit de montrer que c'est une fonction prévisible, et de le voir pour $f(t,\omega) = g(t)h(\omega)$; or $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(h)$ est prévisible.

(4.3.3) Soit T un temps d'arrêt accessible ; la formule de (4.3.1) montre que $\mathbf{E}(f_T|\mathcal{F}_T)$ est g_T, où g est $(t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega)f_t$, car $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ partout sauf aux points de discontinuité inaccessibles, et il n'y en a pas sur le graphe de T. Il reste donc à montrer que cette fonction $(t,\omega) \mapsto \mathcal{Q}_t(\omega)(f_t)$ est accessible. Par $f(t,\omega) = g(t)h(\omega)$, il suffit de voir que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega)(h)$ est accessible. Or elle s'écrit $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(h)1_{(\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega)\setminus A}(\omega) + \mathbf{P}_t(\omega)(h)1_A(\omega)$. La première fonction est accessible, parce que $\mathcal{P}_-$ est prévisible et A accessible. Prenons la deuxième fonction. Si $[T]$ est graphe d'un temps d'arrêt accessible, $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)h$, optionnelle, coïncide sur $[T]$ avec une fonction accessible (sa projection accessible), et A est accessible ; donc cette deuxième fonction est accessible sur $[T]$. Comme A est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt accessibles, elle est accessible.

Remarque : $\mathcal{P}, \mathcal{P}_-, \mathcal{Q}$, sont les projections optionnelle, prévisible, accessible, de $\delta : (t,\omega) \mapsto \delta_{(\omega)}$.

Les projections optionnelle et accessible ne diffèrent qu'aux points de discontinuité inaccessibles de $\mathcal{P}$ (elles sont donc égales sur tout graphe de temps d'arrêt accessible), les projections accessible et prévisible aux points de discontinuité accessibles.

NOTES DE BAS DE PAGE

Note (1), page 1

On trouvera toutes ces propriétés dans Cl. DELLACHERIE [1], chapitre III, IV, et Cl. DELLACHERIE P.A. MEYER [1], chapitre IV. Pour des théorèmes précis nous y référerons par Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER.

Note (2), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre III, T41, page 58, et P.A. MEYER chapitre IV, T(81), page 215.

Note (3), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre VI, T33, page 138, et P.A. MEYER, appendice au chapitre IV, T117, page 261.

Note (4), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre III, T49 page 61, et P.A. MEYER chapitre IV T73, page 205.

Note (5), page 1

P.A. MEYER, chapitre VII, définition 23 page 232 et T25 page 235.

Note (6), page 2

P.A. MEYER, chapitre VI, définition 38 page 106 ; chapitre II, remarque 15, page 13 ; chapitre VI, définition 73, page 148.

Note (7), page 2

P.A. MEYER, chapitre VII, T76 page 149.

Note (8), page 3

P.A. MEYER, chapitre VII, remarque 43, page 252.

Note (9), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, T14 page 98, et P.A. MEYER, chapitre VI, T43 page 113.

Note (10), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, T22, page 102.

Note (11), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, démonstration de T14, page 98, et P.A. MEYER, chapitre VI, b) de la démonstration de T43 page 113.

Note (12), page 4

SCHWARTZ [1], théorème (5.1) page 101.

Note (13), page 4

SCHWARTZ [1], définition E, page 14.

Note (14), page 5

SCHWARTZ [1], théorème (7.2) page 140.

Note (15), page 5

Ceci n'a pas été énoncé dans SCHWARTZ [1] ; on le voit en considérant une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ annonçant T.

Note (16), page 5

Cl. DELLACHERIE, chapitre IV, T21 page 78 (avec $X_t = t$).

Index terminologique et Index des notations

Temps d'arrêt	page 1
tribus optionnelle, accessible, et prévisible	page 1
projections	pages 1 et 4
l'ensemble A des discontinuités accessibles	page 1
$X = X^\natural + M$, semi-martingale spéciale, projection prévisible duale, $A^\natural, \overline{A}$	page 1
D-quasi-martingale	page 2
les désintégrations	page 4
$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_-$	page 4
$\mathcal{Q}$	page 5

Index Bibliographique

[1] Claude DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, volume 67, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[1] Claude DELLACHERIE et Paul André MEYER, Probabilités et potentiels, Paris Hermann, 1975 et 1980.

[1] L. SCHWARTZ, Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1973.

Table des matières

Introduction		page 1
Paragraphe 1.	Rappels.	page 1
Paragraphe 2.	Démonstration du théorème.	page 2
Paragraphe 3.	Des exemples.	page 3
Paragraphe 4.	Les désintégrations de **P** pour les trois tribus.	page 3
Notes de bas de page		page 5
Index terminologique et index des notations		page 6
Index bibliographique		page 6
Table des matières		page 7

37, Rue Pierre Nicole
75005 PARIS
(France)