PAUL-ANDRÉ MEYER

Construction de solutions d'« équations de structure »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 142-145
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__142_0>

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS D' "EQUATIONS DE STRUCTURE"

par P.A. Meyer

La notion d'*équation de structure* a été introduite en théorie des martingales par M. Emery, qui a étudié en particulier les martingales satisfaisant à l'équation

$$d[X,X]_t = dt + \beta X_{t-}\, dX_t$$

(voir l'exposé d'Emery dans ce volume). Nous allons montrer dans cette note, par un argument de convergence étroite, qu'il existe des martingales satisfaisant à une équation de structure

$$d[X,X]_t = dt + f(X_{t-})\, dX_t \tag{1}$$

où f est une fonction continue arbitraire. Nous prendrons $X_0 = 0$ pour fixer les idées, mais ce n'est pas essentiel. Ce résultat figure aussi dans l'exposé d'Emery, et le seul intérêt de cette note est d'être *un exercice sur l'emploi de la convergence étroite au sens des pseudo-trajectoires* (*cf.* Meyer-Zheng, Ann. Inst. Henri Poincaré, 20, 1984, p. 353-372). Cette topologie, dont l'idée initiale remonte à Maisonneuve, est en effet un outil beaucoup moins familier que la topologie de Skorohod, et il est bon d'en étudier les possibilités.

Nous n'allons travailler ici que sur l'espace Ω de toutes les trajectoires réelles càdlàg. définies sur $\mathbb{R}_+$, avec ses coordonnées X_t et ses tribus $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$. Sur cet espace, les notions de trajectoire et de pseudo-trajectoire coïncident. Il est donc inutile de rappeler ce que sont les pseudo-trajectoires, il suffit de dire ce qu'est la *topologie* des pseudo-trajectoires sur Ω, que nous appellerons simplement la *pseudo-topologie* (et toutes les notions correspondantes seront munies du même préfixe). C'est tout simplement la topologie de la convergence en mesure pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}_+$. L'espace Ω n'est pas polonais pour la pseudo-topologie, mais il est lusinien métrisable, et sa tribu borélienne est égale à $\mathcal{F}$. De plus, les ensembles suivants de lois de probabilités sont compacts pour la convergence pseudo-étroite :

— L'ensemble des lois de *quasimartingales* dont la variation stochastique est bornée par une constante C.

— L'ensemble des lois de *semimartingales positives* pour lesquelles $\mathbb{E}[X_0] \leq C$.

— L'ensemble des lois de *martingales* de norme L^p $(p>1)$ bornée par C.

— L'ensemble des lois de *processus à variation finie* (resp. croissants) dont la variation totale a une espérance bornée par C.

D'autre part, le résultat technique fondamental permettant de manipuler la pseudo-topologie est le suivant : *étant donnée une suite de lois* $\mathbb{P}^n$ *qui converge pseudo-étroitement vers* $\mathbb{P}$, *il existe sur un même espace probabilisé* $(W, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ *(une sous-suite de...) processus*

(Y_t^n), (Y_t) *de lois respectives* $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}$, *tels que les fonctions* $Y^n(t,w)$ *convergent* $\lambda\otimes\mathbb{Q}$*-p.s. vers* $Y(t,w)$. Ce résultat est une application du théorème de Skorohod sur la convergence étroite dans les espaces métriques séparables. Nous n'insistons pas, ici et plus bas, sur les changements de notation exigés en principe par les extractions de sous-suites.

Aucun autre rappel n'est nécessaire pour comprendre ce qui suit. Nous allons construire des lois de martingales satisfaisant à (1) comme valeurs d'adhérence d'une suite de lois $\mathbb{P}^n$ de martingales X^n nulles en 0, constantes sur les intervalles dyadiques $]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$. Pour déterminer $\mathbb{P}^n$, il suffit de définir la loi de la martingale discrète $Z_k = X^n_{k2^{-n}}$, ce que nous ferons au moyen de l'équation de structure discrète

$$z_k^2 = 1 + f(Z_{k-1})\,z_k \tag{2}$$

où z_k désigne l'accroissement $Z_k - Z_{k-1}$. Il n'y a aucune difficulté à construire cette loi en déterminant par récurrence, grâce à (2), la loi conditionnelle de Z_k connaissant $Z_1,\ldots,Z_{k-1}$. Bien qu'une construction en loi ait toujours lieu sur l'espace Ω, il vaut mieux imaginer les X^n définies sur des espaces probabilisés distincts.

Le crochet oblique A^n de la martingale X^n est le processus croissant étagé et continu à droite dans la subdivision $(k2^{-n})$, qui prend la caleur $A_t^n = t$ aux points de subdivision. Il est donc déterministe, et c'est la n-ième approximation dyadique inférieure de la fonction t.

Les martingales X^n étant uniformément bornées dans L^2 sur tout intervalle borné, les lois $\mathbb{P}^n$ sont pseudo-tendues, et nous supposerons, quitte à extraire une sous-suite et à changer de notation, qu'elles convergent pseudo-étroitement vers une loi $\mathbb{P}$. D'après le lemme fondamental rappelé au début, nous pouvons supposer (au prix d'une nouvelle extraction de sous-suite) que les X^n sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(W,\mathcal{G},\mathbb{Q})$ et que les trajectoires $X^n_\bullet(w)$ convergent λ-p.p. vers celles d'une martingale càdlag X de loi $\mathbb{P}$. Maintenant le problème est de prouver que X *satisfait à l'équation de structure (1)*.

Remarquons que chaque v.a. X_t^n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et en particulier appartient à L^4. Nous avons pour toute (semi)martingale Y et toute subdivision (t_i) d'un intervalle $[0,t]$ de $\mathbb{R}_+$

$$[Y,Y]_t - \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 = 2\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (Y_{s-} - Y_{t_i})\,dY_s$$

Pour une martingale appartenant à L^4, de crochet oblique B, nous avons donc

$$\|\, [Y,Y]_t - \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 \,\|^2 = 4\mathbb{E}[\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (Y_{s-} - Y_{t_i})^2\,dB_s]$$

Pour toutes les martingales auxquelles nous avons affaire ici, B_s ne dépend que de s. Nous pouvons donc le sortir de l'espérance, puis remplacer $\mathbb{E}[(Y_{s-} - Y_{t_i})^2]$ par $B_{s-} - B_{t_i}$, et il reste finalement

$$\|\, [Y,Y]_t - \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 \,\|^2 = 4\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B_{s-} - B_{t_i})^2\,dB_s$$

Nous appliquons cela avec $Y = X^n$, $B = A^n$: la variation totale de A^n reste bornée sur $[0,t]$, et les A^n sont de plus en plus continus (plus précisément, $A_t^n - A_s^n \leq (t-s)+2.2^{-n}$ pour $s \leq t$). *Le côté droit tend donc vers* 0 *lorsque le pas de la subdivision* (t_i) *tend vers* 0 , ***uniformément en*** n. Ainsi l'approximation des crochets droits des X^n par les "sommes de Riemann quadratiques" correspondantes est uniforme en n, au sens de la norme L^4 , donc en probabilité. Pour la martingale limite X , nous ne pouvons pas raisonner dans L^4 , mais les sommes de Riemann quadratiques approchent le crochet en probabilité, ce résultat étant vrai pour toute semimartingale.

Par ailleurs, X_t^n tend vers X_t p.s. pour presque tout t. Si nous prenons les t_i dans cet ensemble de convergence, pour toute subdivision fixée la somme de Riemann quadratique relative à X^n $\sum_i (X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)^2$ est proche de la somme relative à X. Finalement, $[X^n, X^n]_t$ *est proche en probabilité de* $[X,X]_t$.

Pour montrer que X satisfait à l'équation de structure, il faut encore vérifier que, pour tout t fixé, $\int_0^t f(X_{s-}^n)\,dX_s^n$ est proche en probabilité de $\int_0^t f(X_{s-})\,dX_s$. Nous procédons comme pour le crochet, et comparons l'intégrale stochastique à ses sommes de Riemann, d'abord pour une semimartingale générale Y

$$(3) \qquad \int_0^t f(Y_{s-})\,dY_s - \sum_i f(Y_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(Y_{s-}) - f(Y_{t_i}))\,dY_s$$

et nous essayons ici une majoration dans L^2

$$\|\cdots\|^2 = \mathbb{E}[\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(Y_{s-}) - f(Y_{t_i}))^2\,dB_s] \ .$$

Comme précédemment, nous devons remplacer Y, B par X^n, A^n et vérifier que les sommes de Riemann, lorsque la subdivision devient très fine, sont proches (en probabilité) de l'intégrale stochastique, ***uniformément en*** n . Si f était bornée et uniformément continue, la majoration précédente nous donnerait une proximité uniforme au sens L^2 , mais nous n'avons fait sur f aucune de ces hypothèses. Nous introduisons les temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t \ : \ |X_t^n| > N\}$$

où N est choisi assez grand pour que $\mathbb{Q}\{T_n \leq t\}$ soit très petit (ceci a lieu uniformément en n d'après l'inégalité de Doob, les martingales X^n ayant toutes le même crochet oblique). Chaque martingale X^n vérifiant une équation de structure (*cf.* (2)), on sait majorer le saut à l'instant T_n , et par conséquent majorer aussi la martingale Y^n obtenue par arrêt de X^n à l'instant T_n . Toutes ces martingales sont donc uniformément bornées, et on peut leur appliquer l'estimation (3) dans L^2 . Mais d'autre part, les sommes de Riemann et l'intégrale stochastique relatives à Y^n ne diffèrent des v.a. correspondantes relatives à X^n que sur des ensembles de probabilité très petite (uniformément en n), et finalement on a l'approximation uniforme en probabilité que l'on désirait. La fin de la démonstration se fait alors comme pour le crochet.

Bien entendu, ceci n'est qu'un exercice de style : nos martingales ont des crochets obliques également continus, donc la même démonstration marcherait en topologie de Skorohod, en utilisant les critères de tension classiques de Rebolledo, Aldous...— et on aurait l'avantage de pouvoir renvoyer à d'excellents ouvrages qui ne demandent qu'à trouver des lecteurs. Mais il me semble que la topologie de la convergence en mesure est plus élémentaire que la topologie de Skorohod, et qu'il est bon de l'utiliser aussi.

IRMA, Université Louis Pasteur

67084 Strasbourg Cedex, France