SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
K. HAMZA

La propriété de représentation prévisible dans la filtration naturelle d'un ensemble régénératif

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 131-138
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__131_0>

LA PROPRIETE DE REPRESENTATION PREVISIBLE DANS LA FILTRATION NATURELLE D'UN ENSEMBLE REGENERATIF

par J. AZEMA et K. HAMZA

1. Notations et Rappels.

Les notations sont celles de [1]. Rappelons les plus importantes ; on notera :

- Ω l'espace canonique des fermés de $\mathbb{R}_+$ de mesure de Lebesgue nulle.
- $g_t(\omega) = \sup\{s \; ; \; s < t, \quad s \in \omega\}$ $\quad g_t^+(\omega) = \sup\{s \; ; \; s \leq t, \quad s \in \omega\}$

  $d_t(\omega) = \inf\{s \; ; \; s > t, \quad s \in \omega\}$
- $H = \{t,\omega \mid g_t^+(\omega) = t\}$
- $(\underline{\underline{F}}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ la filtration naturelle (rendue continue à droite et complétée) engendrée par le processus (g_t^+). H est alors un fermé aléatoire optionnel.
- G (resp. D) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à H.

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty)$; il existe

- Un processus croissant optionnel localement intégrable (ℓ_t) porté par H
- Un noyau optionnel $N(t,dx)$ vérifiant $\displaystyle\int_{]0,\infty]} (1-e^{-x})\, N_t(dx) = 1$

tels que l'on ait, pour tout processus (Z_t) optionnel borné et pour toute fonction φ borélienne bornée sur $\bar{\mathbb{R}}_+$

$$(1) \qquad E\Big[\sum_{s\in G} Z_s\, \varphi(d_s - s)\Big] = E\Big[\int_0^\infty Z_s\, N(s,\varphi)\, d\ell_s\Big].$$

On dira que (ℓ_t) est un temps local et (N_t) un noyau de Lévy pour H.

Quand H est régénératif le noyau de Lévy se réduit à une mesure $N(dx)$ qui n'est pas autre chose que la mesure de Lévy du subordinateur (σ_t) inverse de (ℓ_t). H est parfait si et seulement si N est de masse totale infinie, ce que nous supposerons dans la suite ; (ℓ_t) est alors continu.

Plaçons nous dans le cas régénératif et posons $\tilde{N}(x) = N]x,\infty]$; $\tilde{N}$ est décroissante continue à droite et peut s'annuler quand N est à support compact ; on notera $b = \inf\{x \; ; \; \tilde{N}(x) = 0\}$. On sait construire une sous- martingale locale admettant pour processus croissant le temps local (ℓ_t) ; rappelons de quoi il s'agit. Dans les cas usuels (en particulier quand la mesure de Lévy est diffuse) on posera simplement

$$Y_t = \frac{1}{\tilde{N}(t-g_t^+)} \qquad \mu_t = Y_t - \ell_t$$

et le théorème (9.9) de [1] nous assure que (μ_t) est une martingale locale. Dans le cas général, on introduit la partie prévisible contenue dans D

$$D_p = \{t \in D \mid t-g_t = b\}$$

qui est non évanescente si $N\{b\} = \tilde{N}_-(b) \neq 0$; on pose

$$\bar{Y}_t = Y_t + \sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} Y_{s-} \qquad\qquad \mu_t = \bar{Y}_t - \ell_t$$

et l'on sait que (μ_t) est une martingale locale. Nous nous proposons de montrer dans la suite que (μ_t) possède la propriété de représentation prévisible.

2. Nous commencerons par un résultat que nous énoncerons dans un cadre plus général ; dans ce paragraphe $(\underline{\underline{G}}_t)$ désigne une filtration vérifiant les conditions habituelles, H un fermé aléatoire contenant 0 ; on suppose que $(\underline{\underline{G}}_t)$ vérifie la propriété suivante.

(2) *Si T est un temps d'arrêt et Y une variable aléatoire $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable bornée, il existe un processus prévisible borné (Z_t) tel que*

$$Y\, 1_{\{g_T^+ < T\}} = Z_{g_T}\, 1_{\{g_T^+ < T\}} .$$

Sous ces hypothèses, nous allons voir qu'il n'existe pas de martingale locale non triviale s'annulant sur H ; plus précisément.

(3) <u>PROPOSITION</u> : *Soit σ un temps d'arrêt ; toute martingale locale s'annulant sur $H \cap [\![0,\sigma]\!]$ est nulle sur $[\![0,\sigma]\!]$.*

(4) <u>COROLLAIRE</u> : *Si σ est prévisible, toute martingale locale s'annulant sur $H \cap [\![0,\sigma[\![$ est nulle sur $[\![0,\sigma[\![$.*

<u>Démonstration</u> : Soit (ξ_t) est une martingale locale nulle sur $H_\sigma = H \cap [\![0,\sigma]\!]$; appelons $g_t^\sigma = \sup\{s < t \; ; \; s \in H_\sigma\}$ et (Z_t) un processus prévisible borné ; l'égalité $Z_{g_t^\sigma}\, \xi_{t\wedge\sigma} = Z_{g_{t\wedge\sigma}}\, \xi_{t\wedge\sigma}$ et la formule classique de balayage d'Azéma-Yor (Cf. [8]) montrent que $\left[Z_{g_{t\wedge\sigma}}\, \xi_{t\wedge\sigma}\right]$ est une martingale locale

s'annulant à l'origine ; de plus, un temps d'arrêt S réduisant (ξ_t) réduit également cette martingale locale, de sorte qu'on peut écrire

$$E\left[Z_{g_{t\wedge\sigma\wedge S}}\ \xi_{g_{t\wedge\sigma\wedge S}}\right] = 0.$$

Désignons alors par Y une variable aléatoire bornée $\underline{\underline{G}}_{t\wedge\sigma\wedge S}$-mesurable et par (Z_t) un processus prévisible borné qui lui est associé par l'hypothèse *(2)* ; on peut écrire

$$E\left[\xi_{t\wedge\sigma\wedge S}\ Y\right] = E\left[\xi_{t\wedge\sigma\wedge S}\ Z_{g_{t\wedge\sigma\wedge S}}\right] = 0,$$

ce qui entraîne $\xi_{t\wedge\sigma\wedge S} = 0$ p.s. ; le résultat en découle facilement.

3. Dans ce paragraphe, nous allons introduire une classe de martingales locales qui nous seront utiles ; les hypothèses seront les suivantes dans le cadre du paragraphe 1. P sera une probabilité (non nécessairement régénérative) sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty)$. Nous supposerons que G évite les temps d'arrêt ce qui, nous le savons, (Cf. [1]), entraîne la continuité du temps local ainsi que la propriété suivante du noyau de Lévy : pour presque tout ω, quelque soit t appartenant à $G(\omega)$, on a $N(t,\omega,\bar{\mathbb{R}}_+^*) = \infty$.

Quitte à remplacer (N_t) par sa projection prévisible, on peut supposer le noyau de Lévy prévisible, si bien que le processus paramétré $\tilde{N}(t,x)=N(t,]x,\infty])$ sera prévisible, ainsi que le processus $b_t = \inf\{x\ ;\ \tilde{N}(t,x) = 0\}$. Nous adopterons les notations suivantes :

$$D_p = \left\{(t,\omega) \in D \mid t-g_t(\omega) = b_{g_t}(\omega)\right\}.$$

Si φ est un processus paramétré prévisible ≥ 0, on posera

$$U\varphi(t,x) = \frac{1}{\tilde{N}(t,x)} \int_{]x,\infty]} \varphi(t,y)\ N(t,dy)\ ;\ U_t\varphi = U\varphi(g_t^+, t-g_t^+)\ 1_{H^c}(t)$$

$$W\varphi(t,x) = \frac{1}{\tilde{N}(t,x)} \int_{]0,x]} \varphi(t,y)\ N(t,dy)\ ;\ W_t\varphi = W\varphi(g_t^+, t-g_t^+)\ 1_{H^c}(t).$$

$\mathcal{N}_{loc}$ désignera l'ensemble des processus paramétrés prévisibles tels que

$\int_0^\infty \varphi(t,y)\ N(t,dy)$ (que l'on notera aussi $N(t,\varphi)$) définisse un processus localement borné (nécessairement prévisible).

Il résulte facilement de la formule *(1)* (Cf. [7]) que le processus

$$\Gamma_t^{\varphi} = \sum_{\substack{s\in D \\ s\leq t}} \varphi(g_s, s-g_s) + U_t\varphi - \int_0^t N(s,\varphi)d\ell_s$$

est une martingale locale, quelque soit φ dans $\mathcal{N}_{loc}$.

Rappelons enfin la définition de la sous-martingale d'équilibre $(\bar{Y}_t)$ de H :

on pose $Y_t = \dfrac{1}{\tilde{N}(g_t^+, t-g_t^+)} 1_{H^c}(t)$, $\bar{Y}_t = Y_t + \sum\limits_{\substack{s\leq t \\ s\in D_p}} Y_{s-}$ et l'on sait que

$\mu_t = \bar{Y}_t - \ell_t$ est une martingale locale.

(5) <u>PROPOSITION</u> *: Soit φ un processus paramétré de $\mathcal{N}_{loc}$; le processus*

$$\Lambda_t^{\varphi} = \sum_{\substack{s\leq t \\ s\in D-D_p}} \varphi(g_s, s-g_s) - W_t\varphi - \sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} W_{s-}\varphi$$

est une martingale locale appartenant au sous-espace stable engendré par (μ_t).

<u>Démonstration</u> : Appliquant la formule du balayage au processus prévisible $(N(g_t,\varphi))$ et à la semi-martingale (Y_t), on obtient

$$N(g_t^+,\varphi)Y_t = N(g_t,\varphi)Y_t = \int_0^t N(g_s,\varphi)dY_s(d\mu_s+d\ell_s) - \sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} N(g_s,\varphi)Y_{s-} .$$

Eliminons le temps local en faisant intervenir Γ_t^{φ} : il vient

$$\Gamma_t^{\varphi} - \int_0^t N(g_s,\varphi)d\mu_s = \sum_{\substack{s\in D \\ s\leq t}} \varphi(g_s, s-g_s) - W_t\varphi - \sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} N(g_s,\varphi) \frac{1}{N(g_s, \{b_{g_s}\})}.$$

Le dernier terme du second membre peut encore s'écrire

$$\sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} (\varphi(s-g_s) + W_{s-}\varphi) \quad \text{d'où l'égalité} \quad \Lambda_t^{\varphi} = \Gamma_t^{\varphi} - \int_0^t N(g_s,\varphi)d\mu_s.$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que (Λ_t^{φ}) est purement discontinue, et que ses sauts ne peuvent se produire qu'aux instants de sauts de (μ_t) (en particulier elle ne saute pas en D_p).

Nous terminerons ce paragraphe par deux petits résultats techniques

(6) <u>PROPOSITION</u> *: Soit φ un processus paramétré optionnel satisfaisant aux*

conditions suivantes :

a) $\forall t,\ t \longrightarrow \varphi(t,x)$ *est continue à droite*

b) $(\varphi(g_t^+, t-g_t^+))_{t\geq 0}$ *est un processus évanescent.*

Alors, pour presque tout ω, $\varphi(t,y) = 0$ *quelque soit* t *dans* G *et* $y < b_t$.

Démonstration : Soit T un temps d'arrêt tel que $[\![T]\!] \subset H^c$; montrons d'abord

que $P\left[\varphi(g_T^+,y) \neq 0 \ ;\ y < b_{g_T} \ ;\ T < \infty\right] = 0$ quelque soit $y \geq 0$.

Pour cela, notons Γ l'événement de $\underline{\underline{F}}_T$ figurant à l'intérieur du crochet et calculons

$$(7) \qquad P[d_T - g_T^+ > y \ ;\ \Gamma] = E\left[\frac{\tilde{N}(g_T^+, (T-g_T^+) \vee y)}{\tilde{N}(g_t^+, T-g_T^+)} \ ;\ \Gamma\right].$$

Appelant S la variable aléatoire $g_T^+ + y$, on a l'égalité $\varphi(g_T^+,y)=\varphi(g_S^+,S-g_S^+)$ sur l'événement $\{d_T - g_T^+ > y\}$ de sorte que le premier membre de *(7)* est nul ; au second membre, on remarque que la variable aléatoire $\tilde{N}(g_T^+,(T-g_T^+)\vee y)$ est strictement positive sur Γ, ce qui entraîne $P(\Gamma) = 0$. On applique alors ce qui vient d'être montré aux temps d'arrêt T_k^n définis par récurrence par $T_k^o = \inf\{t \ ;\ t-g_t^+ \geq \frac{1}{k}\}$ .... $T_k^{n+1} = \inf\{t > d_{T_k^n} \ ;\ t-g_t^+ \geq \frac{1}{k}\}$

et l'on montre que

$$P[\exists t \in G \ ;\ \varphi(t,g) \neq 0,\ y < b_t] = 0 \quad \text{quelque soit} \quad y \geq 0.$$

Il suffit alors pour obtenir le résultat de faire décrire à y l'ensemble $\mathbb{Q}_+$ puis d'utiliser la continuité à droite en x de φ.

(7) <u>*PROPOSITION*</u> *: Soit* P' *une probabilité équivalente à* P *; on peut affirmer (avec des notations évidentes) que les processus* $b_{g_t^+} 1_{\{g_t^+ < t\}}$ *et* $b'_{g_t^+} 1_{\{g_t^+ < t\}}$ *sont indistingables ; en particulier* D_p *et* D'_p *sont indistingables.*

Démonstration : Soit T un temps d'arrêt tel que $[\![T]\!] \subset H^c$; on aura

$$P\left[d_T-g_T^+>b_{g_T^+} \ ;\ T<\infty\right] = 0 = P'\left[d_T-g_T^+>b_{g_T^+} \ ;\ T<\infty\right] = E'\left[T < \infty \ ;\frac{\tilde{N}'\left(g_T^+, b_{g_T^+}\right)}{\tilde{N}(g_T^+, T-g_T^+)}\right].$$

Cela entraîne $\tilde{N}'\left[g_T^+, b_{g_T^+}\right] = 0$ p.s. sur $\{T < \infty\}$; on a donc, sur ce même événement, $b_{g_T^+} \geq b'_{g_T^+}$, l'inégalité inverse s'obtenant en échangeant les rôles de P et P'.

4. La propriété de représentation prévisible pour un ensemble régénératif.

Dans ce paragraphe Ω est muni d'une probabilité P sous laquelle H est régénératif ; on supposera que N est de masse totale infinie.

(8) THEOREME : *Soit (M_t) une martingale locale respectivement à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$; il existe un processus (Z_t) prévisible unique tel que*

a) $\left(\int_0^t Z_s^2 \, d[\mu,\mu]_s\right)^{1/2}$ *définisse un processus croissant localement intégrable*

b) $M_t = M_o + \int_0^t Z_s \, d\mu_s$.

Démonstration : Nous utiliserons la méthode inaugurée par Dellacherie dans les cas Brownien et Poissonien. Tout revient à montrer ([5] corollaire 4.12) que toute martingale bornée (M_t) orthogonale à (μ_t) est constante ; on peut même se limiter aux martingales minorées par un réel > 0 ; les probabilités P et $P' = M_\infty P$ sont alors équivalentes : il s'agit de montrer que P' = P ; pour cela, nous établirons que, sous P', H admet encore N comme noyau de Lévy ([1] (8.1) et (8.3)).

Soit $h \in \mathcal{N}_{loc} \cap \mathcal{N}'_{loc}$; (Λ_t^h), qui est une martingale locale sous P, l'est aussi sous P' d'après le théorème de Girsanov, si bien que

$\Lambda_t^h - \Lambda_t'^h = W_t'h - W_th + \sum_{\substack{s\in D_p \\ s\leq t}} W_{s-}h - W'_{s-}h$ est une martingale sous P'.

Désignons par $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ la suite des débuts successifs de l'ensemble aléatoire prévisible discret D_p ; $(\Lambda_t^h - \Lambda_t'^h)$ est nulle sur $H \cap [\![0,\sigma_1[\![$; d'après *(4)* elle est nulle sur $[\![0,\sigma_1[\![$; mais elle ne saute pas en σ_1 et est par conséquent nulle sur $H \cap [\![0,\sigma_2[\![$ etc...

On montre ainsi de proche en proche que $W_th = W_t'h$. Utilisant maintenant la proposition *(6)*, il en résulte que $Wh(t,x) = W'h(t,x)$ quelque soit $t \in G$ et $x < b_t$; il ne reste plus qu'à choisir convenablement h. Si φ est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$, nous poserons :

$$a_t^n = \inf\{x \; ; \; \tilde{N}'(t,x) \le n\} \qquad h_{n,p}(t,x) = 1_{\{x > a_t^n\}} \, 1_{\{a_t^n \ge \frac{1}{p}\}} \, \varphi(x).$$

On vérifie sans peine que $h_{n,p} \in \mathcal{N}_{loc} \cap \mathcal{N}'_{loc}$; on a ainsi établi que $\forall t \in G$, $\forall x < b_t$

$$\frac{1}{\tilde{N}(x)} 1_{\{a_t^n \ge \frac{1}{p}\}} \int_{a_t^n}^{x} \varphi(y)\, N(dy) = \frac{1}{\tilde{N}'(t,x)} 1_{\{a_t^n \ge \frac{1}{p}\}} \int_{a_t^n}^{x} \varphi(y)\, N'(t,dy)$$

Faisant tendre p puis n vers l'infini, on en déduit facilement que les mesures $\frac{N(dy)}{\tilde{N}(x)}$ et $\frac{N'(t,dy)}{\tilde{N}'(t,x)}$ coïncident sur $[0,x]$ dès que $x < b$. Quelque soit $t \in G$, $N'(t,dy)$ est donc proportionnelle à N ; mais, les deux mesures étant normalisées, $N'(t,dy) = N(dy)$ quelque soit $t \in G$.

Appelons alors Γ l'ensemble aléatoire $\{(s,\omega) \mid N_s(\varphi)(\omega) = N(\varphi)\}$; on a quelque soit le processus (Z_t) optionnel borné

$$E'\Big[\sum_{s \in G} Z_s \, \varphi(d_s - s)\Big] = E'\Big[\sum_{s \in G} Z_s \, 1_\Gamma(s) \, \varphi(d_s - s)\Big]$$

$$= E'\Big[\int_0^\infty Z_s \, 1_\Gamma(s) \, d\ell'_s \, N'(s,\varphi)\Big] = N(\varphi) \, E'\Big[\int_0^\infty Z_s \, d\ell'_s\Big]$$

ce qui termine la démonstration.

(9) <u>Remarque</u> : Le théorème [6] de Jacod et Mémin permettrait d'arriver beaucoup plus vite à la conclusion. D'une manière plus générale, si l'on sait montrer que toute martingale (M_t) de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ est puremnt discontinue, l'étude faite en [1] sur l'accessibilité des temps d'arrêt permet d'affirmer que tout temps de saut de (M_t) est un temps de saut de (μ_t).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **AZEMA** : *Sur les fermés aléatoires. Séminaire de Probabilités XIX, L.N. 1123, 1985. Springer.*

[2] **AZEMA-YOR** : *Etude d'une martingale remarquable. (Dans ce volume).*

[3] **EMERY** : *On the Azéma martingales. (Dans ce volume).*

[4] **HAMZA** : *Thèse de 3ème cycle. A paraître.*

[5] **JACOD** : *Calcul stochastique et problèmes de martingales. L.N. 714, Springer (1979).*

[6] **JACOD-MEMIN** : *Un théorème de représentation de martingales pour les ensembles régénératifs. Séminaire de Probabilités X. L.N. 511. Springer (1976).*

[7] **MEYER-STRICKER-YOR** : *Sur une formule de la théorie du balayage. Séminaire de Probabilité XIII. L.N. 721. Springer 1979.*

Jacques AZEMA
Kaïs HAMZA
Laboratoire de Probabilités
Unité associé au C.N.R.S. 224
4, place Jussieu - Tour. 56
75252 PARIS CEDEX 05