GABRIEL MOKOBODZKI

L'opérateur carré du champ : un contre-exemple

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 324-325
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__324_0>

L' OPÉRATEUR CARRÉ DU CHAMP : UN CONTRE-EXEMPLE

par G. Mokobodzki

Equipe d'Analyse, Université Paris VI

Unité Associée au CNRS n° 754

Soit (V_λ) une résolvante de Feller sur un espace compact X (la théorie s'étend sans difficulté aux résolvantes de Ray). On suppose pour simplifier que l'opérateur potentiel $V = V_0$ est borné. On dit qu'une fonction u appartient au *domaine étendu* (sous-entendu : du générateur infinitésimal L) si u est bornée et de la forme $u = Vf$, où la fonction f est telle que $V|f| < +\infty$; on pose alors $Lu = -f$, cette fonction n'étant d'ailleurs définie qu'aux ensembles V-négligeables près. On dit que la résolvante admet un *opérateur carré du champ* si le domaine étendu est une algèbre pour la multiplication ordinaire. Kunita a montré que si le domaine étendu contient une algèbre $\mathcal{A}$ *stable par la résolvante*, et *pleine* en ce sens que toute mesure signée nulle sur $\mathcal{A}$ est nulle, alors la résolvante admet un opérateur carré du champ. La stabilité par la résolvante est une propriété difficile à vérifier, et on a longtemps conjecturé que l'on pouvait s'en passer. Une démonstration inexacte de ce fait a été publiée par P.A. Meyer (*Sém. Prob. XX*, p.30–33). Nous allons donner un contre-exemple montrant que la conjecture elle même est inexacte.

Soit $X =]0,1[$, et soit (U_λ) la résolvante du mouvement brownien tué aux deux extrémités de l'intervalle. Il est bien connu que l'opérateur U_0 est borné. Le générateur est sur le domaine étendu l'opérateur $Lh = \frac{1}{2}h''$ (au sens des distributions), et la résolvante admet un opérateur carré du champ : si $u = Uf$ on a $u^2 = U(2uf - u'^2)$. Soit F un fermé de X, d'intérieur vide, de mesure de Lebesgue non nulle, tel que $\inf(F) = 0$, $\sup(F) = 1$, et soit H son complémentaire. Posons $Vf = U(f \cdot 1_H)$; il est bien connu que ceci est un opérateur potentiel, qui transforme les fonctions boréliennes bornées en fonctions continues nulles à l'infini. Le processus de Markov correspondant s'obtient à partir du mouvement brownien (B_t) au moyen du changement de temps par la fonctionnelle additive $A_t = \int_0^t 1_H \circ X_s\, ds$, qui est strictement croissante (H étant dense) même au départ des points de F, et il en résulte que le semi-groupe associé à U n'a pas de points de branchement, et l'on voit aisément qu'il est fellérien. Si $u = Vf$ on a $u^2 = U(2uf1_H - u'^2)$, qui n'est un potentiel relativement à V que si $u' = 0$ p.p. sur F. Or si f est positive la fonction Vf est concave, donc sa dérivée est décroissante et ne peut s'annuler presque partout sur F sans être nulle, ce qui entraîne que $Vf = 0$. Il en résulte que *la résolvante (U_λ) n'admet pas d'opérateur carré du champ*. On voit clairement sur cet exemple l'algèbre maximale contenue dans le domaine étendu de la résolvante (V_λ) : elle est constituée des éléments de $\mathcal{C}_0(X)$, dont la dérivée seconde au sens des distributions est absolument continue, et dont la dérivée première est nulle p.p. sur F

En particulier le domaine étendu contient l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions deux fois continûment dérivables, nulles aux points 0 et 1, et dont la dérivée est nulle sur F. Comme H est dense il est facile de vérifier que cette algèbre sépare les points, et qu'elle est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$ pour la convergence uniforme. En particulier elle est pleine, et cela achève la démonstration.

On peut montrer toutefois que, si le domaine étendu contient une algèbre pleine, il existe un potentiel régulier borné w tel que le noyau potentiel W associé à w admette un opérateur carré du champ. Ce résultat sera publié ailleurs.

Je remercie P.A. Meyer pour les interprétations probabilistes figurant ci-dessus.