Séminaire de probabilités (Strasbourg)

David Nualart

Une remarque sur le développement en chaos d'une diffusion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 165-168
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__165_0>

Une remarque sur le développement en chaos d'une diffusion

par David Nualart

Le but de cette note est de donner une démonstration directe d'une propriété de continuité présentée par Meyer et Leandre au congrés sur "Stochastic Analysis" en Oberwolfach. Plus précisément il s'agit de voir que si l'on développe en chaos de Wiener une fonction régulière d'une diffusion, les noyaux qu'on obtient dans cette représentation sont des fonctions continues.

Tout d'abord nous allons introduire quelques notations. Soit $\{W(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien d–dimensionel défini dans l'espace de probabilités canonique $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On désignera par D l'opérateur de dérivation dans l'espace de Wiener, considéré comme un opérateur nonborné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega \times [0,\infty), \mathbf{R}^d)$. C'est à dire, la dérivée d'une intégrale stochastique du type $\int_0^\infty h_t dW_t^j$ où h est une fonction de $L^2([0,\infty))$, est donnée par

$$D_t^i\left(\int_0^\infty h_s dW_s^j\right) = \delta_{ij} h(t),$$

avec $1 \leq i \leq d$ et $t \geq 0$. Par itération on peut introduire les dérivées multiples comme des opérateurs nonbornés de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega \times [0,\infty)^k, (\mathbf{R}^d)^k)$, pour tout entier positif k. Pour tout $p > 1$ et tout entier $k \geq 0$ on considère, comme d'habitude l'espace de type Sobolev $\mathcal{D}_{p,k}$, défini comme l'ensemble des variables aléatoires qui ont des dérivées multiples jusquà l'ordre k et ces dérivées sont dans $L^p(\Omega, L^2([0,\infty)^j, (\mathbf{R}^d)^j))$ pour tout $j \leq k$. L'espace des variables aléatoires test, $\mathcal{D}_\infty$, sera l'intersection des $\mathcal{D}_{p,k}$. Si F est une variable aléatoire dans $\mathcal{D}_\infty$, on notera la dérivée d'ordre n de F par $D_{t_n}^{j_n} \cdots D_{t_1}^{j_1}(F)$, ou tout simplement par $D_{t_1 \cdots t_n}^{j_1 \cdots j_n}(F)$.

On considère des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^m$, A_i, $0 \leq i \leq d$, qui sont infiniment différentiables avec toutes les dérivées uniformément bornées. Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ la solution du système d'équations différentielles stochastiques

$$X_t = x_0 + \int_0^t A_i(X_s) dW_s^i + \int_0^t A_0(X_s) ds,$$

où l'on fait la convention usuelle de sommation des indices qui se trouvent répétés en haut et en bas. Ici x_0 est un point fixe de $\mathbf{R}^m$. Soit t un temps positif fixé. Nous allons étudier une variable aléatoire de la forme $F = h(X_t)$, où h est une fonction réelle sur $\mathbf{R}^m$ infiniment différentiable telle que elle même et toutes ses dérivées ont une croissance polynomiale. Il est bien connu que cette variable F appartienne à l'espace $\mathcal{D}_\infty$. On peut écrire son développement en chaos de Wiener:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

Dans ce développement, I_n représente l'intégrale multiple d'Ito d'ordre n, et f_n est une fonction symétrique de l'espace $L^2(T^n)$, où T est l'espace produit $[0,\infty) \times \{1,\cdots,d\}$ muni du produit de la mesure de Lebesgue par la mesure uniforme. On remarque que les fonctions $f_n((t_1,j_1),\cdots,(t_n,j_n))$ sont nulles presque partout sauf si les points $t_1,\cdots,t_n$ appartiennent à l'intervale $[0,t]$. On observe aussi que par la symétrie de f_n , l'intégrale multiple $I_n(f_n)$ ne dépend que des valeurs de f_n sur l'ensemble

$$\Delta(t) = \{(t_1,\cdots,t_n) \in [0,t]^n : t_1 \leq \cdots \leq t_n\}$$

pout tous $j_1,\cdots,j_n$. Alors, nous voulons démontrer le résultat suivant:

Proposition 1: *Pour tout n le noyau f_n déterminé par la projection de la variable $F = h(X_t)$ sur le chaos de Wiener d'ordre n est une fonction continue sur le sousensemble $\Delta(t)$ de $[0,t]^n$.*

Preuve: D'abord nous allons rapeler l'expression suivante (voir, par exemple Stroock [3]) qui rélie les noyaux de la représentation en chaos de Wiener d'une variable aléatoire quelconque F de l'espace $\mathcal{D}_\infty$ avec l'opérateur D:

$$f_n((t_1,j_1),\cdots,(t_n,j_n)) = \frac{1}{n!}E(D_{t_n}^{j_n}\cdots D_{t_1}^{j_1}(F)).$$

Dans le cas particulier $F = h(X_t)$, on a:

$$D_{t_n}^{j_n}\cdots D_{t_1}^{j_1}(F) = \sum(\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}h(X_t))\left[\prod_{\alpha\in J_1} D_{t_\alpha}^{j_\alpha}X_t^{i_1}\right]\cdots\left[\prod_{\alpha\in J_m} D_{t_\alpha}^{j_\alpha}X_t^{i_m}\right], \qquad (1)$$

où la somme s'étend à toutes les partitions $\{1,\cdots,n\} = J_1 \cup\cdots\cup J_m$. Il faut montrer alors que l'espérance mathématique de l'expression (1) est une fonction continue en les variables $t_1,\cdots,t_n$ dans $\Delta(t)$. Pour cela il suffira de voir que pour tout $i = 1,\cdots,m$ et pour tous $j_1,\cdots,j_n = 1,\cdots,d$, la dérivée d'ordre n $D_{t_n}^{j_n}\cdots D_{t_1}^{j_1}(X_t^i)$ a une version continue comme fonction de $\Delta(t)$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$. Cette propriété de continuité se déduit alors des deux lemmes techniques suivants, qui permettent d'achéver la démonstration de la proposition.

Les dérivées successives de X_t^i satisfont à des équations différentielles stochastiques linéaires. Le lemme suivant précise ce résultat.

Lemme 2: *La dérivée $D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n}(X_t^i)$ est bornée en L^p uniformément en $t_1,\cdots,t_n$ et t dans un intervalle borné, pour tout p, et on a*

$$
\begin{aligned}
(D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n})(X_t^i) &= \sum_{\epsilon=1}^{n}(D_{t_1}^{j_1}\cdots D_{t_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}}D_{t_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}}\cdots D_{t_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon})) \\
&+\int_{t_1\vee\cdots\vee t_n}^{t}\left[(D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n})(A_\theta^i(X_u))dW_u^\theta+(D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n})(A_0^i(X_u))du\right].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Preuve: Une démonstration détaillée en utilisant des approximations polygonales du mouvement brownien selon les idées de Ikeda et Watanabe, peut se trouver dans Nualart et Sanz [2], dans le cas des équations différentielles stochastiques sur le plan. Si on suppose connu le fait que la variable X_t^i appartient à l'espace $\mathcal{D}_\infty$, alors on peut montrer facilement le lemme par induction , en utilisant les propriétés de l'opérateur D . En effet, si l'on applique l'opérateur $D_{t_{n+1}}^{j_{n+1}}$ aux deux membres de l'équation (2), on obtient

$$
\begin{aligned}
(D_{t_1\cdots t_{n+1}}^{j_1\cdots j_{n+1}})(X_t^i) &= \sum_{\epsilon=1}^{n}(D_{t_{n+1}}^{j_{n+1}}D_{t_1}^{j_1}\cdots D_{t_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}}D_{t_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}}\cdots D_{t_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon})) \\
&+(D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n})(A_{j_{n+1}}^i(X_{t_{n+1}})) \\
&+\int_{t_1\vee\cdots\vee t_{n+1}}^{t}\left[(D_{t_1\cdots t_{n+1}}^{j_1\cdots j_{n+1}})(A_\theta^i(X_u))dW_u^\theta+(D_{t_1\cdots t_{n+1}}^{j_1\cdots j_{n+1}})(A_0^i(X_u))du\right].
\end{aligned}
$$

Finalement la majoration des normes p s'obtient sans difficulté moyennant le lemme de Gronwall et un argument d'induction. ∎

Lemme 3: *L'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\sum_{i,j_1,\cdots,j_n} E(|D_{t_1\cdots t_n}^{j_1\cdots j_n}(X_t^i)-D_{s_1\cdots s_n}^{j_1\cdots j_n}(X_t^i)|^p)\le C\sum_{i=1}^{n}|(t_i-s_i|^{p/2}
\tag{3}
$$

pour tous $(t_1,\cdots,t_n)$ et $(s_1,\cdots,s_n)$ dans $\Delta(t)$ et pour tout p plus grand que 1. La constante C dépend de n , p, t, et des normes infini des n premières dérivées des champs de vecteurs A_i.

Preuve: Il faut faire un argument d'induction. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à

$n-1$. On peut écrire:

$$\begin{aligned}
& D^{j_1\cdots j_n}_{t_1\cdots t_n}(X^i_t) - D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n}(X^i_t) \\
&= \sum_{\epsilon=1}^{n}[(D^{j_1}_{t_1}\cdots D^{j_{\epsilon-1}}_{t_{\epsilon-1}} D^{j_{\epsilon+1}}_{t_{\epsilon+1}}\cdots D^{j_n}_{t_n})(A^i_{j_\epsilon}(X_{t_\epsilon})) \\
&- (D^{j_1}_{s_1}\cdots D^{j_{\epsilon-1}}_{s_{\epsilon-1}} D^{j_{\epsilon+1}}_{s_{\epsilon+1}}\cdots D^{j_n}_{s_n})(A^i_{j_\epsilon}(X_{t_\epsilon}))] \\
&+ \int_{t_n}^{t}\left[D^{j_1\cdots j_n}_{t_1\cdots t_n} A^i_\theta(X_u) - D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n} A^i_\theta(X_u)\right] dW^\theta_u \\
&+ \int_{t_n}^{t}\left[D^{j_1\cdots j_n}_{t_1\cdots t_n} A^i_0(X_u) - D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n} A^i_0(X_u)\right] du \\
&+ \left|\int_{[s_n,t_n]} [D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n} A^i_\theta(X_u) dW^\theta_u + D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n} A^i_0(X_u) du]\right| \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + a_4.
\end{aligned}$$

Alors, l'hypothèse d'induction et les majorations uniformes des normes p des dérivées de X_t permettent de trouver les estimations désirées pour les termes a_1 et a_4. D'autre part, en utilisant une formule analogue à l'expression (1) on peut décomposer les termes a_2 et a_3 en deux parties. Une première partie contiendra des dérivées d'ordre puls petit que n et on peut lui appliquer l'hypothèse d'induction . La deuxième partie contient des intégrales sur $[s_n, t_n]$ de processus de la forme

$$\partial_\alpha A^i_\theta(X_u)\left[D^{j_1\cdots j_n}_{t_1\cdots t_n}(X^\alpha_u) - D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n}(X^\alpha_u)\right].$$

Finalement, le lemme de Gronwall permet de finir la démonstration. ∎

Notons que d'après le critère de continuité de Kolmogorov, la dérivée $D^{j_1\cdots j_n}_{s_1\cdots s_n}(X^i_t)$ a une version continue en $t_1,\cdots,t_n$ sur $\Delta(t)$ (pas seulement continue en L^p).

References bibliographiques:

[1] N.Ikeda and S. Watanabe. "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes". North-Holland, 1981.

[2] D. Nualart and M. Sanz. "Malliavin Calculus for Two-parameter Wiener Functionals". Z. Wahrschein. verw. Gebiete 70, 573-590 (1985).

[3] D.W. Stroock. "Homogeneous chaos revisited". Sém Prob. XXI. 1-7. Lecture Notes in Math. 1247.