Laurent Schwartz

La convergence de la série de Picard pour les EDS

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 343-354
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__343_0>

La convergence de la série de Picard pour les EDS

(Equations Différentielles Stochastiques)

Laurent Schwartz

Introduction

Le sort de la théorie des EDS a été étrange. De nombreuses questions très naturelles n'ont pas été posées, pendant très longtemps. Depuis qu'existe le théorème du point fixe, on a absolument voulu les faire rentrer dans ce moule ; on résout un morceau de l'équation, dans un intervalle stochastique $[0, T_1[$, par le théorème du point fixe, ce qui, pour les approximations successives $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, donne une convergence géométrique de la série de Picard $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - X_n)$. Ayant la solution en T_1, on repart dans un nouvel intervalle stochastique $[T_1, T_2[$, et ainsi de suite. La solution n'est obtenue que par raccordements de morceaux de solution[(1)]. Ce qui d'ailleurs n'a jamais pu etre amélioré lorsque les semi-martingales directrices ont des discontinuités. Il me semble que Bichteler [(2)] est le premier à avoir démontré que la série de Picard $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - X_n)$ converge, non seulement dans $[0, T_1[$, mais dans tout le domaine d'existence $[0, +\infty|$; sans pour cela éviter de faire la démonstration par morceaux $[0, T_1[$, $[T_1, T_2[, \ldots$, mais en montrant, une fois l'existence et l'unicité montrées, que, si la série converge dans $[T_k, T_{k+1}[$, elle converge aussi dans $[T_{k+1}, T_{k+2}[$. Bien sûr, avec ces méthodes, la croissance exponentielle de la solution pour t tendant vers l'infini n'était guère possible. Le théorème de Bichteler semble d'ailleurs avoir été longtemps ignoré (il est valable même pour des semi-martingales directrices discontinues). Récemment est paru un article de Denis Feyel[(3)] qui, pour des semi- martingales directrices browniennes, donne d'un seul coup, par la méthode du point fixe appliquée, non pas à X, mais à $e^{-ct}X$, la solution dans tout son domaine d'existence, et montre sa croissance au plus exponentielle pour $t \to +\infty$. La méthode est encore celle du point fixe, donc la convergence de la série est géométrique. J'ajoute ici un complément qui, me semble-t-il, aurait pu être utilisé depuis longtemps (mais il n'est valable que pour des semi-martingales directrices continues) : sans méthode du point fixe, par une simple majoration des termes successifs $X_{n+1} - X_n$, on retrouve la convergence très rapide de Picard dans tout le domaine d'existence : ce n'est pas en $\frac{k^n}{n!}$, mais en $(\frac{k^n}{n!})^{1/2}$, ce qui est quand même beaucoup mieux que la convergence de la série géométrique ; voir le théorème (4.5) de cet article. Bien entendu, la majoration exponentielle à l'infini en résulte, (3.2.3), parce que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{x^n}{n!})^{1/2} \leq e^{(1+\varepsilon)x/2}$ pour $x \to +\infty$ (3.3.4,5 et 6). On en déduit beaucoup d'autres majorations globales intéressantes, (voir (3.2) et (3.3).

Il reste une question ouverte, et que, semble-t-il personne n'a jamais essayé de fermer. Supposons une EDS sous la forme élémentaire :

$$X = a + H(X) \cdot Z\,, \quad X = \dot{x} \quad \text{au temps } 0$$

où H est un champ localement borné, localement lipschitzien mais pas globalement, a un processus adapté cadlag. Il existe alors un temps de mort ζ^x, variable aléatoire qui dépend de x ; c'est un temps d'arrêt prévisible. Est-ce que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des approximations successives converge vers la solution X dans tout son domaine d'existence, i.e. pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, uniformément sur tout compact de $[0,\zeta^x(\omega)[$? Je crois que personne n'en sait rien !

0. Notations

$\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P}$ ont la signification et les propriétés habituelles.

On appellera $\mathcal{S}^p$ l'espace des $\mathbf{P}$-classes de processus cadlag pour lesquels

$$(0.1) \qquad \|X\|_{\mathcal{S}^p} = \|\, X^* \,\|_{L^p} < +\infty \quad \text{où} \quad X_t^* = \operatorname*{Sup}_{s\le t} |X_s|, X^* = X_\infty^*$$

On appellera $\mathcal{H}^p$ l'espace des semi-martingales pouvant s'écrire sous la forme

$$X = V + M\,,$$

V processus à variation finie, M martingale, pour lesquels, si on pose $W_t = \int_{[0,t]} |dV_s|$,

$$(0.2) \qquad \|W_\infty\|_{L^p} = \left(\mathbf{E}(\int_{\overline{\mathbf{R}}_+} |dV_s|)^p\right)^{1/p} < +\infty$$

$$(0.3) \qquad \|[M,M]_\infty^{1/2}\|_{L^p} < +\infty\,, \quad \text{et on posera}$$

$$(0.4) \qquad \|X\|_{\mathcal{H}^p} = \operatorname*{Inf}_{X=V+M} \left(\|W_\infty\|_{L^p} + \|[M,M]_\infty^{1/2}\|_{L^p}\right) {}^{(4)}$$

L'EDS aura la forme générale d'EMERY-MEYER(5) :

$$(0.5) \qquad X = a + FX \cdot Z\,,$$

où a est un processus adapté cadlag, F est une application de l'espace des ($\mathbf{P}$-classes de) processus adaptés cadlag dans lui-même, telle que la connaissance de X dans $[0,T[$, T temps d'arrêt $\le \overline{+\infty}$ ($\overline{+\infty}$ point isolé $> +\infty$), entraîne celle de FX dans $[0,T[$ (cela ne donne pas $(FX)_T$, mais il est sans importance pour l'intégration stochastique par rapport à une semi-martingale continue Z), globalement lipschitzienne sous la forme faible

$$(0.6) \qquad (FX - FY)^* \le K(X-Y)^*\,; \quad \text{avec} \quad F0 = 0$$

(pure question de commodité, on peut toujours s'y ramener en changeant a), de sorte que $(FX)^* \le KX^*$; Z est une semi-martingale *continue*, ce qui est une restriction importante, que je n'ai pas pu lever. Pour X adapté cadlag, FX est adapté cadlag, donc optionnel, $FX \cdot Z$ (intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue) est une semi-martingale continue ; a est un processus adapté cadlag donné, X est l'inconnue, processus adapté cadlag, semi-martingale si a l'est.

La constante de Burkholder-Davis-Gundy est C_p (6), définie par

$$(0.7) \qquad \|\ \|_{\mathcal{S}^p} \le C_p \|\ \|_{\mathcal{H}^p}\,, \quad 1 < p < +\infty\,.$$

Nous écrirons tout en unidimensionnel, le cas N-dimensionnel, $N \in \mathbf{N}$, est évidemment analogue, pratiquement sans changement d'écriture.

Au Paragraphe 1, on raisonnera dans $\mathbf{R}_+ \times \Omega$, $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty[$, au lieu de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0,+\infty]$. Dans ce cas, on supposera seulement que les processus sont $\mathcal{S}^p_{\text{loc}}$ ou $\mathcal{H}^p_{\text{loc}}$, c'-à-d. $\mathcal{S}^p$ ou $\mathcal{H}^p$ après arrêt à tout instant $t > 0$ fini.

1. Le lemme fondamental

Lemme (1.1).— *Soit $Z = V + M$, avec*

(1.1.1) $$[dV_t \mid +d[M,M]_t \leq dt\,.$$

En termes non différentiels, cela s'écrit

(1.1.1.1) $$(W_b - W_a) + ([M,M]_b - [M,M]_a) \leq b - a\,.$$

Soit H un processus adapté cadlag, tel que, pour tout t,

(1.1.2) $$\|H^t\|_{S^p} \leq C\,e^{ct}\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2} \text{(7)}, \quad 2 \leq p < +\infty\,,$$

C et c constantes > 0, $n \in \mathbf{N}$; H^t =processus H arrêté en t, $0 \leq t < +\infty$.

Alors, pour tout t :

(1.1.3) $$\|(H \cdot Z)^t\|_{\mathcal{H}^p} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right) C\,e^{ct}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}\,.$$

Démonstration.

(1.1.4) $$(H \cdot Z)^t{}_{\mathcal{H}^p} \leq \left(\mathbf{E}\left(\int_0^t |H_s|\,|dV|_s\right)^p\right)^{1/p} + \left(\mathbf{E}\left(\int_0^t H_s^2\,d[M,M]_s\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$

Considérons le premier terme. Il est $\leq \left(\mathbf{E}\left(\int_0^t (H^s)^* ds\right)^p\right)^{1/p}$.

C'est une norme $L^p_\omega(L^1_s)$, elle est plus petite que la norme $L^1_s(L^p_\omega)$:

$\leq \int_0^t ds\,(\mathbf{E}(H^s)^{*p})^{1/p} \leq C \int_0^t e^{cs}\left(\frac{s^n}{n!}\right)^{1/2} ds$

$\leq (\text{Cauchy} - \text{Schwarz})\,\mathrm{C}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{2cs}\mathrm{ds}\right)^{1/2}\left(\int_0^t \frac{\mathrm{s}^n}{\mathrm{n}!}\mathrm{ds}\right)^{1/2}$.

(1.1.5) 1er terme $$\leq C\left(\frac{1}{2c}\right)^{1/2} e^{ct}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$$

Prenons maintenant le deuxième terme. Il est

$$\leq \left(\mathbf{E}\left(\int_0^t (H^s)^{*2} ds\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$

C'est une norme $L^p_\omega(L^2_s)$, majorée, puisque $p \geq 2$, par la norme $L^2_s(L^p_\omega)$:

$$\leq \left(\int_0^t ds\,(\mathbf{E}(H^s)^{*p})^{2/p}\right)^{1/2} \leq C\left(\int_0^t e^{2cs}\frac{s^n}{n!}\,ds\right)^{1/2}$$

(1.1.6) 2ème terme $$\leq C\,e^{ct}\left(\int_0^t \frac{s^n}{n!}ds\right)^{1/2} = C\,e^{ct}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$$

En sommant (1.1.5) et (1.1.6), on obtient le résultat.

Remarque : On ne peut pas faire ici $c = 0$ mais il n'est pas difficile d'y parvenir ; pour $c = 0$:

(1.1.7) 1er terme $\qquad \leq C\sqrt{t}\left(\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$

(1.1.8) 2ème terme $\qquad \leq C\left(\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$

Il suffit de remplacer e^{ct} par 1 dans (1.1.2), et

(1.1.9) $\qquad e^{ct}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2c}}\right)$ par $(\sqrt{t}+1)$ dans (1.1.3).

On se rend compte qu'on peut obtenir des résultats pour toute les croissances voulues à l'infini. Nous garderons le résultat exponentiel.

On peut modifier le résultat, de manière à garder aux deux membres la même chose, $\mathcal{S}^p$ ou $\mathcal{H}^p$, et les mêmes constantes à la puissance n ou $n+1$:

(1.1.10) $$\|H^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq Ce^{ct}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^{2n} C_p^{2n}\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2} \Longrightarrow \|(H\cdot Z)^t\|_{\mathcal{S}^p}$$
$$\leq Ce^{ct}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^{2(n+1)} C_p^{2(n+1)}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{1/2}$$

et la même inégalité en remplaçant $\| \ \|_{\mathcal{S}^p}$ par $\| \ \|_{\mathcal{H}^p}$.

2. La série de Picard des approximations successives, hypothèse (1.1.1) sur Z.

On part de n'importe quelle valeur initiale X_0 (attention : X_n sera le n-ième terme de la série de Picard, non la valeur de X à l'instant n).

On construira $X_n = a + FX_{n-1}\cdot Z, \ldots$

Compte tenu de la relation de Lipschitz, (0.6), on aura le résultat suivant :

Proposition (2.1).— *Pour $n \geq 0$, si, pour tout t, $\|(X_1 - X_0)^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq C\,e^{ct}$, on a pour tout t,*

$$\|(X_{n+1}-X_n)^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq C\,e^{ct}\left((1+\frac{1}{\sqrt{2c}})^{2n} C_p^{2n} K^{2n}\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2}$$

et la même inégalité avec les normes $\mathcal{H}^p$.

Démonstration. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons l'inégalité démontrée pour n, démontrons là pour n+1 :

$$X_{n+2} - X_{n+1} = (FX_{n+1} - FX_n)\cdot Z$$
$$X_{n+2}^t - X_{n+1}^t = ((FX_{n+1} - FX_n)\cdot Z)^t$$

Posons $H = FX_{n+1} - FX_n$; $H^{t-} = (FX_{n+1} - FX_n)^{t-} = (FX_{n+1}^{t-} - FX_n^{t-})^{t-}$ parce que FX_n et FX_n^{t-} coïncident dans $[0,t[$; alors

$(H^{t-})^* \leq (FX_{n+1}^{t-} - FX_n^{t-})^* \leq K(X_{n+1}^{t-} - X_n^{t-})^* \leq K(X_{n+1}^t - X_n^t)^*$ donc

$\|(H^{t-})^*\|_{L^p} \leq K\,K^n Ce^{ct}\left((1+\frac{1}{\sqrt{2c}})^{2n} C_p^{2n}\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2}$;

par la continuité du dernier membre en t, on a la même inégalité pour $(H^t)^*_{L^p}$; il suffit alors d'appliquer (1.1.10).

Proposition (2.2).— *Soient X_0, X'_0, deux processus initiaux, donnant naissance aux suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(X'_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si, pour tout t,$\|(X'_0 - X_0)^t\| \le C\,e^{ct}$, on aura, pour tout t,*

$$\|(X'_n - X_n)^t\|_{\mathcal{S}^p} \le C\,e^{ct}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^{2n} C_p^{2n}\,K^{2n}\,\frac{t^n}{n!}\right)^{1/2} \tag{2.2.1}$$

Démonstration. C'est la même que la précédente : l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on la suppose vraie pour n, on la démontre pour $n+1$, avec

$$X'_{n+1} - X_{n+1} = (FX'_n - FX_n)\cdot Z = H\cdot Z\,.$$

(2.3) Ces inégalités montrent que, si $a \in \mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$, la série de terme général $X^t_{n+1} - X^t_n$ converge absolument dans $\mathcal{S}^p$, donc la suite des X_n a une limite X dans $\mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$, qui est indépendante du choix initial X_0.

La limite X est solution de l'EDS. En effet, $(FX^{t-}_n - FX^{t-})^* \le K(X^t_n - X^t)^*$, donc FX^{t-}_n converge vers FX^{t-} dans $\mathcal{S}^p$;

$$(FX_n\cdot Z)^t = (FX_n)\,1_{[0,t[}\cdot Z = (FX^{t-}_n)1_{[0,t[}\cdot Z^t\,,$$

où $Z^t \in \mathcal{H}^\infty$, converge dans $\mathcal{H}^p$ vers $(FX\cdot Z)^t$. De $X^t_{n+1} = a^t + (FX_n\cdot Z)^t$ on déduit alors $X^t = a^t + (FX\cdot Z)^t$; comme t est quelconque, $X = a + FX\cdot Z$, X est solution de l'EDS. Puisque, quel que soit X_0, X_n converge toujours vers X, on voit que si Y est une solution, $X_0 = Y$ donne $X_n = Y$ donc $X = Y$, donc la solution est unique.

3. Conséquences

(3.1) La série de Picard converge vite ; pas en $\frac{t^n}{n}$ comme pour une E.D. ordinaire, mais en $(\frac{t^n}{n!})^{1/2}$, ce qui est quand même beaucoup plus rapide qu'une série géométrique. Une fois choisi c, la convergence ne dépend plus de a. Comme une fois choisi X_0, X_1 dépend continuement de a (dans $\mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$ ou $\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$ si $a \in \mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$ ou $\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$), la solution aussi dépend continuement de a dans $\mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$ ou $\mathcal{H}^p_{\mathrm{loc}}$. Souvent $a = x$, condition initiale.

(3.2) Appelons $\mathbf{e}$ la fonction, pour $x \ge 0$:

$$\mathbf{e}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{1/2}. \tag{3.2.0}$$

Alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{k+n}}{(k+n)!}\right)^{1/2} \le \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{1/2} = \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{1/2}\mathbf{e}(x) \tag{3.2.0.1}$$

Posons

$$\mathbf{E}(c,K,t) = e^{ct}\,\mathbf{e}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 C_p^2K^2t\right). \tag{3.2.0.2}$$

Alors, en partant de X_0, on trouve une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$(\forall t, \|(X_1 - X_0)^t\|_{\mathcal{S}^p} \le C\,e^{ct}) \Longrightarrow \forall t, \|(X - X_0)^t\|_{\mathcal{S}^p} \le C\,\mathbf{E}(c,K,t)\,. \tag{3.2.1}$$

Bornons-nous à $t \le \tau$. Alors $\forall t \le \tau$,
$\|(X - X_0)^t\|_{S^p} \le \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{S^p} \le \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{S^p} e^{ct}$. On aura alors, en prenant $t = \tau$:

(3.2.2) $$\|(X - X_0)^\tau\|_{S^p} \le \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{S^p}\, \mathbf{E}(c, K, \tau) .$$

En partant de $X_0 = 0$, donc $X_1 = a$

(3.2.3) $$\|X^\tau_{S^p}\| \le \|a^\tau\|_{S^p}\, \mathbf{E}(c, K, \tau) .$$

Si X, X' sont les solutions correspondant à a, a' :

(3.2.4) $$\|(X' - X)^\tau\|_{S^p} \le \|(a' - a)^\tau\|_{S^p}\, \mathbf{E}(c, K, \tau) .$$

(On pose $X' = X + Y$. Alors $Y = a' - a + (F(X+Y) - F(X)) \cdot Z = b + GY \cdot Z$, où G a les mêmes propriétés que F. Il suffit d'appliquer (3.2.3), avec $b = a' - a$, pour trouver le résultat).

En partant de (3.2.0.1) :

(3.2.5) $$\|(X - X_n)^\tau\|_{S^p} \le \|(X_1 - X_0)^\tau\|_{S^p} \left(\frac{\left((1 + \frac{1}{\sqrt{2c}})^2 C_p^2 K^2 \tau\right)^n}{n!} \right)^{1/2} \mathbf{E}(c, K, \tau) .$$

En faisant $n = 1$, avec $X_0 = 0$, $X_1 = a$:

(3.2.5.1) $$\|(X - a)^\tau\|_{S^p} \le \|a^\tau\|_{S_p} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right) C_p K \sqrt{\tau}\, \mathbf{E}(c, K, \tau) .$$

Si $a = x$, valeur initiale, $\|a^\tau\|_{S^p} = x$, et on voit que $\|(X - x)^\tau\|_{S^p}$ tend vers 0, pour τ tendant vers 0, comme $\sqrt{\tau}$.

Rappelons que $\mathbf{E}(c, K, \tau)$ tend vers 1 quand τ tend vers 0. Donc

(3.2.6) $$\|X^\tau\|_{S^p} \le (1 + 0(1))\|a^\tau\|_{S^p} \quad \text{quand} \quad \tau \quad \text{tend vers} \quad 0 .$$

(3.3) Examinons le comportement de $\mathbf{e(x)}$ quand x tend vers $+\infty$; il est évidemment exponentiel.

(3.3.1) $$\frac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n/2}\, e^{-n/2}\, \sqrt[4]{2\pi n}} , \quad \frac{1}{(n/2)!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2^{n/2}}{n^{n/2}\, e^{-n/2} \sqrt{2\pi \frac{n}{2}}} \quad \text{(Stirling)} .$$

(3.3.2) $$\frac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \text{const.}\, 2^{-n/2}\, \sqrt[4]{n}\, \frac{1}{(n/2)!} .$$

(3.3.3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{\sqrt{n!}} \underset{x \to +\infty}{\le} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+\varepsilon)x}{2}\right)^{n/2} \frac{1}{(n/2)!} \quad , \quad \varepsilon > 0 .$$

La série correspondant aux n pairs, $n = 2k$, est

(3.3.4) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1+\varepsilon)x}{2}\right)^k \frac{1}{k!} = e^{(1+\varepsilon)x/2} .$$

La série correspondant aux n impairs, $n = 2k+1$, est

$$(3.3.5) \qquad \leq \left(\frac{(1+\varepsilon)x}{2}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1+\varepsilon)x}{2}\right)^{k} /k! = \left(\frac{(1+\varepsilon)x}{2}^{1/2}\right) e^{(1+\varepsilon)x/2} \underset{x\to+\infty}{\leq} e^{(1+2\varepsilon)x/2} .$$

Finalement, en changeant d'ε :

$$(3.3.6) \qquad \mathbf{E}(c,K,t) \underset{t\to+\infty}{\leq} e^{\left(c+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 C_p^2 K^2 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\right)t},$$

ce qui est une croissance exponentielle.

Si $\|a^t\|_{\mathcal{S}^p}$ est majorée par une constante indépendante de t, on a le choix de c. Je n'ai pas envie de chercher la meilleure valeur de c.

(3.4) On ne peut pas descendre au-dessous des croissances exponentielles pour t tendant vers $+\infty$, ce que montre déjà l'ÉD ordinaire $dX_t = cX_t dt$, de solution $X = \text{const.}\, e^{ct}$.
Mais, pour toutes les croissances plus grandes, on a d'excellentes majorations par (3.2.3).
Par exemple, si $\|a^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq e^{t^2}$ pour t grand, on aura $\|X^t\|_{\mathcal{S}^p} \leq e^{\lambda t + t^2}$, λ convenable, $\leq e^{(1+\varepsilon)t^2}$, $\varepsilon > 0$.

(3.5) Convergence presque sûre.

La convergence normale (ou absolue) d'une série dans L^p entraîne sa convergence pour $\mathbf{P}$-presque tout ω. On en déduit que, pour $a \in \mathcal{S}^p_{\text{loc}}$, X_n converge vers X, $\mathbf{P}$-ps., uniformément pour t borné, $t \leq \tau < +\infty$.

Il faut s'affranchir de la condition $a \in \mathcal{S}^p_{\text{loc}}$.
Soit $T_\ell = \text{Inf}\{t; |a_t| > \ell\}$. Les T_ℓ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, dès lors que a est cadlag sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ ($\mathbf{R}_+ = [0,+\infty[$). Et $|a^{T_\ell -}| \leq \ell$.

$$X^{T_\ell -} = a^{T_\ell -} + F\left(X^{T_\ell -}\right) 1_{[0,T_\ell[} \cdot Z$$

(parce que FX et $FX^{T_\ell -}$ coïncident dans $[0, T_\ell[$).

Donc $X^{T_\ell -}$ satisfait à une EDS ayant les mêmes propriétés, mais $a^{T_\ell -} \in \mathcal{S}^p$. On en déduit que X_n converge vers X pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, uniformément pour $t < T_\ell \wedge \tau$; comme T_ℓ tend vers $+\infty$ avec ℓ, c'est encore vrai pour $t \leq \tau < +\infty$.
Par contre, il est plus délicat de passer à $\overline{\mathbf{R}}_+$ et de s'affranchir de la très forte hypothèse $|dV_t| + d[M,M]_t \leq dt$; mais un simple changement de temps y suffira.

4. Changement de temps, cas général.

On prend maintenant l'EDS la plus générale, $X = a + FX \cdot Z$, où Z est une semi-martingale continue quelconque sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$, $Z = V + M$.

Effectuons le changement de temps

(4.1) $u = A_t$

où A est adapté continu, strictement croissant, $A_0 = 0$, $A_{+\infty} = \beta < +\infty$. On écrira le changement réciproque $t = B_u = \mathrm{Inf}\{s; A_s > u\}$, chaque B_u est un temps d'arrêt ; B est continue, $B_0 = 0$, strictement croissante sur $[0, \beta]$, $B \equiv +\infty$ sur $[\beta, +\infty]$; puis $B \circ A = I$, $A \circ B = I$ sur $[0, \beta]$, $= \beta$ sur $[\beta, +\infty]$.

On partait d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$, que nous appellerons plutôt $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$, on a une nouvelle filtration $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_u)_{u \in \overline{\mathbf{R}}_+}$, $\mathcal{B}_u = \mathcal{A}_{B_u}$, pour laquelle chaque A_t est un temps d'arrêt ; β est donc un $\mathcal{B}$-arrêt.

Si on part de la filtration $(\mathcal{B}_u)_{u \in \overline{\mathbf{R}}_+}$ et qu'on fait $t = B_u$, on retrouve $(\mathcal{A}_t)_{t \in \overline{\mathbf{R}}_+}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_{A_t}$, et de $t = B_u$ on redéduit $u = A_t$.

(4.2) Il est équivalent que T soit un temps d'arrêt pour $\mathcal{A}$, ou que A_T soit un temps d'arrêt pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{A_T} = \mathcal{A}_T$; que U soit un temps d'arrêt pour $\mathcal{B}$, ou que B_U soit un temps d'arrêt pour $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}_{B_U} = \mathcal{B}_U$.

(4.3) Soit X un processus sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$; on forme un nouveau processus $\widehat{X}$, $\widehat{X}_u = X_{B_U}$ ou $\widehat{X} = X \circ B$, constant $= X_{+\infty}$ sur $[\beta, +\infty]$; alors $X = \widehat{X} \circ A$. (Mais si on part d'un processus Y, et qu'on forme $X = Y \circ A$, $X \circ B$ ne sera pas Y mais le processus arrêté Y^β) ; X est $\mathcal{A}$-adapté ssi $\widehat{X}$ est $\mathcal{B}$-adapté ; X est cadlag ou continu ssi $\widehat{X}$ l'est ; X est semi-martingale, martingale, martingale locale, à variation finie, ssi $\widehat{X}$ l'est. Puis X est $\mathcal{A}$-optionnel, prévisible, ssi $\widehat{X}$ est $\mathcal{B}$-optionnel, prévisible. Les intégrales stochastiques sont préservées, $(H \cdot X) \circ B = (H \circ B) \cdot (X \circ B)$.

Si X vérifie l'EDS $X = a + FX \cdot Z$, $\widehat{X}$ vérifie $\widehat{X} = \hat{a} + \widehat{F}\widehat{X} \cdot \widehat{Z}$, où $\widehat{F}Y = (F(Y \circ A)) \circ B$; $\widehat{F}Y$ ne dépend que des valeurs de Y dans $[0, \beta]$. L'opérateur $\widehat{F}$ convient bien pour une EDS ; car, si $Y = Y'$ dans $[0, U[$, U $\mathcal{B}$-arrêt, $Y \circ A = Y' \circ A$ dans $[0, B_U[$, B_U est un $\mathcal{A}$- arrêt, donc $F(Y \circ A) = F(Y' \circ A)$ dans $[0, B_U[$, donc $\widehat{F}Y = \widehat{F}Y'$ dans $[0, U[$; et la condition de Lipschitz est évidemment vérifiée, $(\widehat{F}Y - \widehat{F}Y')^* \leq K(Y - Y')^*$.

En effet,

$(\widehat{F}Y - \widehat{F}Y')^* = (F(Y \circ A) \circ B - F(Y' \circ A) \circ B)^* = (F(Y \circ A) - F(Y' \circ A))^* \leq K(Y \circ A - Y' \circ A)^*$
$\leq K(Y - Y')^*$.

Enfin, si X est une semi-martingale, $[X, Y] \circ B = [X \circ B, Y \circ B]$, ou $[X, Y]^\wedge = [\widehat{X}, \widehat{Y}]$.

Théorème (4.4).— *Considérons l'EDS*

$$X = a + FX \cdot Z, \quad \text{sur} \quad \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega, \tag{4.4.1}$$

où a est adapté cadlag et Z semi-martingale continue, F vérifiant la condition habituelle d'EMERY-MEYER.

Si on part de X_0 et qu'on pose

$$X_n = a + FX_{n-1} \cdot Z,$$

les X_n convergent vers une limite X, $\mathbf{P}$-ps. uniformément en $t \in \overline{\mathbf{R}}_+$, X est solution de l'EDS ; la limite est indépendante du choix de X_0, et c'est l'unique solution de l'EDS.

Démonstration. On fera le changement de temps $u = A_t = W_t + [M,M]_t + \frac{t}{t+1}$, strictement croissant continu,

$$A_0 = 0 \,, \quad A_{+\infty} = \beta = \int_0^{+\infty} |dV_s| + [M,M]_{+\infty} + 1 < +\infty \,.$$

On obtient une nouvelle EDS :

$$\widehat{X} = \hat{a} + \widehat{F}\widehat{X}\cdot\widehat{Z} \,, \; \widehat{Z} = \widehat{V} + \widehat{M} \,.$$

Avec $a = A_s$, $b = A_t$,

$$\begin{aligned}(\widehat{W}_b - \widehat{W}_a) + ([\widehat{M},\widehat{M}]_b - [\widehat{M},\widehat{M}]_a) &= (\widehat{W}_{A_t} - \widehat{W}_{A_s}) + ([M,M]^\wedge_{A_t} - [M,M]^\wedge_{A_s}) \\ &= (W_{BA_t} - W_{BA_s}) + ([M,M]_{BA_t} - [M,M]_{BA_s}) \\ &= (W_t - W_s) + ([M,M]_t - [M,M]_s) \leq A_t - A_s = b - a \,,\end{aligned}$$

ou $d\widehat{W}_u + d[\widehat{M},\widehat{M}]_u \leq du$, sur $[0,\beta]$, mais il est nul au delà de β.

On se retrouve dans les conditions du paragraphe précédent.
On en déduit que $\mathbf{P}$-ps.$\widehat{X}_n$ converge vers $\widehat{X}$ uniformément en u dans tout compact de $\mathbf{R}_+$, avec les unicités voulues. Mais $\beta < +\infty$, donc $[0,\beta(\omega)]$ est compact dans $\mathbf{R}_+$.

Comme A envoie bijectivement $\overline{\mathbf{R}}_+$ sur $[0,\beta]$, B bijectivement $[0,\beta]$ sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, $\mathbf{P}$-ps. $X_n = \widehat{X}_n \circ A$ converge vers $X = \widehat{X} \circ A$, uniformément sur $\overline{\mathbf{R}}_+$.

On a de plus la rapidité de la convergence :

Théorème (4.5).— *Pour l'EDS (4.4.1), pour tout départ X_0, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $k = k(\omega)$ et $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbf{N}$, tels que, pour $n \geq n_0$,*

$$(X_{n+1} - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2} \,, \tag{4.5.1}$$

$$(X - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2} \,. \tag{4.5.2}$$

Si X_0, X'_0 sont deux départs, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites correspondantes, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $k = k(\omega)$ et $n_0 = n_0(\omega)$ telle que pour $n \geq n_0$:

$$(X'_n - X_n)^*(\omega) \leq \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{1/2} \,. \tag{4.5.3}$$

Démonstration. Partons de $X_0 = 0$, $X_1 = a$.

A) Plaçons-nous d'abord dans les conditions du Paragraphe 2, $a \in \mathcal{S}^p_{\mathrm{loc}}$, avec $p = 2$ par exemple.
Pour tout $\tau < +\infty$, il existe un α, dépendant seulement de $K, \tau, \|a^*_\tau\|_{L^2}$, tel que, pour tout n :

$$\|(X_{n+1} - X_n)^*_\tau\|_{L^2} \leq \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^{1/2} \,, \quad \text{pour} \quad X_0 = 0 \,. \tag{4.5.4}$$

Par Bienaymé-Tchebischev :

$$\mathbf{P}\left\{(X_{n+1} - X_n)^*_\tau > \left(\frac{(2\alpha)^n}{n!}\right)^{1/2}\right\} \leq \frac{1}{2^n} \,. \tag{4.5.5}$$

Comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < +\infty$, Borel-Cantelli dit que $\mathbf{P}$ ps. un nombre fini seulement de ces événements a lieu.

Donc : pour tout τ, il existe $\alpha = \alpha(K, \tau, \|a_\tau^*\|_{L^2})$ tel que, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $n_0 = n_0(\omega, \tau, a, F, Z)$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$(4.5.6) \qquad (X_{n+1} - X_n)_\tau^*(\omega) \leq \left(\frac{(2\alpha)^n}{n!}\right)^{1/2} .$$

B) Plaçons-nous maintenant dans la situation de (3.5), $a \notin \mathcal{S}^p$. On a déterminé une suite de temps d'arrêt T_ℓ tendant vers $+\infty$, et à chaque $(X_{n+1} - X_n)^{T_\ell -}$ on peut appliquer la même inégalité ; avec $\|(a^{T_\ell -})_\tau^*\|_{L^2} \leq \ell$. Donc : pour tout τ, pour tout ℓ, il existe $\alpha = \alpha(K, \tau, \ell)$ tel que, pour tout $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $n_0 = n_0(\omega, \tau, \ell, a, F, Z)$ tel que, pour $n \geq n_0$:

$$(4.5.7) \qquad \left((X_{n+1} - X_n)^{T_\ell -}\right)_\tau^*(\omega) \leq \left(\frac{(2\alpha)^n}{n!}\right)^{1/2} .$$

On a : pour tout τ, pour tout ℓ, $\mathbf{P}$-ps. ; donc aussi $\mathbf{P}$-ps., pour tout $\tau \in \mathbf{N}$ ou pour tout τ, pour tout ℓ. Donc : pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, pour tout τ, pour tout ℓ, il existe $n_0 = n_0(\omega, \tau, \ell, a, F, Z)$ tel que, pour $n \geq n_0$:

$$(4.5.8) \qquad \left((X_{n+1} - X_n)^{T_\ell -}\right)_\tau^*(\omega) \leq \left(\frac{(2\alpha(K, \tau, \ell))^n}{n!}\right)^{1/2} .$$

Mais T_ℓ tend vers $+\infty$. Donc, pour tout ω, il existe $\ell = \ell(\omega, a, \tau)$ tel que $T_\ell(\omega) > \tau$. Alors : pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $n_0 = n_0(\omega, \tau, a, F, Z)$ tel que, pour $n \geq n_0$:

$$(4.5.9) \qquad (X_{n+1} - X_n)_\tau^*(\omega) \leq \left(\frac{(2\alpha(K, \tau, \ell(\omega, a, \tau)))^n}{n!}\right)^{1/2} .$$

C) Plaçons-nous enfin dans la situation générale du théorème (4.4). Nous choisirons $\tau = \beta(\omega)$ (β dépend de Z). Alors : pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, il existe $n_0 = n_0(\omega, a, F, Z)$ tel que, pour $n \geq n_0$

$$\left(\widehat{X}_{n+1} - \widehat{X}_n\right)_\beta^*(\omega) \leq \left(\frac{(2\alpha(K, \beta(\omega), \ell(\omega, a, \beta(\omega))))^n}{n!}\right)^{1/2} .$$

Or $(X_{n+1} - X_n)_\infty^* = \left(\widehat{X}_{n+1} - \widehat{X}_n\right)_\beta^*$, d'où le théorème,

$$(4.5.10) \qquad \text{avec} \quad k = 2\alpha\,(K, \beta(\omega), \ell(\omega, a, \beta(\omega))) .$$

Nous avons fait les calculs en partant de $X_0 = 0$, le résultat est le même pour X_0 arbitraire, mais on devra partout remplacer a par $(X_1 - X_0)$. La formule (4.5.2) utilisera (3.2.5) au lieu de (2.1). La formule (4.5.3) utilisera (2.2.1) et on remplacera a par $X_0' - X_0$).

NOTES DE BAS DE PAGE

Note(1), page 1

M. EMERY [1], pages 281-293.

Note(2), page 1

K. BICHTELER [1].

Note(3), page 1

D.FEYEL [1].

Note(4), page 2

Normes $\mathcal{S}^p$ et $\mathcal{H}^p$, voir Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER [1] : pour $\mathcal{S}^p$ appelé là $\mathcal{R}^p$, chap.VII, définition 64 page 273 ; pour $\mathcal{H}^p$, chap.VII, définition 98 page 310. La norme $\mathcal{H}^p$ de P.A. MEYER est équivalente à celle qui est définie ici, mais pas égale.

Note(5), page 2

Voir (1), page 1.

Note(6), page 2

Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER [1], chap.VII, T92 page 304, et (98.7) page 311.

Note(7), page 3

L'introduction de l'exponentielle e^{ct} est ce qui permet à D. FEYEL d'obtenir son résultat.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] K. BICHTELER, Stochastic integration and L^p-theory of semi-martingales, Annals of probability, 1981, vol.9, n° 1, p. 49-89.

[1] Cl. DELLACHERIE et P.A.MEYER, Probabilités et potentiels, théorie des martingales, Paris Hermann, Actualités Scientifiques et industrielles, n° 1385, 1980.

[1] M. EMERY, Equations différentielles lipschitziennes, étude de la stabilité, Séminaire de Probabilités XIII, 1977-78, n° 721, 1979, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, pages 281-293.

[1] D. FEYEL, Sur la méthode de Picard (EDO et EDS), Séminaire de probabilités XXI, 1985-86, n° 1247, 1987, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, pages 515-519.

Index des notations et index terminologique

Table des matières

Laurent Schwartz
37, rue Pierre Nicole
75005 PARIS
(France)