DOMINIQUE BAKRY

# Sur l'interpolation complexe des semigroupes de diffusion

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 23 (1989), p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__1_0>

**Sur l'interpolation complexe des semigroupes de diffusion.**

Dominique Bakry*

Laboratoire de Statistiques et Probabilités, Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne, 31062, TOULOUSE Cedex.

**RÉSUMÉ**

Lorsqu'on a un semigroupe markovien symétrique $\mathbf{P}_t$, le théorème d'interpolation de STEIN permet de voir que, si $z$ est un complexe de partie réelle positive, l'opérateur $\mathbf{P}_z$, défini à partir de la décomposition spectrale de $\mathbf{P}_t$, est borné sur $\mathbf{L}^p(\mu)$, pourvu que l'exposant $p$ soit dans un intervalle contenant 2 et qui dépend de l'angle que fait $z$ avec avec l'axe réel. Pour un semigroupe de diffusion, nous améliorons ce résultat, c'est à dire que nous obtenons un intervalle plus grand que celui donné par le théorème d'interpolation. La méthode que nous utilisons n'ayant que peu à voir avec la structure complexe, nous donnons quelques exemples de généralisation : par exemple, après les avoir définis, nous donnons des estimations sur les opérateurs $\mathbf{P}_h$, où $h$ est un quaternion de partie réelle positive, et plus généralement sur les opérateurs $\mathbf{P}_M$, où $M$ est une matrice normale de partie symétrique positive.

---

* Ce travail a été effectué pendant que l'auteur visitait l'Université de Colombie Britannique, sur l'invitation de E.PERKINS et J.WALSH.

## 1.— Introduction et notations

Il est bien connu que, parmi les semigroupes de MARKOV, les semigroupes de diffusion jouissent de propriétés particulières, dues au fait que le processus associé est à trajectoires continues. Cette propriété de diffusion peut s'exprimer de manière algébrique sur le générateur du semigroupe (ce qui permet de parler de diffusions sur espace mesuré quelquonque, sans faire référence à la topologie de l'espace), mais elle ne se voit pas aisément sur le semigroupe lui-même. Pour comprendre ce qui ce passe, imaginons un instant qu'on s'intéresse à un semigroupe de diffusion de générateur elliptique sur un espace compact. Si $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, la propriété de diffusion dit que le générateur est une une dérivation d'ordre 2 sur $\mathcal{A}$. (Dans une algèbre, la multiplication par un élément de l'algèbre est un opérateur d'ordre 0, et on définit par récurrence un opérateur d'ordre $k$ en disant que son commutateur avec les multiplications doit être un opérateur d'ordre $k-1$.) Or, il est très facile de voir que, dans une algèbre commutative, un opérateur est une dérivation d'ordre 1 si et seulement si son exponentielle est un homomorphisme de l'algèbre, mais il n'y a aucune propriété analogue pour les opérateurs d'ordre 2, et c'est de là que vient la difficulté qu'il y a à traduire en termes du semigroupe la propriété de diffusion.

Néammoins, dans un certain nombre de situations, cette propriété du générateur se reflète sur le comportement du semigroupe. Dans [B], nous en avons montré un exemple pour les semigroupes hypercontractifs, où la propriété de diffusion permet d'améliorer les résultats obtenus par le théorème de RIESZ-THORIN. C'est un phénomène du même genre que nous voulons mettre en évidence ici, mais qui se produit pour tous les semigroupes de diffusion symétriques.

---

On considère un espace mesuré $\sigma$-fini $(\mathbf{E}, \mathcal{E}, \mu)$. On note $\langle f, g\rangle$ le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, c'est à dire que $\langle f, g\rangle = \int_E f(x)\overline{g(x)}\,\mu(dx)$ pour deux fonctions boréliennes $f$ et $g$ à valeurs complexes. De la même manière, $\langle f\rangle$ désigne l'intégrale d'une fonction de $\mathbf{L}^1(\mu)$, c'est à dire que $\langle f\rangle = \langle f, 1\rangle$.

Précisons tout d'abord ce qu'est pour nous un semigroupe (sous-) markovien symétrique sur $\mathbf{E}$ : c'est par définition une famille d'opérateurs $(\mathbf{P}_t, t \geq 0)$ opérant sur les fonctions mesurables bornées sur $\mathbf{E}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

1— *Caractère sous-markovien* : il existe des noyaux de transition $\mathbf{p}_t(x, dy)$ formés de mesures positives de masse plus petite que 1 tels que, pour toute fonction $f$ borélienne et bornée, on ait

$$\mathbf{P}_t[f](x) = \int_E f(y)\mathbf{p}_t(x, dy)\,.$$

2— *Propriété de semigroupe* : $\mathbf{P}_t \circ \mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{t+s}$, ou encore

$$\int_E \mathbf{p}_t(x, dy)\mathbf{p}_s(y, dz) = \mathbf{p}_{t+s}(x, dz)\,.$$

3— *Continuité en 0* : $\forall f \in \mathbf{L}_1(\mu) \bigcap \mathbf{L}_\infty(\mu)$, $\forall p \in [1, \infty[$, $\mathbf{P}_t(f) \to f$ dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ lorsque $t \to 0$.

4— *Symétrie* : pour tout couple de fonctions $(f, g) \in \mathbf{L}_1(\mu) \bigcap \mathbf{L}_\infty(\mu)$, on a

$$\int_E g\, \mathbf{P}_t(f)\, d\mu = \int_E f\, \mathbf{P}_t(g)\, d\mu\,.$$

Lorsque les mesures qui forment les noyaux $\mathbf{p}_t$ sont des mesures de probabilité (c'est à dire lorsque $\mathbf{P}_t(1) = 1$), on dit que le semigroupe est markovien.

Des propriétés (1) et (4), on déduit aisément que $\mathbf{P}_t$ s'étend en une contraction de tous les $\mathbf{L}^p(\mu)$, pour $1 \leq p \leq \infty$ (théorème de RIESZ-THORIN), tandis que l'on déduit de (3) qu'il forme sur $\mathbf{L}^p(\mu)$ un semigroupe fortement continu, lorsque $1 \leq p < \infty$.

De (4), on déduit que $\mathbf{P}_t$ admet dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ une décomposition spectrale

$$\mathbf{P}_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda\,;$$

l'opérateur non borné $\mathbf{L} = -\int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ est par définition le générateur infinitésimal de $\mathbf{P}_t$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Par construction, c'est un opérateur autoadjoint.

Nous pouvons alors considérer l'opérateur $\mathbf{P}_{it} = \int_0^\infty e^{i\lambda t}\, dE_\lambda$ : c'est un opérateur unitaire, c'est à dire que $\|\mathbf{P}_{it}(f)\|_2 = \|f\|_2$, pour toute fonction $f$ à valeurs complexe, borélienne et bornée.

Pour $z$ dans le demiplan $\Re(z) > 0$, le comportement de l'oprateur $\mathbf{P}_z = \int_0^\infty e^{z\lambda}\, dz$ dans $\mathbf{L}_p(\mu)$ nous est fourni par le résultat suivant (théorème d'interpolation complexe de STEIN [S]) :

**Théorème** .— [S, p.69] : soit $\varphi(z)$ une famille d'opérateurs holomorphe dans la bande ouverte $0 < \Re(z) < 0$, continue sur la bande fermée. On suppose que, pour $\Re(z) = 0$, $\varphi(z)$ est borné de $\mathbf{L}^{p_0}(\mu)$ dans $\mathbf{L}^{p_0}(\mu)$ avec une norme $M_0$, et que pour $\Re(z) = 1$, $\varphi(z)$ est borné de $\mathbf{L}^{p_1}(\mu)$ dans $\mathbf{L}^{p_1}(\mu)$ avec une norme $M_1$. Alors, pour $z = s + it$, $\varphi(z)$ est borné de $\mathbf{L}^{p(s)}(\mu)$ dans $\mathbf{L}^{p(s)}(\mu)$ avec une norme $M_s$, où l'on a posé

$$\frac{1}{p_s} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1} \quad \text{et} \quad M_s = M_0^{1-s} M_1^s\,.$$

Appliquons ce théorème à la famille $\varphi(z) = \mathbf{P}_{e^{i\frac{\pi}{2}z}}$. Pour $t$ réel, $\varphi(it)$ est une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, \infty]$, tandis que pour $z = 1 + it$, $\varphi(z)$ est une contraction de $\mathbf{L}^2(\mu)$. On en déduit donc

**Proposition 1.**—(Stein) Si $\mathbf{P}_t$ est un semigroupe markovien symétrique, $\mathbf{P}_{e^{i\alpha}t}$ est une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour tout $p$ dans l'intervalle $[\frac{1}{1-|\alpha|/\pi}, \pi/|\alpha|]$, avec $(|\alpha| \leq \pi/2)$ .

C'est cet intervalle que nous nous apprêtons à agrandir pour les semigroupes de diffusion.

**Remarque.**—
Le semigroupe $\mathbf{P}_t$, lorsque $t$ est réel positif, s'interprète naturellement comme le semigroupe de transition associé à un processus de MARKOV, mais il semble beaucoup moins naturel de le considérer pour une valeur complexe du paramètre $t$. En fait, dès qu'on s'intéresse aux semigroupes symétriques, les opérateurs $\mathbf{P}_{it}$ interviennent d'eux-mêmes : pour $f = f_1 + if_2$, dérivons en $t = 0$ l'identité $\|\mathbf{P}_{it}(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$ (nous verrons plus bas pourquoi cette dérivation est justifiée). Lorsque $f_1$ et $f_2$ sont dans le domaine de $\mathbf{L}$, on obtient $\Re\{\langle f, i\mathbf{L}(f)\rangle\} = 0$, c'est à dire $\langle f_1, \mathbf{L}(f_2)\rangle = \langle f_2, \mathbf{L}(f_1)\rangle$. On voit donc que le caractère unitaire des opérateurs $\mathbf{P}_{it}$ reflète exactement la symétrie de l'opérateur $\mathbf{L}$.

## 2.— Semigroupes de diffusion

Parmi les semigroupes markoviens symétriques, les semigroupes de diffusion sont ceux dont le générateur est local. On n'a pas mis de topologie sur notre espace mesuré $\mathbf{E}$, mais, comme nous l'avons dit plus haut, on peut exprimer la localité du générateur $\mathbf{L}$ de façon purement algébrique.

Pour cela, introduisons l'espace de DIRICHLET $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ associé à $\mathbf{P}_t$ : c'est l'ensemble des fonctions $f$ de $\mathbf{L}^2(\mu)$ pour lesquelles la quantité suivante existe :

$$\mathcal{E}(f,f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int_{\mathbf{E}} [f(x) - f(y)]^2 \mathbf{p}_t(y,dx)\,\mu(dy).$$

Une fonction $f$ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ si et seulement si elle est dans le domaine de l'opérateur $(-\mathbf{L})^{1/2}$ (la racine carrée symétrique positive de l'opérateur autoadjoint positif $-\mathbf{L}$).

En termes de décomposition spectrale, on a alors

$$\mathcal{E}(f,f) = \int_0^\infty \lambda\, d(E_\lambda f, f).$$

On fait de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ un espace de HILBERT en posant $\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f,f)$. Rappelons en quelques propriétés intéressantes :

1— Si une fonction $f$ est dans le domaine $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ de l'opérateur $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, elle est dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ et l'on a $\mathcal{E}(f,f) = -\langle f, \mathbf{L}f\rangle$.

2— Si $f^1, \cdots, f^n$ sont n éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, et si $\Phi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{R}^n$ à gradient borné, alors $\Phi(f^1, \cdots, f^n)$ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

3— De plus, si $f_m^1, \cdots, f_m^n$ sont des éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ tels que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, la suite $(f_m^i)$ converge vers $f^i$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, alors $\Phi(f_m^1, \cdots, f_m^n)$ converge vers $\Phi(f^1, \cdots, f^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Pour $p \in [1, \infty[$, on désigne par $\mathcal{D}_p(\mathbf{L})$ le domaine du semigroupe $\mathbf{P}_t$ dans $\mathbf{L}_p(\mu)$, c'est à dire l'espace des fonctions $f$ de $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour lesquelles la quantité $\frac{1}{t}(\mathbf{P}_t(f) - f)$ admet une limite dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ lorsque $t \to 0$. La description exacte des domaines $\mathcal{D}_p(\mathbf{L})$ n'est pas toujours facile, non plus d'ailleurs que la description de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. En général, on préfère travailler sur des sous espaces de fonctions suffisamment riches et stables pour un certain nombre d'opérations. Les *bonnes algèbres* que nous décrivons ci-dessous en sont un exemple :

**Définition.**—*Nous dirons qu'un ~~sous~~-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $\mathbf{L}^2(\mu)$ est une* **bonne algèbre** *pour* $\mathbf{L}$ *si l'on a*

*a)* $\mathcal{A} \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} \mathcal{D}_p(\mathbf{L}) \bigcap \mathbf{L}^\infty(\mu)$ *et* $\mathbf{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$;

*b) $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ pour la norme de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$;*

*c) si $f^1, \cdots, f^n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ et si $\Phi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{R}^n$ nulle en 0, alors $\Phi(f^1, \cdots, f^n)$ est dans $\mathcal{A}$. En particulier, $\mathcal{A}$ est une algèbre.*

Sur une bonne algèbre, nous pouvons définir l'opérateur carré du champ $\Gamma(f, f) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}(f^2) - 2f\mathbf{L}f]$ : il est toujours à valeurs dans les éléments positifs de $\mathcal{A}$.

**Définition.**—*Nous dirons que $\mathbf{P}_t$ est un semigroupe de diffusion s'il admet une bonne algèbre $\mathcal{A}$ sur laquelle, pour toute fonction $\Phi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{R}^n$, la formule du changement de variable suivante est vraie :*

$$\mathbf{L}\Phi(f^1, \cdots, f^n) = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \mathbf{L} f^i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(f^i, f^j). \tag{1}$$

**Remarque.**—

La propriété de diffusion s'exprime uniquement en termes de l'algèbre $\mathcal{A}$ et du générateur infinitésimal $\mathbf{L}$ de $\mathbf{P}_t$ : le semigroupe lui-même n'apparait pas en tant que tel. C'est pourquoi il nous arrivera parfois de parler d'opérateur de diffusion : pour nous, il s'agira d'un opérateur $\mathbf{L}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, qui est symétrique sur $\mathcal{A}$ (c'est à dire que pour tout couple de fonctions $(f, g)$ de $\mathcal{A}$, on a $\langle \mathbf{L}f, g \rangle = \langle f, \mathbf{L}g \rangle$), dont l'opérateur carré du champ associé est positif et qui vérifie la propriété (1).

Lorsqu'on dispose d'une bonne algèbre, on peut faire plus aisément les calculs que sur l'espace de DIRICHLET tout entier, qui est en général beaucoup plus difficile à atteindre. Il faut ensuite s'assurer que les résultats obtenus s'étendent à tout $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, et c'est alors qu'on a besoin de l'hypothèse de densité dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ de la bonne algèbre $\mathcal{A}$. Mais ce n'est pas toujours suffisant, et c'est pourquoi nous introduisons une notion supplémentaire :

**Définition.**—*Nous dirons qu'une bonne algèbre $\mathcal{A}$ est complète s'il existe une suite $(\Psi_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $O \leq \Psi_n \leq \Psi_{n+1} \leq 1$, $\Psi_n \to 1\,(n \to \infty)$ et $\Gamma(\Psi_n, \Psi_n) \leq 1/n$.*

**Exemples.**

1— $\mathbf{E}$ est une variété riemannienne; $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur $\mathbf{E}$; $\mathbf{L}$ est égal à $\Delta + \nabla(\log \rho)$, où $\Delta$ est l'opérateur de LAPLACE -BELTRAMI de la variété et où la fonction $\rho$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'opérateur $\mathbf{L}$ est symétrique par rapport à la mesure $\mu(dx)$ de densité $\rho(x)$ par rapport à la mesure riemannienne.

Sur $\mathcal{A}$, l'opérateur de DIRICHLET vaut $\mathcal{E}(f,f) = \int_{\mathbf{E}} |\nabla f|^2\, \mu(dx)$, et le complété de $\mathcal{A}$ pour la norme de DIRICHLET est l'espace de DIRICHLET d'un unique semigroupe sous-markovien symétrique $\mathbf{P}_t$. Celui-ci est minimal dans le sens suivant : soit $\mathbf{Q}_t$ un autre semigroupe sous-markovien qui soit tel que, pour toute fonction $f$ de $\mathcal{A}$, on ait

$$\mathbf{Q}_t(f) - f = \int_0^t \mathbf{Q}_s(\mathbf{L}f)\, ds\,; \tag{2}$$

alors $\mathbf{Q}_t(f) \geq \mathbf{P}_t(f)$. Le semigroupe $\mathbf{P}_t$ est le semigroupe de la diffusion de générateur $\mathbf{L}$ et tuée au bord de la variété. Par construction, $\mathcal{A}$ est une bonne algèbre pour $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{P}_t$ est un semigroupe de diffusion, d'opérateur carré du champ $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$. De plus, l'algèbre $\mathcal{A}$ est complète si et seulement si la variété riemannienne $\mathbf{E}$ elle même est complète (pour la distance associée à la métrique riemannienne). Dans ce cas, A est dense dans le domaine $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$, et $\mathbf{P}_t$ est l'unique semigroupe sous-markovien symétrique qui vérifie (2).

2— Un exemple de même nature est fourni par le cas où $\mathbf{E}$ est un ouvert à bord $\mathcal{C}^1$ d'une variété riemannienne. On peut alors prendre pour $\mathbf{P}_t$ le semigroupe du mouvement brownien réfléchi au bord de $\mathbf{E}$; l'algèbre $\mathcal{A}$ est dans ce cas l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à dérivée normale nulle au bord : elle est choisie de façon à être une bonne algèbre, et, puisqu'elle contient la fonction $\mathbf{1}$, elle est complète.

3— Un autre exemple intéressant est fourni par le semigroupe d'ORNSTEIN -UHLENBECK sur l'espace de Wiener (voir [M], par exemple). Dans ce cas, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées : c'est une bonne algèbre complète.

L'intérêt d'avoir dans l'algèbre $\mathcal{A}$ des éléments à gradient borné provient en partie du lemme suivant, qui nous sera utile plus tard :

**Lemme 2.**.—Soit $\Psi$ un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\Gamma(\Psi,\Psi)$ soit borné et soit h un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ : le produit $h\Psi$ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. De plus, si la suite $(h_n)$ converge vers h dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, la suite $h_n\Psi$ converge vers $h\Psi$.

**Preuve.** Puisque $\mathcal{A}$ est incluse dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$, on ne perd rien à supposer que la fonction $\Psi$ est bornée par **1** ainsi que son carré du champ. Lorsque $h$ est dans $\mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{E}(h\Psi,h\Psi) = \langle\Gamma(h\Psi,h\Psi)\rangle = \langle h^2\Gamma(\Psi,\Psi) + 2h\Psi\Gamma(h,\Psi) + \Psi^2\Gamma(h,h)\rangle.$$

Si l'on majore $|\Gamma(h,\Psi)|$ par $\Gamma(h,h)^{1/2}\Gamma(\Psi,\Psi)^{1/2}$, on obtient $\mathcal{E}(h\Psi,h\Psi)\leq\mathcal{E}(h,h)$. Ceci montre que l'application $h\to h\Psi$, définie sur $\mathcal{A}$, se prolonge en une application linéaire bornée sur $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Comme de plus $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est plongé dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ avec une norme plus forte, ce prolongement n'est rien d'autre que l'application $h\to h\Psi$, restreinte à $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. $\square$

Commençons par quelques remarques classiques pour les semigroupes de diffusion markoviens symétriques :

1. Pour l'opérateur carré du champ $\Gamma$, on déduit de la formule du changement de variable (1) la formule plus simple suivante, qui nous dit que c'est en chacun de ses arguments un opérateur différentiel du premier ordre :

$$\Gamma(\Phi(f^1,\cdots,f^n),g) = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(f^1,\cdots,f^n)\Gamma(f^i,g).$$

2. Si $f$ est dans $\mathcal{A}$ , $\mathbf{L}(f)$ est dans $\mathcal{A}\bigcap\mathbf{L}^1(\mu)$. Mais, puisque $\mathbf{P}_t(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, on a

$$\int\mathbf{P}_t(f)\,d\mu = \langle\mathbf{P}_t(f),\mathbf{1}\rangle = \langle f,\mathbf{P}_t(\mathbf{1})\rangle = \int f\,d\mu\,;$$

par suite, en dérivant en $t=0$, on obtient $\int\mathbf{L}(f)\,d\mu=0$.

3. En appliquant la remarque précédente au produit $fg$, on en déduit que

$$\langle f,\mathbf{L}(g)\rangle = \langle g,\mathbf{L}(f)\rangle = -\int\Gamma(f,g)\,d\mu = -\mathcal{E}(f,g).$$

De même, on a

$$\langle\Phi(f^1,\cdots,f^n),\mathbf{L}(g)\rangle = -\sum_i\int\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(f^1,\cdots,f^n)\Gamma(f^i,g)\,d\mu.$$

4. Pout tout n-uplet $(f^1,\cdots,f^n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la matrice $\left(\Gamma(f^i,f^j)\right)_{ij}$ est positive. Pour le voir, il suffit de le démontrer d'abord lorsque $n=1$, puis d'appliquer ceci à la fonction $\sum_i x_if^i$. Le résultat pour $n=1$ provient de l'identité $\Gamma(f,f) = \lim_{t\to0}(1/2t)[\mathbf{P}_t(f^2)-(\mathbf{P}_tf)^2]\geq0$.

**Théorème 3.**—Soit $\mathbf{P}_t$ un semigroupe de diffusion symétrique et soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Supposons en outre que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

1) La mesure $\mu$ est finie;

2) Le semigroupe dispose d'une bonne algèbre complète.

Dans ce cas, l'opérateur $\mathbf{P}_{\exp(i\alpha)t}$ est une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ , pour tout $p$ dans l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha}, \frac{2}{1-\cos\alpha}]$.

**Remarque.**—

Pour voir que (3) est meilleur que (1), il faut s'assurer que, pour $|\alpha| < \pi/2$, $\frac{2}{1+\cos\alpha} \leq \frac{1}{1-|\alpha|/\pi}$ et que $\frac{2}{1-\cos\alpha} \geq \frac{\pi}{|\alpha|}$.

Prenons la première inégalité : pour $0 < \alpha < \pi/2$, elle s'écrit $1 - \cos\alpha \leq \frac{2}{\pi}\alpha$. Dans la dernière inégalité, les deux membres sont égaux lorsque $\alpha$ est égal à 0 ou à $\pi/2$, mais le second membre est une fonction linéaire de $\alpha$ alors que le premier en est une fonction strictement convexe, ce qui montre l'inégalité stricte dans l'intervalle ouvert. La seconde inégalité se traite de la même manière.

**Preuve.** (Du théorème 3). Etant donné la symétrie de l'opérateur $\mathbf{P}_{\exp(i\alpha)t}$, il suffit de démontrer notre résultat lorsque $p$ est dans l'intervalle $]\frac{2}{1+\cos\alpha}, 2[$, le reste s'en déduisant par dualité. Comme la preuve que nous allons donner est très peu liée à la nature complexe, nous posons des jalons en vue d'une généralisation ultérieure.

Considérons une matrice $n \times n$ à coefficients réels $M^i_j$ : on s'intéresse aux solutions $\big(f^1(t), \cdots, f^n(t)\big)$ du système

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f^i(t) = \sum_j M^i_j \mathbf{L} f^j(t).$$

**Définition.**—*Nous dirons que* $\left(f^1(t), \cdots, f^n(t)\right)$ *est une solution de (3) dans* $\mathbf{L}^2(\mu)$ *de valeur initiale* $\left(f^1(0), \cdots, f^n(0)\right)$ *si*

1) *Il existe une version* $\left(f^1(x,t), \cdots, f^n(x,t)\right)$ *telle que, pour presque tout* $x$, *les fonctions* $f^i(x,.)$ *soient des fonctions de* $t$ *continues sur* $[0,\infty[$ *et dérivables sur* $]0,\infty[$.
2) *Pour tout* $t > 0$, *les fonctions* $f^i(t)$ *sont dans le domaine* $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$ *de* $\mathbf{L}$ *et l'on a*

(a)
$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \leq T;\, i} \|f^i(t)\|_2 < \infty\,;$$

(b)
$$\forall\, 0 < T_1 < T_2 < \infty, \quad \sup_{T_1 \leq t \leq T_2;\, i} \|\mathbf{L}f^i(t)\|_2 < \infty\,.$$

3) *Pour tout* $t$, *l'égalité (3) a lieu presque partout.*

**Lemme 4.**—Soit $\left(f^1(t), \cdots, f^n(t)\right)$ une solution de (3) dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ et soit $\Phi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{R}^n$. Supposons que $\Phi$ satisfasse à :

1) $|\Phi(x)| \leq a\|x\|^2 + b$;
2) $|\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(x)| \leq a\|x\|^k + b$ pour au moins un $k < 1$;
3) La matrice $\nabla\nabla\Phi = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Phi(x)\right)$ est bornée;
4) La matrice symétrique $\nabla\nabla\Phi.M + {}^tM.\nabla\nabla\Phi$ est positive.

Dans ces conditions, si la mesure $\mu$ est finie ou si l'on dispose d'une bonne algèbre complète, la fonction $\langle \Phi \circ f(t) \rangle$ est décroissante.

Admettons ce lemme pour un instant et voyons en quoi il implique notre théorème. On va l'appliquer dans $\mathcal{R}^2$ avec pour matrice $M$ la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

et avec pour fonction $\Phi$ la fonction $\|x\|^p$. Comme cette dernière n'est pas vraiment de classe $\mathcal{C}^\infty$, on prendra plutôt la fonction $\Phi_\varepsilon$ égale à $(\|x\|^2 + \varepsilon)^{p/2}$ et l'on fera ensuite tendre $\varepsilon$ vers 0.

Soit alors $f(0) = f^1(0) + if^2(0)$ une fonction de $\mathbf{L}^2(\mu)$ à valeurs complexes, que nous assimilons au vecteur $\left(f^1(0), f^2(0)\right)$. On pose

$$f(t) = \mathbf{P}_{\exp(i\alpha)t} f(0) = f^1(t) + if^2(t).$$

On trouvera dans [S] la preuve que $f(t)$ admet une version analytique en $t$ pour presque tout $x$, ce qui est un résultat très général et valable pour tous les semigroupes symétriques. On a $\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \exp(i\alpha)\mathbf{L}f(t)$, ce qui s'écrit encore « f est solution de (3) dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ » .

Ensuite, il nous reste à remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pout tout $p$ dans l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha}, \frac{2}{1-\cos\alpha}]$, la fonction $\Phi_\varepsilon$ satisfait aux hypothèses du lemme 3. Posons $r_\varepsilon = \{\|x\|^2 + \varepsilon\}^{1/2}$ : on a $\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_\varepsilon = px^i r_\varepsilon^{p-2}$ et

$$\nabla\nabla\Phi_\varepsilon = pr_\varepsilon^{p-2}[I + (p-2)\frac{\|x\|^2}{r_\varepsilon^2}\frac{x}{\|x\|}\otimes\frac{x}{\|x\|}].$$

Les propriétés (1), (2) et (3) sont à peu près immédiates, et la propriété (4) (la seule qui soit vraiment importante) fera l'objet du lemme 5. On en déduit alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\langle\Phi_\varepsilon \circ f(t)\rangle$ est décroissante. En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on obtient $\|f(t)\|_2^2 \leq \|f(0)\|_2^2$, ce qui est exactement le résultat annoncé.

**Lemme 5.**—Dans $\mathcal{R}^2$, considérons la matrice symétrique $H = I + \lambda y \otimes y$, où $y$ est un vecteur de norme 1. Si $M_\alpha$ désigne comme plus haut la matrice de rotation d'angle $\alpha$, alors ${}^tM_\alpha.H + H.M_\alpha$ est une matrice symétrique positive dès que $\lambda \in [\frac{-2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}]$.

**Preuve.** La matrice précédente s'écrit $[2\cos\alpha I + \lambda({}^tM_\alpha.y\otimes y + y\otimes y.M_\alpha)]$ : c'est la matrice de la forme quadratique $Q(x,x) = 2[\cos\alpha\|x\|^2 + \lambda(y.x)(y.M_\alpha x)]$. Ses directions propres font avec $y$ des angles de $-\alpha/2$ et $-\alpha/2 + \pi/2$, et ses valeurs propres sont $2[\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}(\cos\alpha \pm 1)]$ . □

Il nous reste à démontrer le lemme 3 : nous traitons d'abord le cas où la mesure est bornée. Puisque $f(t)$ est une solution de l'équation (3) dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, la fonction $\Phi \circ f(t)$ est intégrable, et il en existe une bonne version pour laquelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi[f](t) = \sum_i (\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f]\,\frac{\partial}{\partial t}f^i(t) = \sum_{i,j}(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f]\,M_j^i\mathbf{L}f^j(t).$$

Pour pouvoir dériver la quantité $\langle\Phi \circ f(t)\rangle$, il nous suffit de remarquer que , pour tout couple $(i,j)$ et pour tout $t$, la quantité $(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f]\,\mathbf{L}f^j$ est uniformément intégrable. En effet, grâce à l'hypothèse (2) sur la fonction $\Phi$, on est rammené à montrer que $(a\|f\|^k + b)|\mathbf{L}f^i|$ est uniformément intégrable pour un $k < 2$. Mais, par hypothèse, $|\mathbf{L}f^i(t)|$ est uniformément bornée dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ lorsque $t$ décrit les compacts de $]0,\infty[$, et ceci règle le cas du coefficient de $b$ dans l'expression précédente. Ensuite, on peut écrire

$$\langle\,[\|f\|^k|\mathbf{L}f^i|]^p\,\rangle \leq \langle\|f\|^2\rangle^{kp/2}\,\langle|\mathbf{L}f^i|^2\rangle^{p/2},$$

avec $p = \frac{2}{k} - 1$.

On peut alors écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\Phi[f](t)\rangle = \sum_{ij}\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f]\,M_j^i\mathbf{L}f^j\rangle = \sum_{ij}M_j^i\,\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f],\mathbf{L}f^j\rangle.$$

Il nous reste à voir que, pour toute les fonctions $(f^1, \cdots, f^n)$ de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, l'expression $\sum_{ij} M^i_j \mathcal{E}\big[(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f], f^j\big]$ est positive. Mais, puisque $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, et grâce aux propriétés de $\mathcal{E}$, il suffit de le démontrer sur $\mathcal{A}$. Or, lorsque $f^1, \cdots, f^n$ sont dans $\mathcal{A}$, on a

$$\sum_{ij} M^i_j \mathcal{E}[(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi) \circ f, f^j] = \sum_{ijk} M^i_j \langle (\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\Phi) \circ f, \Gamma(f^k, f^j)\rangle$$
$$= \langle \sum_{ijk} M^i_j (\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\Phi) \circ f \Gamma(f^k, f^j)\rangle.$$

Désignons par $\hat{\Gamma}$ la matrice symétrique positive $\big(\Gamma(f^k, f^j)\big)_{kj}$. Dans la dernière expression, nous pouvons remplacer la matrice $\nabla\nabla\Phi.M = \sum_i M^i_j (\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}\Phi)[f]$ par sa symétrisée $K = {}^tM\,\nabla\nabla\Phi + \nabla\nabla\Phi\, M$ qui est positive (hypothèse 4). Il nous reste alors $\sum_{ij} M^i_j \mathcal{E}[(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f], f^j] = \langle \{K, \hat{\Gamma}\}\rangle$, où l'expression $\{K, \hat{\Gamma}\}$ désigne le contracté des matrices symétriques $K$ et $\hat{\Gamma}$. Comme ces deux matrices sont positives, ce scalaire lui même est positif, et notre résultat est démontré*.

Il nous reste à traiter le cas où la mesure $\mu$ est infinie, mais où on dispose d'une algèbre complète. C'est essentiellement la même chose, la seule différence venant de ce que notre dérivation sous le signe somme n'est pas justifiée.

Appelons $\Psi_n$ la suite définissant la complétude de l'algèbre $\mathcal{A}$. Nous allons montrer qu'en fait

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \Phi \circ f(t), \Psi_n\rangle \leq \kappa/n, \tag{4}$$

où $k$ est une constante indépendante de $n$. On a donc

$$\langle \Phi \circ f(t), \Psi_n\rangle \leq \langle \Phi \circ f(0), \Psi_n\rangle + \frac{kt}{n},$$

et il nous reste à faire tendre $n$ vers l'infini pour en arriver à la même conclusion que plus haut.

Pour prouver (4), on peut comme plus haut dériver sous le signe somme, la présence de la fonction $\Psi_n$, qui est dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, nous permettant de faire comme si la mesure $\mu$ était de masse finie. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \Phi \circ f(t), \Psi_n\rangle = \sum_{ij} M^i_j \langle (\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f](t), \mathbf{L}f^j(t).\Psi_n\rangle = (\text{déf}) H(f^1(t), \cdots, f^n(t)).$$

---

* Si $M$ et $N$ désignent des matrices symétriques sur $\mathcal{R}^n$, on peut dire que $M$ est la matrice d'une forme quadratique $\mathbf{M}$ sur $\mathcal{R}^n$ et $N$ celle d'une forme quadratique $\mathbf{N}$ sur son dual. Si $(e_i)$ désigne une base de $\mathcal{R}^n$ et $(e^*_i)$ la base duale, alors le contracté de $M$ et $N$ vaut $\sum_{ij} \mathbf{M}(e_i, e_j)\mathbf{N}(e^*_i, e^*_j)$. Sur cette expression, il est clair que si $M$ et $N$ sont positives, il en va de même de leur contracté.

Il nous reste à montrer que $H(f^1(t),\cdots,f^n(t))$ est majorée par $k/n$. On va montrer qu'en fait

(5) $$H(f^1,\cdots,f^n)\leq k/n$$

pour tous les éléments $(f^1,\cdots,f^n)$ du domaine $\mathcal{D}_2(\mathbf{L})$. Pour cela, remarquons que, dans l'expression de $H$, la fonction $\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi$ est par hypothèse à gradient borné, et donc que la fonction $h_i=(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f](t)$ est dans l'espace de DIRICHLET $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Il en va de même du produit $h_i\Psi_n$ en vertu du lemme 2.

Dans l'expression de $H(f^1,\cdots,f^n)$, on peut alors remplacer la quantité $\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f],\mathbf{L}(f^j).\Psi_n\rangle$ par $\mathcal{E}(f^j,(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f]\,\Psi_n)$. Ceci montre que si, pour tout $i$, $(f^i_p)$ est une suite qui converge vers $f^i$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, alors $H(f^1_p,\cdots,f^n_p)$ converge vers $H(f^1,\cdots,f^n)$. Mais, par hypothèse, l'algèbre $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. On peut donc se ramener à prouver l'inégalité (5) lorsque les fonctions $(f^1,\cdots,f^n)$ sont dans $\mathcal{A}$.

Dans $H$, on peut maintenant remplacer l'expression $\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f],\mathbf{L}(f^j).\Psi_n\rangle$ par la quantité

$$\begin{aligned}&-\langle\Gamma(\Psi_n(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f],f^j)\rangle=\\&-\sum_{ik}\langle\,\Psi_n(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\Phi)[f],\Gamma(f^k,f^j)\rangle-\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)\circ f,\Gamma(\Psi_n,f^j)\rangle.\end{aligned}$$

Il nous reste finalement

(6) $$\begin{aligned}&H(f^1_p,\cdots,f^n_p)=\\&-\langle\Psi_n,\sum_{ijk}M^i_j(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\Phi)[f]\Gamma(f^k,f^j)\rangle-\sum_{ij}M^i_j\langle(\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi)[f],\Gamma(\Psi_n,f^j)\rangle.\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de (6) est négatif, comme cela découle de l'argument utilisé dans le cas de la mesure finie. Pour traiter le second terme, on commence par majorer $\Gamma(\Psi_n,f^j)^2$ par $\Gamma(\Psi_n,\Psi_n)\Gamma(f^j,f^j)\leq\frac{1}{n}\Gamma(f^j,f^j)$. Grâce à la majoration que nous avons sur la fonction $\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi$, ceci nous donne finalement une majoration de la forme $\frac{K}{n}\|f\|^2\sum_i\mathcal{E}(f^i,f^i)$, ce qui est exactement (5). $\square$

## Optimalité de l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha},\frac{2}{1-\cos\alpha}]$.

Il n'est pas difficile de voir que, au moins pour les diffusions de mesure invariante finie, l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha},\frac{2}{1-\cos\alpha}]$ ne peut pas être agrandi.

Supposons pour simplifier que l'espace $\mathbf{E}$ est une variété compacte et que $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$. Soit $z$ un complexe fixé de partie réelle positive et de module 1 et soit $p$ un réel compris entre 1 et 2. Supposons que l'opérateur $\mathbf{P}_{tz}$ soit une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour tout $t$ réel positif. Appelons alors $\Phi_p$ la fonction $|x|^p$ et répétons l'argument employé dans la démonstration du théorème précédent, en dérivant en $t = 0$ la propriété de contraction. Si $\alpha$ désigne l'argument de $z$ et $M_\alpha$ la matrice de rotation d'angle $\alpha$, on appelle $M(x)$ la matrice $[\nabla\nabla\Phi_p M_\alpha + {}^t M_\alpha \nabla\nabla\Phi_p]$ ; pour une fonction $f = f^1 + if^2$ de $\mathcal{A}$, on note comme plus haut $\hat{\Gamma}$ la matrice $2 \times 2$ $\big(\Gamma(f^i, f^j)\big)$. On obtient, pour toute fonction $f$ de $\mathcal{A}$ à valeurs complexes,

$$\int_{\mathbf{E}} \{M(f^1, f^2), \hat{\Gamma}\}\, d\mu \geq 0.$$

On va voir que ceci n'est possible que si $p$ est dans l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha}, \frac{2}{1-\cos\alpha}]$. Pour cela, il nous faut calculer la matrice $[\nabla\nabla\Phi_p M_\alpha + {}^t M_\alpha \nabla\nabla\Phi_p]$, en un point $x$ de $\mathcal{R}^2$ qui fait un angle $\theta$ avec l'axe réel : à un facteur multiplicatif positif près, elle est égale à

$$\begin{pmatrix} p\cos\alpha + (p-2)\cos(2\theta-\alpha) & (p-2)\sin(2\theta-\alpha) \\ (p-2)\sin(2\theta-\alpha) & p\cos\alpha - (p-2)\cos(2\theta-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Donc, si $p < \dfrac{2}{1+\cos(\alpha)}$, il existe un intervalle $I = ]\frac{\alpha}{2} - \varepsilon, \frac{\alpha}{2} + \varepsilon[$ tel que, si $\theta$ est dans $I$, le coefficient $M(x)_{11}$ est strictement négatif. Choisissons alors la fonction $f$ de la façon suivante : $f_2$ est constante et égale à $\sin(\frac{\alpha}{2})$ et $f_1$ est une fonction non constante à valeurs dans l'intervalle $[\cos(\alpha/2) - \eta, \cos(\alpha/2) + \eta]$, où $\eta$ est choisi de telle sorte que l'argument de $f_1 + if_2$ soit dans $I$. Dans ce cas, la matrice $\hat{\Gamma}$ vaut $\begin{pmatrix} \Gamma(f_1, f_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et le produit scalaire $\{M(f_1, f_2), \hat{\Gamma}\}$ est négatif, strictement là où $\Gamma(f_1, f_1)$ est non nul. Ceci nous amène à une contradiction.

Un argument de dualité montre qu'on ne peut pas non plus avoir $p > \dfrac{2}{1-\cos\alpha}$.

**Remarque.—**

Une dernière remarque avant de passer à la généralisation de ce résultat : il ne faudrait pas croire que ce l'intervalle donné est caractéristique des diffusions. En effet, la chaine de MARKOV symétrique sur l'espace à deux points de générateur

$$\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$$

admet le même intervalle de contraction dans le plan complexe que les diffusions, comme on peut s'en convaincre en faisant le calcul directement.

## 3.— Généralisation

Le résultat que nous avons en fait obtenu au chapitre précédent est en fait le suivant :

**Théorème 6.**—Soit $M$ une matrice $n \times n$ à coefficients réels. On suppose que, pour un $p$ compris entre 1 et 2, $M$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathcal{R}^n, \|x\| \leq 1, \qquad [I+(p-2)x\otimes x]M + {}^tM[I+(p-2)x\otimes x] \geq 0. \tag{7}$$

Supposons que $\mathbf{L}$ soit un opérateur de diffusion symétrique sur $\mathcal{A}$ et que la mesure $\mu$ soit finie ou que l'algèbre $\mathcal{A}$ soit complète.

Soit alors $f(t)$ une solution dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = M\mathbf{L}f(t). \tag{8}$$

On a

$$\|f(t)\|_p \leq \|f(0)\|_p.$$

**Remarque.**—

Dans l'énoncé précédent, on a bien sûr posé $\|f\|_p^p = \int [\sum_i (f^i)^2]^{\frac{p}{2}}\, d\mu$. L'espace des n-uplets $f = (f^1, \cdots, f^n)$ de fonctions boréliennes tels que $\|f\|_p$ soit borné, muni de la norme $\|\,.\,\|_p$, sera appelé $\mathbf{L}^p(\mu)$ sans autre commentaires.

Il n'est en général pas facile de vérifier qu'une matrice $M$ donnée vérifie l'hypothèse (7) et encore moins de savoir s'il existe des solutions de (8) dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Mais nous allons étudier ci-dessous la généralisation immédiate du cas complexe : le cas où la matrice $M$ est normale, c'est à dire qu'elle s'écrit $M = S + A$ où $S$ est une matrice symétrique et $A$ une matrice antisymétrique, ces deux matrices commutant entre elles. Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas où la matrice $S$ est positive.

Etant donné une telle matrice, il est toujours possible de trouver une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon_p, \varepsilon'_p, \eta_1, \cdots, \eta_{p'})$ de $\mathcal{R}^n$ qui ait la propriété suivante :

- Chaque $\eta_i$ est un vecteur propre de $M$ de valeur propre réelle $t_i \geq 0$.
- Sur chacun des espaces engendrés par $(\varepsilon_j, \varepsilon'_j)$, $M$ agit par multiplication complexe : c'est à dire que si on identifie le point $X_j = x^j\varepsilon_j + y^j\varepsilon'_j$ au complexe $x^j + iy^j$, on a $MX_j = z_jX_j$, où $z_j$ est un nombre complexe dont la partie réelle est positive. Dans ce cas, $z_j$ et $\bar{z}_j$ sont des valeurs propres complexes conjuguées de $M$.

En d'autres termes, on peut toujours ramener l'étude de l'équation (8) à un système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f^j(t) = z_j\mathbf{L}f^j(t), & 1 \leq j \leq p, \\ & \quad et \\ \frac{\partial}{\partial t} g^j(t) = t_j\mathbf{L}g^j(t), & 1 \leq j \leq p'. \end{cases}$$

Une solution de ce système dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ est donnée par

$$f^j(t) = \mathbf{P}_{z_j t}[f(0)],\ 1 \leq j \leq p \text{ et } g^j(t) = \mathbf{P}_{t_j t}[g(0)],\ 1 \leq j \leq p'.$$

Cette solution ne dépend pas de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p, \varepsilon_p', \eta_1, \cdots, \eta_{p'})$ choisie : nous la noterons $f(t) = \mathbf{P}_{tM} f(0)$. La notation est cohérente puisque $\mathbf{P}_{s(tM)} = \mathbf{P}_{(st)M}$. Néammoins, il ne faut pas se laisser abuser par celle-ci : en général, on n'aura $\mathbf{P}_M \circ \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_{M+N}$ que si les matrices $M$ et $N$ commutent.* Clairement, l'opérateur $\mathbf{P}_{tM}$ est une contraction symétrique sur $\mathbf{L}^2(\mu)^n$, pour la structure hilbertienne naturelle de cet espace.

Si nous voulons appliquer le résultat de la première partie, nous devons poser $z_j = \rho_j \exp(i\alpha_j)$, où $\rho_j$ est la norme de $z_j$ et $\alpha_j$ son argument. Pour tous les indices $j$ et pour tout $q$ de $[1, \infty[$, on a $\|g^j(t)\|_q \leq \|g^j(0)\|_q$, tandis qu'on a $\|f^j(t)\|_q \leq \|f^j(0)\|_q$ à condition que $q$ soit dans l'intervalle $[\frac{2}{1+\cos\alpha_j}, \frac{2}{1-\cos\alpha_j}]$.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait posé $0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_p$, ainsi que $|f(t)| = \Big[\sum_1^p |f^j(t)|^2 + \sum_1^{p'} |g^j(t)|^2\Big]^{1/2}$. On obtient alors

$$\|f(t)\|_q \leq (p+p')^{1/2} \|f(0)\|_q, \text{ dès que } \quad q \in [\frac{2}{1+\cos\alpha_p}, \frac{2}{1-\cos\alpha_p}].$$

On va voir que le théorème précédent nous donne un résultat plus précis, à savoir $\|f(t)\|_q \leq \|f(0)\|_q$ (c'est à dire une norme ne dépendant pas de l'ordre de la matrice $M$), quitte à perdre un peu sur l'exposant $q$.

---

Considérons donc une matrice normale $M = S + A$, dont la partie symétrique $S$ est strictement positive. Pour tout vecteur $X$ de $\mathcal{R}^n$, posons $\rho_1^2(X) = {}^tXS^{-1}X$ et $\rho_2^2(X) = {}^tX(S^2 - A^2)S^{-1}X$.

Posons ensuite $K(M) = \sup_{\{|X|^2=1\}} \rho_1(X)\rho_2(X)$ et $c(M) = K(M)^{-1}$. Nous verrons plus bas, lorsque nous le calculerons explicitement, que $c(M)$ est toujours compris entre 0 et 1. On a alors le

---

* Nous reviendrons sur cette question un peu plus bas

**Théorème 7..**—L'opérateur $\mathbf{P}_{tM}$ est une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour tout $p$ dans l'intervalle $[\frac{2}{1+c(M)}, \frac{2}{1-c(M)}]$.

**Preuve.** Puisque l'opérateur $\mathbf{P}_{tM}$ est symétrique, un argument de dualité standard permet de se ramener au cas où $p$ est compris entre 1 et 2. Le théorème précédent s'applique alors, à condition de montrer que, pour les valeurs de $p$ considérées, on a

$$(9) \quad \forall X \in \mathcal{R}^n, |X| \leq 1, \qquad {}^tM.\big[I+(p-2)X \otimes X\big] + \big[I+(p-2)X \otimes X\big].M \geq 0.$$

Si l'on note $X.Y$ le produit scalaire de deux vecteurs $X$ et $Y$ dans $\mathcal{R}^n$, ceci s'écrit encore

$$(10) \qquad \forall Y \in \mathcal{R}^n, \forall X \in \mathcal{R}^n,\ |X| \leq 1, \qquad {}^tYSY + (p-2)(Y.X)(Y.MX) \geq 0.$$

Appelons $U$ la racine carrée positive de $S$ : $U$ commute avec $A$ puisqu'il en va de même pour $S$. Posons $X_1 = U^{-1}X$ et $X_2 = U^{-1t}MX$ . L'équation (10) s'écrit encore

$$\forall Y \in \mathcal{R}^n,\ \forall X \in \mathcal{R}^n,\ |X| \leq 1, \quad |Y|^2 \ + \ (p-2)(X_1.Y)(X_2.Y) \geq 0,$$

ou encore, sachant que $(p-2) < 0$,

$$(11) \qquad \forall X \in \mathcal{R}^n,\ |X| \leq 1, \quad |X_1|\,|X_2| \ + \ X_1.X_2 \ \leq \frac{2}{2-p},$$

car les deux valeurs propres de cette forme quadratique sont

$$\begin{cases} 1+\dfrac{p-2}{2}\Big(\dfrac{X_1.X_2}{|X_1|.|X_2|}-1\Big) \\ \text{et} \\ 1+\dfrac{p-2}{2}\Big(\dfrac{X_1.X_2}{|X_1|.|X_2|}+1\Big). \end{cases}$$

Mais on a $X_1.X_2 \ = \ {}^tXU^{-2t}MX \ = \ {}^tXS^{-1t}MX$. Dans cette dernière expression, on peut remplacer la matrice $S^{-1t}M$ par sa symétrisée, qui n'est autre que l'identité. On a donc $X_1.X_2 = |X|^2$.

D'autre part, on a $|X_1|^2 = {}^tXU^{-2}X = {}^tXS^{-1}X = \rho_1^2(X)$ et $|X_2|^2 = {}^tX^S{-}1^tMMX = \rho_2^2(X)$. Finalement, l'inégalité (11) devient

$$(12) \qquad \forall X \in \mathcal{R}^n,\ |X| \leq 1, \qquad \rho_1(X)\rho_2(X) + 1 \ \leq \ \frac{2}{2-p}.$$

Mais pour des raisons d'homogénéité évidentes, pour que (12) soit vraie, il sufit qu'elle soit vraie lorsque $X$ est de module 1. Par définition de $K(M)$, cela s'écrit $K(M){+}1 \leq \frac{2}{2-p}$, ou encore $p \geq \frac{2}{1+c(M)}$.

### Calcul de c(M) en fonction des valeurs propres de la matrice M.

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes du demiplan $\Re(z) > 0$. On pose $\Re(z_j) = x_j$. Lorsque $x_1 \neq x_2$, on peut toujours écrire de manière unique $z_j = t + re^{i\alpha_j}$, où $t$ est un réel, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont des réels de $[0, 2\pi[$,et $r$ est un réel positif. (Dans le plan complexe, $t$ est à l'intersection de l'axe réel et de la médiatrice de $[z_1, z_2]$.)

Définissons une fonction $K(z_1, z_2)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} K(z_1,z_2) = \sup(\frac{|z_1|^2}{x_1^2}, \frac{|z_2|^2}{x_2^2}) & \text{si } x_1 = x_2 \\ K(z_1,z_2) = \frac{t^2}{t^2-r^2} & \text{si } x_1 \neq x_2 \text{ et si } \begin{cases} |z_1|^2 > t^2 - r^2 > |z_2|^2 \\ \text{ou} \\ |z_2|^2 > t^2 - r^2 > |z_1|^2 \end{cases} \\ K(z_1,z_2) = \sup(\frac{|z_1|^2}{x_1^2}, \frac{|z_2|^2}{x_2^2}) & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

En faisant un dessin, il n'est pas difficile de voir que c'est une fonction continue dans le domaine $\left\{\Re(z_1) > 0\,;\, \Re(z_2) > 0\right\}$. On a alors

**Proposition 8.**—Soient $(z_1, \cdots, z_n)$ les valeurs propres de la matrice $M$, réelles ou complexes, distinctes ou confondues. On a

$$K(M)^2 = \sup_{ij} K(z_i, z_j).$$

**Preuve.** Séparons les valeurs propres de $M$ en deux parts : celles qui sont complexes (non réelles) conjuguées deux à deux, soit $(z_i, \bar{z}_i)$, pour $1 \leq i \leq p$, et celles qui sont réelles, soit $t_i$, pour $1 \leq i \leq p'$, avec $n = 2p + p'$. Appelons $x_i$ la partie réelle de $z_i$ et plaçons nous dans une des bases décrites plus haut : dans cette base, un élément $X$ de $\mathcal{R}^n$ s'écrit $(\xi_1, \cdots, \xi_p, \zeta_1, \cdots, \zeta_{p'})$, où les $\xi_i$ dont des nombres complexes et les $\zeta_i$ des nombres réels.

On a alors $|X|^2 = \sum_i |\xi_i|^2 + \sum_i |\zeta_i|^2$, tandis que, en introduisant à nouveau les vecteurs $X_1$ et $X_2$ utilisés dans la démonstration du théorème précédent, on a $\rho_1(X)^2 = |X_1|^2$ et $\rho_2(X)^2 = |X_2|^2$ avec

$$\begin{aligned} X_1 &= (\frac{\xi_1}{x_1^{1/2}}, \cdots, \frac{\xi_p}{x_p^{1/2}}, \frac{\zeta_1}{t_1^{1/2}}, \cdots, \frac{\zeta_{p'}}{t_{p'}^{1/2}}) \quad \text{et} \\ X_2 &= (\frac{\bar{z}_1}{x_1^{1/2}}\xi_1, \cdots, \frac{\bar{z}_p}{x_p^{1/2}}\xi_p, t_1^{1/2}\zeta_1, \cdots, t_{p'}^{1/2}\zeta_{p'}). \end{aligned}$$

Des expressions précédentes, on déduit immédiatement que

$$|X_1|^2 = \sum_i \frac{|\xi_i|^2}{x_i} + \sum_i \frac{|\zeta_i|^2}{t_i}, \quad \text{et} \quad |X_2|^2 = \sum_i \frac{|z_i|^2}{x_i}|\xi_i|^2 + \sum_i t_i x_i^2.$$

Pour simplifier les notations, écrivons $s_i$ à la place de $|X_i|^2$ et posons $\lambda_i = \frac{|z_i|^2}{x_i}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\lambda_i = t_{i-p}$ pour $p+1 \leq i \leq p+p'$, ainsi que $\mu_i = \frac{1}{x_i}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\mu_i = \frac{1}{t_{i-p}}$ pour $p+1 \leq i \leq p+p'$. On a alors $\rho_1(X)\rho_2(x) = \left(\sum_i \mu_i s_i\right)\left(\sum_i \lambda_i s_i\right)$.

Le calcul de $K(M)$ revient alors à optimiser l'expression $\left(\sum_i \mu_i s_i\right)\left(\sum_i \lambda_i s_i\right)$ sur l'ensemble $\{s_i \geq 0, \forall i \,;\, \sum s_i = 1\}$. La proposition découle alors du lemme suivant :

**Lemme 9.**—Soient $(\lambda_i)$ et $(\mu_i)$, $1 \leq i \leq k$ des réels strictement positifs, et soit

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{[\lambda_i\mu_j - \lambda_j\mu_i]^2}{4(\mu_j - \mu_i)(\lambda_i - \lambda_j)} & \text{si} \begin{cases} (\mu_i - \mu_j)(\lambda_i - \lambda_j) < 0 \\ \text{et} \\ 0 < \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} + \dfrac{\mu_i}{\mu_i - \mu_j} < 2 \end{cases} \\ \sup(\lambda_i\mu_i, \lambda_j\mu_j) & \text{sinon} \end{cases}$$

et posons $R(\lambda, \mu) = \sup_{ij} r_{ij}$. On a

$$R(\lambda, \mu) = \sup_{\{s_i \geq 0, \forall i \,;\, \sum s_i = 1\}} \Big(\sum_i \mu_i s_i\Big)\Big(\sum_i \lambda_i s_i\Big).$$

**Preuve.** Appelons $\Phi_{\lambda\mu}(s)$ la fonction $\left(\sum_i \mu_i s_i\right)\left(\sum_i \lambda_i s_i\right)$. Son sup sur un compact est une fonction continue de $\lambda$ et $\mu$. Remarquons qu'il en va de même de la fonction $R$. Quitte à modifier un peu $\lambda$ et $\mu$, on peut donc se ramener au cas où tous les déterminants

$$D(i,j,k) = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & 1 \\ \lambda_j & \mu_j & 1 \\ \lambda_k & \mu_k & 1 \end{vmatrix}$$

sont non nuls. Si le sup de $\Phi_{\lambda\mu}$ est atteint en un point intérieur du compact $\{s_i \geq 0, \sum_i s_i = 1\}$, le gradient de la fonction $\Phi$ en ce point est parallèle au vecteur $(1, \cdots, 1)$, ce qui est impossible si $k \geq 3$, à cause de l'hypothèse sur les déterminants que nous avons faite. On est donc ramené au cas où l'un des $s_i$ est nul, ce qui nous donne le même problème avec une dimension de moins. On voit donc qu'en un point où le maximum est atteint tous les $s_i$ sont nuls sauf au plus 2, et il ne nous reste plus qu'à calculer le maximum de l'expression $(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)(\mu_1 s_1 + \mu_2 s_2)$ sur l'ensemble $\{s_1 + s_2 = 1 \,;\, s_1 \geq 0 \,;\, s_2 \geq 0$. Il est immédiat de voir qu'il vaut $R(\lambda, \mu)$. $\square$

Pour terminer, montrons ce que vaut $c(M)$ sur quelques exemples ;

1. **Cas où la matrice $M$ est symétrique.**

   Dans ce cas, toutes les valeurs propres sont réelles positives : soient $t_1$ la plus petite et $t_n$ la plus grande. Posons $\frac{t_n}{t_1} = \mathrm{tg}^2(\theta)$, avec $\theta$ dans l'intervalle $[\pi/4, \pi/2[$. Un petit calcul montre alors que $c(M) = \cos(2\theta - \pi/2)$. L'estimation obtenue ne portant que sur les bornes du spectre de $M$, elle demeure vraie lorsque la dimension est infinie, c'est à dire lorsque $M$ est remplacé par un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert, à condition que celui-ci soit à spectre discret et borné supérieurement et inférieurement (cela demeure sans doute vrai sans l'hypothèse sur le spectre, mais je n'ai pas vérifié).

2 **Cas où $M$ est une matrice $3 \times 3$, avec $S^2 = xI$.**

On écrit $M$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} x & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & x & x_1 \\ x_2 & -x_1 & x \end{pmatrix}$$

Une des valeurs propres est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées. La valeur propre réelle étant une valeur propre de la partie symétrique ne peut valoir que $x$, tandis que $c(M)$ vaut $\cos(\theta)$, où $\theta$ est l'angle que fait la valeur propre complexe $z$ avec l'axe réel. Mais $2\Re(z) + x = \mathrm{tr}(M) = 3x$ et $x\,|z|^2 = \det(M) = x(x^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. On en tire la valeur de $c(M)$ :

$$c(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Remarquons que, dans ce cas, on peut se faire une idée de ce que vaut $\mathbf{P}_M \circ \mathbf{P}_N$, lorsque $M$ et $N$ ne commutent pas. On décompose $M$ en $xI + A$, ce qui donne une décomposition de $\mathbf{P}_M$ en $\mathbf{P}_x \circ \mathbf{P}_A$. Les opérateurs $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}_{-A}$, qui sont tous les deux des contractions de $\mathbf{L}^2(\mu)$, sont inverses l'un de l'autre : ce sont donc des opérateurs unitaires. La matrice antisymétrique $A$ étant dans l'algèbre de Lie du groupe $SO(3)$, la matrice $R(t) = \exp(tA)$ est une matrice de rotation . Supposons maintenant que $\mathbf{L}$ ait un espace propre $E_{\lambda_0}$ associé à une valeur propre $\lambda_0$. Sur $E^3_{\lambda_0}$, l'opérateur $\mathbf{P}_A$ ne dépend en fait que de la matrice $R(\lambda_0 A)$. On a donc défini sur $E^3_{\lambda_0}$ un opérateur $\mathbf{P}(\lambda_0, R)$ : il est clair que c'est une représentation du groupe $SO(3)$, c'est à dire que l'on a $\mathbf{P}(\lambda_0, R_1R_2) = \mathbf{P}(\lambda_0, R_1) \circ \mathbf{P}(\lambda_0, R_2)$. Mais dès que l'on change de valeur propre, on change de représentation, si fait qu'il n'y a pas de formule générale pour le produit $\mathbf{P}_M \circ \mathbf{P}_N$.

### 3. Cas des quaternions.*

Un quaternion $h$ se représente par une matrice normale $4 \times 4$ de la forme suivante :

$$h = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

On pose $x_1 = \Re(h)$ et $|h|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Dans ce cas, $S^2 - A^2 = |h|^2 I$, et on obtient immédiatement, à partir de la définition plutôt qu'à partir de la formule donnant $c(M)$ en fonction des valeurs propres, $c(M) = \dfrac{\Re(h)}{|h|}$, comme dans le cas complexe.

On peut faire les mêmes remarques que plus haut pour ce qui est de la composition des opérateurs $\mathbf{P}_{h_1}$ et $\mathbf{P}_{h_2}$, à condition de remplacer le groupe $SO(3)$ par le groupe engendré par les quaternions de partie réelle nulle, qui est isomorphe au groupe $SU(2)$.

## —Références


[B] BAKRY (Dominique)— Une remarque sur les diffusions hypercontractives— *à paraître.*

[M] MEYER (Paul-André)— Notes sur les processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK— **Séminaire de Probabilités XVI** , Lecture Notes in Math. $n^o$ **920**, Springer, 1982, p. 95-132 .

[S] STEIN (Elias M.) — **Topics in harmonic analysis related to the** LITTLEWOOD-PALEY **theory** —Princeton,1970.



Dominique Bakry
Laboratoire de Statistiques et Probabilités
Université PAUL SABATIER
118, route de Narbonne,
31062, TOULOUSE Cedex.
FRANCE


---

* **G.LETAC m'a fait remarquer qu'en fait ce cas se ramène au précédent**