

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LAURENT SCHWARTZ

## **La convergence de la série de Picard pour les EDS**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 23 (1989), p. 343-354

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1989\\_\\_23\\_\\_343\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__343_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# La convergence de la série de Picard pour les EDS

## (Equations Différentielles Stochastiques)

Laurent Schwartz

### Introduction

Le sort de la théorie des EDS a été étrange. De nombreuses questions très naturelles n'ont pas été posées, pendant très longtemps. Depuis qu'existe le théorème du point fixe, on a absolument voulu les faire rentrer dans ce moule ; on résout un morceau de l'équation, dans un intervalle stochastique  $[0, T_1[$ , par le théorème du point fixe, ce qui, pour les approximations successives  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donne une convergence géométrique de la série de Picard  $\sum_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - X_n)$ . Ayant la solution en  $T_1$ , on repart dans un nouvel intervalle stochastique  $[T_1, T_2[$ , et ainsi de suite. La solution n'est obtenue que par raccordements de morceaux de solution<sup>(1)</sup>. Ce qui d'ailleurs n'a jamais pu être amélioré lorsque les semi-martingales directrices ont des discontinuités. Il me semble que Bichteler<sup>(2)</sup> est le premier à avoir démontré que la série de Picard  $\sum_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - X_n)$  converge, non seulement dans  $[0, T_1[$ , mais dans tout le domaine d'existence  $[0, +\infty[$  ; sans pour cela éviter de faire la démonstration par morceaux  $[0, T_1[$ ,  $[T_1, T_2[$ ,  $\dots$ , mais en montrant, une fois l'existence et l'unicité montrées, que, si la série converge dans  $[T_k, T_{k+1}[$ , elle converge aussi dans  $[T_{k+1}, T_{k+2}[$ . Bien sûr, avec ces méthodes, la croissance exponentielle de la solution pour  $t$  tendant vers l'infini n'était guère possible. Le théorème de Bichteler semble d'ailleurs avoir été longtemps ignoré (il est valable même pour des semi-martingales directrices discontinues). Récemment est paru un article de Denis Feyel<sup>(3)</sup> qui, pour des semi-martingales directrices browniennes, donne d'un seul coup, par la méthode du point fixe appliquée, non pas à  $X$ , mais à  $e^{-ct} X$ , la solution dans tout son domaine d'existence, et montre sa croissance au plus exponentielle pour  $t \rightarrow +\infty$ . La méthode est encore celle du point fixe, donc la convergence de la série est géométrique. J'ajoute ici un complément qui, me semble-t-il, aurait pu être utilisé depuis longtemps (mais il n'est valable que pour des semi-martingales directrices continues) : sans méthode du point fixe, par une simple majoration des termes successifs  $X_{n+1} - X_n$ , on retrouve la convergence très rapide de Picard dans tout le domaine d'existence : ce n'est pas en  $\frac{k^n}{n!}$ , mais en  $(\frac{k^n}{n!})^{1/2}$ , ce qui est quand même beaucoup mieux que la convergence de la série géométrique ; voir le théorème (4.5) de cet article. Bien entendu, la majoration exponentielle à l'infini en résulte, (3.2.3), parce que  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^n}{n!})^{1/2} \leq e^{(1+\varepsilon)x/2}$  pour  $x \rightarrow +\infty$  (3.3.4, 5 et 6). On en déduit beaucoup d'autres majorations globales intéressantes, (voir (3.2) et (3.3)).

Il reste une question ouverte, et que, semble-t-il personne n'a jamais essayé de fermer. Supposons une EDS sous la forme élémentaire :

$$X = a + H(X) \cdot Z, \quad X = \dot{x} \quad \text{au temps } 0$$

où  $H$  est un champ localement borné, localement lipschitzien mais pas globalement,  $a$  un processus adapté cadlag. Il existe alors un temps de mort  $\zeta^x$ , variable aléatoire qui dépend de  $x$  ; c'est un temps d'arrêt prévisible. Est-ce que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des approximations successives converge vers la solution  $X$  dans tout son domaine d'existence, i.e. pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , uniformément sur tout compact de  $[0, \zeta^x(\omega)]$ ? Je crois que personne n'en sait rien !

## 0. Notations

$\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P}$  ont la signification et les propriétés habituelles.

On appellera  $\mathcal{S}^p$  l'espace des  $\mathbf{P}$ -classes de processus cadlag pour lesquels

$$(0.1) \quad \|X\|_{\mathcal{S}^p} = \|X^*\|_{L^p} < +\infty \quad \text{où} \quad X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|, X^* = X_\infty^*$$

On appellera  $\mathcal{H}^p$  l'espace des semi-martingales pouvant s'écrire sous la forme

$$X = V + M,$$

$V$  processus à variation finie,  $M$  martingale, pour lesquels, si on pose  $W_t = \int_{[0,t]} |dV_s|$ ,

$$(0.2) \quad \|W_\infty\|_{L^p} = \left( \mathbf{E} \left( \int_{\overline{\mathbf{R}}_+} |dV_s|^p \right) \right)^{1/p} < +\infty$$

$$(0.3) \quad \|[M, M]_\infty^{1/2}\|_{L^p} < +\infty, \quad \text{et on posera}$$

$$(0.4) \quad \|X\|_{\mathcal{H}^p} = \inf_{X=V+M} \left( \|W_\infty\|_{L^p} + \|[M, M]_\infty^{1/2}\|_{L^p} \right) \quad (4)$$

L'EDS aura la forme générale d'EMERY-MEYER<sup>(5)</sup> :

$$(0.5) \quad X = a + FX \cdot Z,$$

où  $a$  est un processus adapté cadlag,  $F$  est une application de l'espace des ( $\mathbf{P}$ -classes de) processus adaptés cadlag dans lui-même, telle que la connaissance de  $X$  dans  $[0, T[$ ,  $T$  temps d'arrêt  $\leq +\infty$  ( $+\infty$  point isolé  $> +\infty$ ), entraîne celle de  $FX$  dans  $[0, T[$  (cela ne donne pas  $(FX)_T$ , mais il est sans importance pour l'intégration stochastique par rapport à une semi-martingale continue  $Z$ ), globalement lipschitzienne sous la forme faible

$$(0.6) \quad (FX - FY)^* \leq K(X - Y)^*; \quad \text{avec} \quad F0 = 0$$

(pure question de commodité, on peut toujours s'y ramener en changeant  $a$ ), de sorte que  $(FX)^* \leq KX^*$  ;  $Z$  est une semi-martingale continue, ce qui est une restriction importante, que je n'ai pas pu lever. Pour  $X$  adapté cadlag,  $FX$  est adapté cadlag, donc optionnel,  $FX \cdot Z$  (intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue) est une semi-martingale continue ;  $a$  est un processus adapté cadlag donné,  $X$  est l'inconnue, processus adapté cadlag, semi-martingale si  $a$  l'est.

La constante de Burkholder-Davis-Gundy est  $C_p$ <sup>(6)</sup>, définie par

$$(0.7) \quad \|\cdot\|_{\mathcal{S}^p} \leq C_p \|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}, \quad 1 < p < +\infty.$$

Nous écrirons tout en unidimensionnel, le cas  $N$ -dimensionnel,  $N \in \mathbb{N}$ , est évidemment analogue, pratiquement sans changement d'écriture.

Au Paragraphe 1, on raisonnera dans  $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ ,  $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ , au lieu de  $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ,  $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$ . Dans ce cas, on supposera seulement que les processus sont  $\mathcal{S}_{\text{loc}}^p$  ou  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^p$ , c'-à-d.  $\mathcal{S}^p$  ou  $\mathcal{H}^p$  après arrêt à tout instant  $t > 0$  fini.

### 1. Le lemme fondamental

**Lemme (1.1).**— Soit  $Z = V + M$ , avec

$$(1.1.1) \quad |dV_t| + d[M, M]_t \leq dt.$$

En termes non différentiels, cela s'écrit

$$(1.1.1.1) \quad (W_b - W_a) + ([M, M]_b - [M, M]_a) \leq b - a.$$

Soit  $H$  un processus adapté cadlag, tel que, pour tout  $t$ ,

$$(1.1.2) \quad \|H^t\|_{\mathcal{H}^p} \leq C e^{ct} \left(\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2} \quad (7), \quad 2 \leq p < +\infty,$$

$C$  et  $c$  constantes  $> 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $H^t$  = processus  $H$  arrêté en  $t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ .

Alors, pour tout  $t$  :

$$(1.1.3) \quad \|(H \cdot Z)^t\|_{\mathcal{H}^p} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right) C e^{ct} \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}.$$

**Démonstration.**

$$(1.1.4) \quad (H \cdot Z)^t_{\mathcal{H}^p} \leq \left(\mathbf{E} \left(\int_0^t |H_s| |dV|_s\right)^p\right)^{1/p} + \left(\mathbf{E} \left(\int_0^t H_s^2 d[M, M]_s\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$

Considérons le premier terme. Il est  $\leq \left(\mathbf{E} \left(\int_0^t (H^s)^* ds\right)^p\right)^{1/p}$ .

C'est une norme  $L^p_\omega(L^1_s)$ , elle est plus petite que la norme  $L^p_s(L^1_\omega)$  :

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t ds (\mathbf{E}(H^s)^* p)^{1/p} \leq C \int_0^t e^{cs} \left(\frac{s^n}{n!}\right)^{1/2} ds \\ &\leq (\text{Cauchy - Schwarz}) C \left(\int_0^t e^{2cs} ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \frac{s^n}{n!} ds\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$(1.1.5) \text{ 1er terme} \quad \leq C \left(\frac{1}{2c}\right)^{1/2} e^{ct} \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$$

Prenons maintenant le deuxième terme. Il est

$$\leq \left(\mathbf{E} \left(\int_0^t (H^s)^*{}^2 ds\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$

C'est une norme  $L^p_\omega(L^2_s)$ , majorée, puisque  $p \geq 2$ , par la norme  $L^2_s(L^p_\omega)$  :

$$\leq \left(\int_0^t ds (\mathbf{E}(H^s)^* p)^{2/p}\right)^{1/2} \leq C \left(\int_0^t e^{2cs} \frac{s^n}{n!} ds\right)^{1/2}$$

$$(1.1.6) \text{ 2ème terme} \quad \leq C e^{ct} \left(\int_0^t \frac{s^n}{n!} ds\right)^{1/2} = C e^{ct} \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$$

En sommant (1.1.5) et (1.1.6), on obtient le résultat.

**Remarque :** On ne peut pas faire ici  $c = 0$  mais il n'est pas difficile d'y parvenir ; pour  $c = 0$  :

$$(1.1.7) \text{ 1er terme} \qquad \leq C\sqrt{t} \left( \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{1/2}$$

$$(1.1.8) \text{ 2ème terme} \qquad \leq C \left( \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{1/2}$$

Il suffit de remplacer  $e^{ct}$  par 1 dans (1.1.2), et

$$(1.1.9) \qquad e^{ct} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \text{ par } (\sqrt{t} + 1) \text{ dans (1.1.3).}$$

On se rend compte qu'on peut obtenir des résultats pour toute les croissances voulues à l'infini. Nous garderons le résultat exponentiel.

On peut modifier le résultat, de manière à garder aux deux membres la même chose,  $S^p$  ou  $\mathcal{H}^p$ , et les mêmes constantes à la puissance  $n$  ou  $n + 1$  :

$$(1.1.10) \qquad \|H^t\|_{S^p} \leq C e^{ct} \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right)^{2n} C_p^{2n} \frac{t^n}{n!} \right)^{1/2} \implies \|(H \cdot Z)^t\|_{S^p}$$

$$\leq C e^{ct} \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right)^{2(n+1)} C_p^{2(n+1)} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{1/2}$$

et la même inégalité en remplaçant  $\| \|_{S^p}$  par  $\| \|_{\mathcal{H}^p}$ .

**2. La série de Picard des approximations successives, hypothèse (1.1.1) sur  $Z$ .**

On part de n'importe quelle valeur initiale  $X_0$  (attention :  $X_n$  sera le  $n$ -ième terme de la série de Picard, non la valeur de  $X$  à l'instant  $n$ ).

On construira  $X_n = a + FX_{n-1} \cdot Z, \dots$

Compte tenu de la relation de Lipschitz, (0.6), on aura le résultat suivant :

**Proposition (2.1).**— Pour  $n \geq 0$ , si, pour tout  $t$ ,  $\|(X_1 - X_0)^t\|_{S^p} \leq C e^{ct}$ , on a pour tout  $t$ ,

$$\|(X_{n+1} - X_n)^t\|_{S^p} \leq C e^{ct} \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right)^{2n} C_p^{2n} K^{2n} \frac{t^n}{n!} \right)^{1/2}$$

et la même inégalité avec les normes  $\mathcal{H}^p$ .

**Démonstration.** C'est vrai pour  $n = 0$ . Supposons l'inégalité démontrée pour  $n$ , démontrons là pour  $n+1$  :

$$X_{n+2} - X_{n+1} = (FX_{n+1} - FX_n) \cdot Z$$

$$X_{n+2}^t - X_{n+1}^t = ((FX_{n+1} - FX_n) \cdot Z)^t$$

Posons  $H = FX_{n+1} - FX_n$  ;  $H^{t-} = (FX_{n+1} - FX_n)^{t-} = (FX_{n+1}^{t-} - FX_n^{t-})^{t-}$  parce que  $FX_n$  et  $FX_n^{t-}$  coïncident dans  $[0, t[$  ; alors

$$(H^{t-})^* \leq (FX_{n+1}^{t-} - FX_n^{t-})^* \leq K(X_{n+1}^{t-} - X_n^{t-})^* \leq K(X_{n+1}^t - X_n^t)^* \text{ donc}$$

$$\|(H^{t-})^*\|_{L^p} \leq K K^n C e^{ct} \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right)^{2n} C_p^{2n} \frac{t^n}{n!} \right)^{1/2} ;$$

par la continuité du dernier membre en  $t$ , on a la même inégalité pour  $(H^t)_{L^p}^*$  ; il suffit alors d'appliquer (1.1.10).

**Proposition (2.2).**— Soient  $X_0, X'_0$ , deux processus initiaux, donnant naissance aux suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si, pour tout  $t, \|(X'_0 - X_0)^t\| \leq C e^{ct}$ , on aura, pour tout  $t$ ,

$$(2.2.1) \quad \|(X'_n - X_n)^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq C e^{ct} \left( \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^{2n} C_p^{2n} K^{2n} \frac{t^n}{n!} \right)^{1/2}$$

**Démonstration.** C'est la même que la précédente : l'inégalité est vraie pour  $n = 0$ , on la suppose vraie pour  $n$ , on la démontre pour  $n + 1$ , avec

$$X'_{n+1} - X_{n+1} = (FX'_n - FX_n) \cdot Z = H \cdot Z.$$

(2.3) Ces inégalités montrent que, si  $a \in \mathcal{S}_{\text{loc}}^p$ , la série de terme général  $X_{n+1}^t - X_n^t$  converge absolument dans  $\mathcal{S}^p$ , donc la suite des  $X_n$  a une limite  $X$  dans  $\mathcal{S}_{\text{loc}}^p$ , qui est indépendante du choix initial  $X_0$ .

La limite  $X$  est solution de l'EDS. En effet,  $(FX_n^{t-} - FX^{t-})^* \leq K(X_n^t - X^t)^*$ , donc  $FX_n^{t-}$  converge vers  $FX^{t-}$  dans  $\mathcal{S}^p$  ;

$$(FX_n \cdot Z)^t = (FX_n) 1_{[0,t]} \cdot Z = (FX_n^{t-}) 1_{[0,t]} \cdot Z^t,$$

où  $Z^t \in \mathcal{H}^\infty$ , converge dans  $\mathcal{H}^p$  vers  $(FX \cdot Z)^t$ . De  $X_{n+1}^t = a^t + (FX_n \cdot Z)^t$  on déduit alors  $X^t = a^t + (FX \cdot Z)^t$ ; comme  $t$  est quelconque,  $X = a + FX \cdot Z$ ,  $X$  est solution de l'EDS. Puisque, quel que soit  $X_0$ ,  $X_n$  converge toujours vers  $X$ , on voit que si  $Y$  est une solution,  $X_0 = Y$  donne  $X_n = Y$  donc  $X = Y$ , donc la solution est unique.

### 3. Conséquences

(3.1) La série de Picard converge vite ; pas en  $\frac{t^n}{n}$  comme pour une E.D. ordinaire, mais en  $\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2}$ , ce qui est quand même beaucoup plus rapide qu'une série géométrique. Une fois choisi  $c$ , la convergence ne dépend plus de  $a$ . Comme une fois choisi  $X_0, X_1$  dépend continuellement de  $a$  (dans  $\mathcal{S}_{\text{loc}}^p$  ou  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^p$  si  $a \in \mathcal{S}_{\text{loc}}^p$  ou  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^p$ ), la solution aussi dépend continuellement de  $a$  dans  $\mathcal{S}_{\text{loc}}^p$  ou  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^p$ . Souvent  $a = x$ , condition initiale.

(3.2) Appelons  $e$  la fonction, pour  $x \geq 0$  :

$$(3.2.0) \quad e(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{x^k}{k!} \right)^{1/2}.$$

Alors

$$(3.2.0.1) \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{x^k}{k!} \right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{x^{k+n}}{(k+n)!} \right)^{1/2} \leq \left( \frac{x^n}{n!} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{x^k}{k!} \right)^{1/2} = \left( \frac{x^n}{n!} \right)^{1/2} e(x)$$

Posons

$$(3.2.0.2) \quad \mathbf{E}(c, K, t) = e^{ct} e \left( \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 C_p^2 K^2 t \right).$$

Alors, en partant de  $X_0$ , on trouve une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$(3.2.1) \quad (\forall t, \|(X_1 - X_0)^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq C e^{ct}) \implies \forall t, \|(X - X_0)^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq C \mathbf{E}(c, K, t).$$

Bornons-nous à  $t \leq \tau$ . Alors  $\forall t \leq \tau$ ,  
 $\|(X - X_0)^t\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|(X_1 - X_0)^t\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|(X_1 - X_0)^t\|_{\mathcal{S}_p} e^{ct}$ . On aura alors, en prenant  $t = \tau$  :

$$(3.2.2) \quad \|(X - X_0)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \mathbf{E}(c, K, \tau).$$

En partant de  $X_0 = 0$ , donc  $X_1 = a$

$$(3.2.3) \quad \|X_{\mathcal{S}_p}^\tau\| \leq \|a^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \mathbf{E}(c, K, \tau).$$

Si  $X, X'$  sont les solutions correspondant à  $a, a'$  :

$$(3.2.4) \quad \|(X' - X)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|(a' - a)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \mathbf{E}(c, K, \tau).$$

(On pose  $X' = X + Y$ . Alors  $Y = a' - a + (F(X + Y) - F(X)) \cdot Z = b + GY \cdot Z$ , où  $G$  a les mêmes propriétés que  $F$ . Il suffit d'appliquer (3.2.3), avec  $b = a' - a$ , pour trouver le résultat).

En partant de (3.2.0.1) :

$$(3.2.5) \quad \|(X - X_n)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \left( \frac{\left( \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 C_p^2 K^2 \tau \right)^n}{n!} \right)^{1/2} \mathbf{E}(c, K, \tau).$$

En faisant  $n = 1$ , avec  $X_0 = 0, X_1 = a$  :

$$(3.2.5.1) \quad \|(X - a)^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \leq \|a^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) C_p K \sqrt{\tau} \mathbf{E}(c, K, \tau).$$

Si  $a = x$ , valeur initiale,  $\|a^\tau\|_{\mathcal{S}_p} = x$ , et on voit que  $\|(X - x)^\tau\|_{\mathcal{S}_p}$  tend vers 0, pour  $\tau$  tendant vers 0, comme  $\sqrt{\tau}$ .

Rappelons que  $\mathbf{E}(c, K, \tau)$  tend vers 1 quand  $\tau$  tend vers 0. Donc

$$(3.2.6) \quad \|X^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \leq (1 + o(1)) \|a^\tau\|_{\mathcal{S}_p} \quad \text{quand } \tau \text{ tend vers } 0.$$

(3.3) Examinons le comportement de  $e(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ; il est évidemment exponentiel.

$$(3.3.1) \quad \frac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n/2} e^{-n/2} \sqrt[4]{2\pi n}}, \quad \frac{1}{(n/2)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{n/2}}{n^{n/2} e^{-n/2} \sqrt{2\pi \frac{n}{2}}} \quad (\text{Stirling}).$$

$$(3.3.2) \quad \frac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \text{const.} \cdot 2^{-n/2} \sqrt[4]{n} \frac{1}{(n/2)!}.$$

$$(3.3.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{\sqrt{n!}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(1+\varepsilon)x}{2} \right)^{n/2} \frac{1}{(n/2)!}, \quad \varepsilon > 0.$$

La série correspondant aux  $n$  pairs,  $n = 2k$ , est

$$(3.3.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(1+\varepsilon)x}{2} \right)^k \frac{1}{k!} = e^{(1+\varepsilon)x/2}.$$

La série correspondant aux  $n$  impairs,  $n = 2k + 1$ , est

$$(3.3.5) \quad \leq \left( \frac{(1+\varepsilon)x}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(1+\varepsilon)x}{2} \right)^k / k! = \left( \frac{(1+\varepsilon)x}{2} \right)^{1/2} e^{(1+\varepsilon)x/2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\leq} e^{(1+2\varepsilon)x/2}.$$

Finalement, en changeant d' $\varepsilon$  :

$$(3.3.6) \quad \mathbf{E}(c, K, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\leq} e^{\left( c + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right)^2 C_p^2 K^2 \left( \frac{1+t}{2} \right) \right) t},$$

ce qui est une croissance exponentielle.

Si  $\|a^t\|_{\mathcal{S}^p}$  est majorée par une constante indépendante de  $t$ , on a le choix de  $c$ .

Je n'ai pas envie de chercher la meilleure valeur de  $c$ .

(3.4) On ne peut pas descendre au-dessous des croissances exponentielles pour  $t$  tendant vers  $+\infty$ , ce que montre déjà l'ÉD ordinaire  $dX_t = cX_t dt$ , de solution  $X = \text{const. } e^{ct}$ .

Mais, pour toutes les croissances plus grandes, on a d'excellentes majorations par (3.2.3).

Par exemple, si  $\|a^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq e^{t^2}$  pour  $t$  grand, on aura  $\|X^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq e^{\lambda t + t^2}$ ,  $\lambda$  convenable,  $\leq e^{(1+\varepsilon)t^2}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

### (3.5) Convergence presque sûre.

La convergence normale (ou absolue) d'une série dans  $L^p$  entraîne sa convergence pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ . On en déduit que, pour  $a \in \mathcal{S}_{\text{loc}}^p$ ,  $X_n$  converge vers  $X$ ,  $\mathbf{P}$ -ps., uniformément pour  $t$  borné,  $t \leq \tau < +\infty$ .

Il faut s'affranchir de la condition  $a \in \mathcal{S}_{\text{loc}}^p$ .

Soit  $T_\ell = \inf\{t; |a_t| > \ell\}$ . Les  $T_\ell$  tendent vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , dès lors que  $a$  est cadlag sur  $\mathbf{R}_+ \times \Omega$  ( $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ ). Et  $|a^{T_\ell-}| \leq \ell$ .

$$X^{T_\ell-} = a^{T_\ell-} + F(X^{T_\ell-}) 1_{[0, T_\ell[} \cdot Z$$

(parce que  $FX$  et  $FX^{T_\ell-}$  coïncident dans  $[0, T_\ell[$ ).

Donc  $X^{T_\ell-}$  satisfait à une EDS ayant les mêmes propriétés, mais  $a^{T_\ell-} \in \mathcal{S}^p$ . On en déduit que  $X_n$  converge vers  $X$  pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , uniformément pour  $t < T_\ell \wedge \tau$ ; comme  $T_\ell$  tend vers  $+\infty$  avec  $\ell$ , c'est encore vrai pour  $t \leq \tau < +\infty$ .

Par contre, il est plus délicat de passer à  $\overline{\mathbf{R}}_+$  et de s'affranchir de la très forte hypothèse  $|dV_t| + d[M, M]_t \leq dt$ ; mais un simple changement de temps y suffira.



#### 4. Changement de temps, cas général.

On prend maintenant l'EDS la plus générale,  $X = a + FX \cdot Z$ , où  $Z$  est une semi-martingale continue quelconque sur  $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ,  $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$ ,  $Z = V + M$ .

Effectuons le changement de temps

$$(4.1) \quad u = A_t$$

où  $A$  est adapté continu, strictement croissant,  $A_0 = 0$ ,  $A_{+\infty} = \beta < +\infty$ . On écrira le changement réciproque  $t = B_u = \inf\{s; A_s > u\}$ , chaque  $B_u$  est un temps d'arrêt ;  $B$  est continue,  $B_0 = 0$ , strictement croissante sur  $[0, \beta]$ ,  $B \equiv +\infty$  sur  $[\beta, +\infty]$  ; puis  $B \circ A = I$ ,  $A \circ B = I$  sur  $[0, \beta]$ ,  $B = \beta$  sur  $[\beta, +\infty]$ .

On partait d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$ , que nous appellerons plutôt  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$ , on a une nouvelle filtration  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_u)_{u \in \overline{\mathbf{R}}_+}$ ,  $\mathcal{B}_u = \mathcal{A}_{B_u}$ , pour laquelle chaque  $A_t$  est un temps d'arrêt ;  $\beta$  est donc un  $\mathcal{B}$ -arrêt.

Si on part de la filtration  $(\mathcal{B}_u)_{u \in \overline{\mathbf{R}}_+}$  et qu'on fait  $t = B_u$ , on retrouve  $(\mathcal{A}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$ ,  $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_{A_t}$ , et de  $t = B_u$  on redéduit  $u = A_t$ .

(4.2) Il est équivalent que  $T$  soit un temps d'arrêt pour  $\mathcal{A}$ , ou que  $A_T$  soit un temps d'arrêt pour  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_{A_T} = \mathcal{A}_T$  ; que  $U$  soit un temps d'arrêt pour  $\mathcal{B}$ , ou que  $B_U$  soit un temps d'arrêt pour  $\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{A}_{B_U} = \mathcal{B}_U$ .

(4.3) Soit  $X$  un processus sur  $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$  ; on forme un nouveau processus  $\hat{X}$ ,  $\hat{X}_u = X_{B_u}$  ou  $\hat{X} = X \circ B$ , constant  $= X_{+\infty}$  sur  $[\beta, +\infty]$  ; alors  $X = \hat{X} \circ A$ . (Mais si on part d'un processus  $Y$ , et qu'on forme  $X = Y \circ A$ ,  $X \circ B$  ne sera pas  $Y$  mais le processus arrêté  $Y^\beta$ ) ;  $X$  est  $\mathcal{A}$ -adapté ssi  $\hat{X}$  est  $\mathcal{B}$ -adapté ;  $X$  est cadlag ou continu ssi  $\hat{X}$  l'est ;  $X$  est semi-martingale, martingale, martingale locale, à variation finie, ssi  $\hat{X}$  l'est. Puis  $X$  est  $\mathcal{A}$ -optionnel, prévisible, ssi  $\hat{X}$  est  $\mathcal{B}$ -optionnel, prévisible. Les intégrales stochastiques sont préservées,  $(H \cdot X) \circ B = (H \circ B) \cdot (X \circ B)$ .

Si  $X$  vérifie l'EDS  $X = a + FX \cdot Z$ ,  $\hat{X}$  vérifie  $\hat{X} = \hat{a} + \hat{F} \hat{X} \cdot \hat{Z}$ , où  $\hat{F}Y = (F(Y \circ A)) \circ B$  ;  $\hat{F}Y$  ne dépend que des valeurs de  $Y$  dans  $[0, \beta]$ . L'opérateur  $\hat{F}$  convient bien pour une EDS ; car, si  $Y = Y'$  dans  $[0, U[$ ,  $U$   $\mathcal{B}$ -arrêt,  $Y \circ A = Y' \circ A$  dans  $[0, B_U[$ ,  $B_U$  est un  $\mathcal{A}$ -arrêt, donc  $F(Y \circ A) = F(Y' \circ A)$  dans  $[0, B_U[$ , donc  $\hat{F}Y = \hat{F}Y'$  dans  $[0, U[$  ; et la condition de Lipschitz est évidemment vérifiée,  $(\hat{F}Y - \hat{F}Y')^* \leq K(Y - Y')^*$ .

En effet,

$$(\hat{F}Y - \hat{F}Y')^* = (F(Y \circ A) \circ B - F(Y' \circ A) \circ B)^* = (F(Y \circ A) - F(Y' \circ A))^* \leq K(Y \circ A - Y' \circ A)^* \leq K(Y - Y')^*.$$

Enfin, si  $X$  est une semi-martingale,  $[X, Y] \circ B = [X \circ B, Y \circ B]$ , ou  $[X, Y]^\wedge = [\hat{X}, \hat{Y}]$ .

**Théorème (4.4).**— *Considérons l'EDS*

$$(4.4.1) \quad X = a + FX \cdot Z, \quad \text{sur } \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega,$$

où  $a$  est adapté cadlag et  $Z$  semi-martingale continue,  $F$  vérifiant la condition habituelle d'EMERY-MEYER.

Si on part de  $X_0$  et qu'on pose

$$X_n = a + FX_{n-1} \cdot Z,$$

les  $X_n$  convergent vers une limite  $X$ ,  $\mathbf{P}$ -ps. uniformément en  $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$ ,  $X$  est solution de l'EDS ; la limite est indépendante du choix de  $X_0$ , et c'est l'unique solution de l'EDS.

**Démonstration.** On fera le changement de temps  $u = A_t = W_t + [M, M]_t + \frac{t}{t+1}$ , strictement croissant continu,

$$A_0 = 0, \quad A_{+\infty} = \beta = \int_0^{+\infty} |dV_s| + [M, M]_{+\infty} + 1 < +\infty.$$

On obtient une nouvelle EDS :

$$\widehat{X} = \widehat{a} + \widehat{F} \widehat{X} \cdot \widehat{Z}, \quad \widehat{Z} = \widehat{V} + \widehat{M}.$$

Avec  $a = A_s, b = A_t$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_b - \widehat{W}_a) + ([\widehat{M}, \widehat{M}]_b - [\widehat{M}, \widehat{M}]_a) &= (\widehat{W}_{A_t} - \widehat{W}_{A_s}) + ([M, M]_{A_t}^\wedge - [M, M]_{A_s}^\wedge) \\ &= (W_{BA_t} - W_{BA_s}) + ([M, M]_{BA_t} - [M, M]_{BA_s}) \\ &= (W_t - W_s) + ([M, M]_t - [M, M]_s) \leq A_t - A_s = b - a, \end{aligned}$$

ou  $d\widehat{W}_u + d[\widehat{M}, \widehat{M}]_u \leq du$ , sur  $[0, \beta]$ , mais il est nul au delà de  $\beta$ .

On se retrouve dans les conditions du paragraphe précédent.

On en déduit que  $\mathbf{P}$ -ps.  $\widehat{X}_n$  converge vers  $\widehat{X}$  uniformément en  $u$  dans tout compact de  $\mathbf{R}_+$ , avec les unicités voulues. Mais  $\beta < +\infty$ , donc  $[0, \beta(\omega)]$  est compact dans  $\mathbf{R}_+$ .

Comme  $A$  envoie bijectivement  $\overline{\mathbf{R}}_+$  sur  $[0, \beta]$ ,  $B$  bijectivement  $[0, \beta]$  sur  $\overline{\mathbf{R}}_+$ ,  $\mathbf{P}$ -ps.  $X_n = \widehat{X}_n \circ A$  converge vers  $X = \widehat{X} \circ A$ , uniformément sur  $\overline{\mathbf{R}}_+$ .

On a de plus la rapidité de la convergence :

**Théorème (4.5).**— Pour l'EDS (4.4.1), pour tout départ  $X_0$ , pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , il existe  $k = k(\omega)$  et  $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbf{N}$ , tels que, pour  $n \geq n_0$ ,

$$(4.5.1) \quad (X_{n+1} - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2},$$

$$(4.5.2) \quad (X - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2}.$$

Si  $X_0, X'_0$  sont deux départs,  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(X'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  les suites correspondantes, pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , il existe  $k = k(\omega)$  et  $n_0 = n_0(\omega)$  telle que pour  $n \geq n_0$  :

$$(4.5.3) \quad (X'_n - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2}.$$

**Démonstration.** Partons de  $X_0 = 0, X_1 = a$ .

A) Plaçons-nous d'abord dans les conditions du Paragraphe 2,  $a \in \mathcal{S}_{\text{loc}}^p$ , avec  $p = 2$  par exemple.

Pour tout  $\tau < +\infty$ , il existe un  $\alpha$ , dépendant seulement de  $K, \tau, \|a_\tau^*\|_{L^2}$ , tel que, pour tout  $n$  :

$$(4.5.4) \quad \|(X_{n+1} - X_n)_\tau^*\|_{L^2} \leq \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^{1/2}, \quad \text{pour } X_0 = 0.$$

Par Bienaymé-Tchebichev :

$$(4.5.5) \quad \mathbf{P} \left\{ (X_{n+1} - X_n)_\tau^* > \left(\frac{2\alpha^n}{n!}\right)^{1/2} \right\} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < +\infty$ , Borel-Cantelli dit que **P** ps. un nombre fini seulement de ces événements a lieu.

Donc : pour tout  $\tau$ , il existe  $\alpha = \alpha(K, \tau, \|a_{\tau}^*\|_{L^2})$  tel que, pour **P**-presque tout  $\omega$ , il existe  $n_0 = n_0(\omega, \tau, a, F, Z)$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$(4.5.6) \quad (X_{n+1} - X_n)_{\tau}^*(\omega) \leq \left( \frac{(2\alpha)^n}{n!} \right)^{1/2} .$$

B) Plaçons-nous maintenant dans la situation de (3.5),  $a \notin \mathcal{S}^p$ . On a déterminé une suite de temps d'arrêt  $T_{\ell}$  tendant vers  $+\infty$ , et à chaque  $(X_{n+1} - X_n)^{T_{\ell}-}$  on peut appliquer la même inégalité ; avec  $\|(a^{T_{\ell}-})_{\tau}^*\|_{L^2} \leq \ell$ . Donc : pour tout  $\tau$ , pour tout  $\ell$ , il existe  $\alpha = \alpha(K, \tau, \ell)$  tel que, pour tout **P**-presque tout  $\omega$ , il existe  $n_0 = n_0(\omega, \tau, \ell, a, F, Z)$  tel que, pour  $n \geq n_0$  :

$$(4.5.7) \quad \left( (X_{n+1} - X_n)^{T_{\ell}-} \right)_{\tau}^*(\omega) \leq \left( \frac{(2\alpha)^n}{n!} \right)^{1/2} .$$

On a : pour tout  $\tau$ , pour tout  $\ell$ , **P**-ps. ; donc aussi **P**-ps., pour tout  $\tau \in \mathbf{N}$  ou pour tout  $\tau$ , pour tout  $\ell$ . Donc : pour **P**-presque tout  $\omega$ , pour tout  $\tau$ , pour tout  $\ell$ , il existe  $n_0 = n_0(\omega, \tau, \ell, a, F, Z)$  tel que, pour  $n \geq n_0$  :

$$(4.5.8) \quad \left( (X_{n+1} - X_n)^{T_{\ell}-} \right)_{\tau}^*(\omega) \leq \left( \frac{(2\alpha(K, \tau, \ell))^n}{n!} \right)^{1/2} .$$

Mais  $T_{\ell}$  tend vers  $+\infty$ . Donc, pour tout  $\omega$ , il existe  $\ell = \ell(\omega, a, \tau)$  tel que  $T_{\ell}(\omega) > \tau$ . Alors : pour **P**-presque tout  $\omega$ , il existe  $n_0 = n_0(\omega, \tau, a, F, Z)$  tel que, pour  $n \geq n_0$  :

$$(4.5.9) \quad (X_{n+1} - X_n)_{\tau}^*(\omega) \leq \left( \frac{(2\alpha(K, \tau, \ell(\omega, a, \tau)))^n}{n!} \right)^{1/2} .$$

C) Plaçons-nous enfin dans la situation générale du théorème (4.4). Nous choisirons  $\tau = \beta(\omega)$  ( $\beta$  dépend de  $Z$ ). Alors : pour **P**-presque tout  $\omega$ , il existe  $n_0 = n_0(\omega, a, F, Z)$  tel que, pour  $n \geq n_0$

$$\left( \widehat{X}_{n+1} - \widehat{X}_n \right)_{\beta}^*(\omega) \leq \left( \frac{(2\alpha(K, \beta(\omega), \ell(\omega, a, \beta(\omega))))^n}{n!} \right)^{1/2} .$$

Or  $(X_{n+1} - X_n)_{\infty}^* = \left( \widehat{X}_{n+1} - \widehat{X}_n \right)_{\beta}^*$ , d'où le théorème,

$$(4.5.10) \quad \text{avec } k = 2\alpha(K, \beta(\omega), \ell(\omega, a, \beta(\omega))) .$$

Nous avons fait les calculs en partant de  $X_0 = 0$ , le résultat est le même pour  $X_0$  arbitraire, mais on devra partout remplacer  $a$  par  $(X_1 - X_0)$ . La formule (4.5.2) utilisera (3.2.5) au lieu de (2.1). La formule (4.5.3) utilisera (2.2.1) et on remplacera  $a$  par  $X'_0 - X_0$ .

## NOTES DE BAS DE PAGE

**Note(1), page 1**

M. EMERY [1], pages 281-293.

**Note(2), page 1**

K. BICHTLER [1].

**Note(3), page 1**

D.FEYEL [1].

**Note(4), page 2**

Normes  $S^p$  et  $\mathcal{H}^p$ , voir Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER [1] : pour  $S^p$  appelé là  $\mathcal{R}^p$ , chap.VII, définition 64 page 273 ; pour  $\mathcal{H}^p$ , chap.VII, définition 98 page 310. La norme  $\mathcal{H}^p$  de P.A. MEYER est équivalente à celle qui est définie ici, mais pas égale.

**Note(5), page 2**

Voir <sup>(1)</sup>, page 1.

**Note(6), page 2**

Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER [1], chap.VII, T92 page 304, et (98.7) page 311.

**Note(7), page 3**

L'introduction de l'exponentielle  $e^{ct}$  est ce qui permet à D. FEYEL d'obtenir son résultat.

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] K. BICHTLER, Stochastic integration and  $L^p$ -theory of semi-martingales, Annals of probability, 1981, vol.9, n° 1, p. 49-89.
- [1] Cl. DELLACHERIE et P.A.MEYER, Probabilités et potentiels, théorie des martingales, Paris Hermann, Actualités Scientifiques et industrielles, n° 1385, 1980.
- [1] M. EMERY, Equations différentielles lipschitziennes, étude de la stabilité, Séminaire de Probabilités XIII, 1977-78, n° 721, 1979, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, pages 281-293.
- [1] D. FEYEL, Sur la méthode de Picard (EDO et EDS), Séminaire de probabilités XXI, 1985-86, n° 1247, 1987, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, pages 515-519.

## Index des notations et index terminologique

$S^p, \mathcal{H}^p$	page 2
$FX$	page 2
$C_p$	page 2
$e$	page 5
$E(c, K, t)$	page 5
changement de temps	page 8
$\beta$	page 8

## Table des matières

Introduction	page 1
Paragraphe 0. Notations.	page 2
Paragraphe 1. Le lemme fondamental.	page 3
Paragraphe 2. La série de Picard des approximations successives, hypothèse (1.1.1) sur $Z$ .	page 4
Paragraphe 3. Conséquences.	page 5
Paragraphe 4. Changement de temps, cas général.	page 8
Notes de bas de page	page 11
Index bibliographique	page 11
Index des notations et index terminologique	page 12
Table des matières	page 12

---

*Laurent Schwartz*  
 37, rue Pierre Nicole  
 75005 PARIS  
 (France)