PAUL-ANDRÉ MEYER

Équations de structure des martingales et probabilités quantiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 139-141
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__139_0>

EQUATIONS DE STRUCTURE DES MARTINGALES ET PROBABILITÉS QUANTIQUES

par P.A. Meyer

Université Louis Pasteur, 67084–Strasbourg

Emery a découvert toute une nouvelle famille de martingales (X_t), de crochet oblique égal à t, et possédant la propriété de représentation chaotique (représentation au moyen d'intégrales stochastiques multiples). Ces martingales sont définies par une *équation de structure*, de la forme

$$d[X,X]_t = dt + \beta X_{t-} dX_t \; . \tag{1}$$

La présence dans ce volume de l'article d'Emery me dispense d'en dire davantage, et je vais me borner ici à présenter les liens entre ces martingales et le calcul stochastique quantique, qui ne sont pas du tout exposés dans l'article d'Emery. La note qui suit reprend des éléments de la propagande en faveur des résultats d'Emery que j'avais faite auprès des physiciens (et qui paraîtra dans le volume des Proceedings du congrès de Physique Mathématique de Swansea, Juillet 88). D'autre part, j'en profiterai pour parler des résultats de l'article non publié de K.R. Parthasarathy *Remarks on the quantum stochastic differential equation* $dX=(c-1)X\,d\Lambda + dQ$, parvenu à Strasbourg au Printemps 1988, et qui a joué un grand rôle dans les réflexions Strasbourgeoises sur les martingales d'Azéma.

Les relations avec les probabilités quantiques sont plus simples à présenter en temps discret, car il ne se pose alors aucun problème d'opérateurs non bornés. Nous considérons donc un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, un ensemble de temps fini $1,\dots,\nu$, et une famille finie de v.a. $x_0,\dots,x_\nu$ constituant une suite de différences de martingales : x_0 est une constante, et pour $k \geq 1$ on a $\mathbb{E}[x_k \,|\, x_0,\dots,x_{k-1}] = 0$. On peut se ramener à une situation canonique dans laquelle $\Omega=\mathbb{R}^\nu$, les x_i, $i>0$ étant les applications coordonnées. La condition qui correspond ici à l'hypothèse $<X,X>_t = t$ du temps continu s'écrit $\mathbb{E}[x_k^2 \,|\, x_0,\dots,x_{k-1}] = 1$. La propriété de représentation chaotique discrète dit que toute v.a. aléatoire $f \in L^2$ peut être développée en une somme finie

$$f = \sum_A \widehat{f}(A)\, x_A$$

où A parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties de $\{1,\dots,\nu\}$, et où l'on a posé $x_A = x_{i_1}\dots x_{i_n}$ lorsque $A=\{i_1<\dots<i_n\}$ (et $x_\emptyset = 1$). On a de plus $\|f\|^2 = \sum_A \|\widehat{f}_A\|^2$. Enfin, l'équation de structure s'écrit dans la situation discrète

$$x_k^2 = 1 + x_k P_k(x_1,\dots,x_{k-1}) \; , \tag{2}$$

où la propriété de représentation chaotique discrète nous permet de représenter P_k comme un polynôme $\sum_B p_B\, x_B$, la sommation portant sur les parties $B \subset \{1,\ldots,k-1\}$. Puisque toute v.a. est une combinaison linéaire des x_A , la multiplication des v.a. peut d'exprimer de manière algébrique par une table de multiplication donnant les produits $x_B\, x_A$ dans la base des x_A . Montrons comment cette table est déterminée par l'équation de structure. Tout d'abord, vu l'associativité, il suffit de savoir calculer les produits $x_k\, x_A$. Lorsque $k \notin A$ on a $x_k\, x_A = x_{A\cup\{k\}}$. Lorsque $k \in A$ le produit peut s'écrire (en utilisant la commutativité) $x_k^2\, x_{A\setminus\{k\}}$, et on exprime x_k^2 grâce à l'équation de structure. Cela remplace le facteur x_k par un facteur plus compliqué, mais antérieur à $k-1$, et une récurrence sur le temps permettra alors de parvenir à une expression complète de la table de multiplication.

Tout cela peut être récrit de la manière suivante : on a un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension finie, admettant la base orthonormale x_A , $A \in \mathcal{P}$ (c'est le "bébé Fock" de *Sém. Prob. XX*, p. 259). Sur cet espace, l'équation de structure permet de définir une table de multiplication d'algèbre associative et commutative, admettant le vecteur vide $x_\emptyset = 1$ comme élément neutre. Les opérateurs m_k de multiplication par x_k sont autoadjoints et commutent, et dans le langage des probabilités quantiques on peut les considérer comme des v.a. admettant une loi jointe, *i.e.* un processus stochastique. *La loi de ce processus dans l'état vide est précisément la loi de la martingale* (x_k).

Autrement dit, on a un moyen de passage de l'équation de structure à la loi de la martingale, au moyen des opérateurs de multiplication par les éléments x_k de la base. Nous allons mettre cela sous la forme d'une *équation différentielle stochastique quantique* (en temps discret).

Rappelons la définition des opérateurs de création, d'annihilation et de nombre sur le "bébé Fock"

$$\begin{aligned} a_i^+ x_A &= x_{A\cup\{i\}} \quad \text{si } i \in A,\ 0 \text{ sinon} \\ a_i^- x_A &= x_{A\setminus\{i\}} \quad \text{si } i \notin A,\ 0 \text{ sinon} \\ a_i^\circ x_A &= x_A \qquad\quad \text{si } i \in A,\ 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

L'opérateur de nombre a_i° au point i est souvent désigné par n_i, et la somme $a_i^+ + a_i^-$ par q_i. Soient m_k l'opérateur de multiplication par x_k, et m la *famille d'opérateurs* (m_k). Alors le calcul ci-dessus s'exprime de manière concise sous la forme

$$m_k = q_k + P_k(m)\, n_k \;. \tag{3}$$

qui se résout par récurrence sur k.

Il est immédiat de vérifier que les solutions de l'é. d. s. (3) existent, sont des opérateurs symétriques partout définis et bornés (donc autoadjoints) et qu'ils commutent. Leur "loi jointe" dans l'état vide constitue alors la solution de l'équation de structure. En temps continu, il est naturel de remplacer l'équation (3) par une équation différentielle stochastique quantique de la forme

$$dM_t = dQ_t + \Phi_t(M)\, dN_t \;. \tag{4}$$

En particulier on s'intéresse aux équations du type d'Azéma

$$dM_t = dQ_t + (c-1)\,X_t\,dN_t \tag{5}$$

(ceci est la notation de Parthasarathy; Emery pose $\beta = c-1$). Cette équation a été étudiée rigoureusement par Parthasarathy, qui a établi pour $-1 \le c \le 1$ (exactement le même domaine que par la méthode d'Emery) l'existence et l'unicité de la solution, qui est une famille commutative d'opérateurs autoadjoints (bornés, sauf pour $c=1$). Connaissant ces opérateurs, on peut les considérer comme des v.a. au sens des probabilités quantiques, et leur loi jointe dans l'état vide est la loi de la martingale d'Azéma cherchée. On obtient ainsi une méthode très rapide de construction des martingales d'Azéma dans le "bon" intervalle. L'article de Parthasarathy est aussi riche en résultats concrets sur les martingales d'Azéma dans l'intervalle $-1 \le c \le 1$ — par exemple, le calcul explicite des moments et de la fonction caractéristique des v.a. X_t, ainsi qu'une version de la "formule d'Ito" pour les martingales d'Azéma (retrouvée indépendamment par Emery).