

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YAO-ZHONG HU

## Un nouvel exemple de distribution de Hida

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 82-84

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1988\\_\\_22\\_\\_82\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__82_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN NOUVEL EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE HIDA

par Yao-Zhong HU

Math. Research Institute, Academia Sinica, Wuhan ( Chine )

Dans l'article de Meyer-Yan [2], on explique comment les distributions de Hida permettent formellement d'écrire les densités, par rapport à la mesure de Wiener, de mesures qui ne sont pas absolument continues. Les exemples connus de cette situation sont la "fonction  $\delta$  de Donsker" qui représente formellement la densité du pont brownien, et la distribution qui représente la densité de la mesure de Wiener  $P_0$  du mouvement brownien  $\alpha X_t$ . Ces deux distributions ont été étudiées par Hida.

Dans le cas de la mesure  $P_0$ , l'article Hu-Meyer [1] donne des détails supplémentaires : on explique comment à une fonctionnelle de Wiener  $f$  suffisamment régulière, donnée par son développement en chaos de Wiener, on peut associer une fonctionnelle  $f^\sigma$  du mouvement brownien  $\alpha X_t$ , qui est en un certain sens "la même fonctionnelle". Alors la distribution de Hida sur l'espace de Wiener est la forme linéaire  $f \mapsto f_0^\sigma$  ( le terme constant dans le développement de  $f^\sigma$  ). La régularité imposée à  $f$  concerne l'existence de traces des fonctions  $f_n(s_1, \dots, s_n)$  du développement de Wiener de  $f$ . Nous renvoyons le lecteur à l'article [1], qui figure dans le même volume du séminaire.

Dans cette note, nous allons remplacer la mesure  $P_0$  par la mesure  $P^x$  du mouvement brownien standard issu du point  $x \neq 0$ . La discussion est plus simple que celle de  $P_0$ . Elle est intéressante, parce qu'elle montre l'intérêt de considérer aussi des distributions portées par l'origine des coordonnées ( cas exclu dans l'article [2] de Meyer-Yan ).

1. Soit  $f$  une fonctionnelle de Wiener, donnée par son développement

$$(1) \quad f = \sum_n \frac{1}{n!} I_n(f_n)$$

où  $f_n(s_1, \dots, s_n)$  est une fonction symétrique de  $n$  variables  $s_i > 0$ , appartenant à  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ . L'hypothèse de régularité que nous ferons sur les  $f_n$  est la possibilité de prendre les valeurs en 0 successives

$$\begin{aligned} Tf_n(s_1, \dots, s_{n-1}) &= f_n(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) \\ T^2 f_n(s_1, \dots, s_{n-2}) &= Tf_n(s_1, \dots, s_{n-2}, 0) \dots \end{aligned}$$

de manière naturelle ( les fonctions  $f_n$  sont en réalité des classes ), de telle sorte que  $Tf_n, T^2 f_n \dots$  appartiennent à  $L^2$ . Il suffit par exemple que  $f_n$  soit continue bornée à support compact, pour tout  $n$ .

Signalons une variante de la définition (1), qui sera utile plus loin, celle où les fonctions  $f_n$  ne sont pas supposées symétriques ; on convient alors que  $I_n(f_n)$  est égale à  $I_n(f_n^S)$ , la symétrisée de  $f_n$ , et on pose

$$Tf_n(s_1, \dots, s_{n-1}) = \frac{1}{n} f_n(0, s_1, \dots, s_{n-1}) + \dots + \frac{1}{n} f_n(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) .$$

Comme dans le cas de  $P_G$ , nous allons associer à la fonctionnelle  $f$  une fonctionnelle  $f^X$  du mouvement brownien issu de  $x$ , possédant les propriétés suivantes : 1) si  $f$  est la coordonnée  $X_t$ ,  $f^X$  est la même application coordonnée, qui se lit  $x + X_t$ . Notant que  $X_t$  est l'intégrale stochastique  $\int_0^t (s) dX_s$ , on voit que l'extension naturelle au premier chaos est

$$(2) \text{ si } f = \int_0^t h_s dX_s = I_1(h) , \quad f^X \text{ vaut } xh(0) + \int_0^t h_s dX_s = xh(0) + I_1^X(h)$$

où la notation  $I_1^X$  rappelle qu'il s'agit d'une fonctionnelle du mouvement brownien issu de  $x$ . 2) On exige que cette extension soit multiplicative.

Pour trouver la forme de l'extension, nous considérons la fonctionnelle  $f = \exp(\lambda \int_0^t h_s dX_s - \frac{1}{2} \|h\|^2 \lambda^2)$ , dont le développement suivant les chaos est  $\sum_n \frac{1}{n!} I_n(h^{\otimes n})$ . D'après la multiplicativité, on a  $f^X = e^{\lambda x h(0)} e$

$$f^X = e^{\lambda x h(0)} \exp(\lambda \int_0^t h_s dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \|h\|^2)$$

d'où en développant en série et en identifiant les coefficients

$$\text{si } f = I_n(h^{\otimes n}) , \quad f^X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k I_{n-k}^X(h(0)^k h^{\otimes n-k})$$

ce qui suggère la formule

$$(3) \quad \text{si } f = I_n(f_n) , \text{ on a } f^X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k I_{n-k}^X(T^k f_n) .$$

Il faut maintenant vérifier que cette formule est effectivement multiplicative, c'est à dire que

$$(I_n(f_n) I_p(g_p))^X = I_n(f_n)^X \cdot I_p(g_p)^X .$$

Il y a pour cela deux méthodes. La première consiste en une vérification combinatoire directe, analogue à celle de l'article de Hu-Meyer pour  $P_G$ . Comme dans cet article, il est avantageux alors de travailler sur des intégrales multiples de fonctions non symétriques, et d'écrire alors la formule (3) sous la forme

$$(4) \quad \text{si } f = I_n(f_n) , \text{ on a } f^X = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} x^{|A|} I_{n-|A|}^X(T_A f_n)$$

où  $|A|$  est le nombre d'éléments de  $A$ , et  $T_A f_n$  est la fonction (non symétrique) obtenue en égalant à 0 les variables  $s_i$ ,  $i \in A$ . Après quoi, on applique la formule de multiplication des intégrales stochastiques pour des fonctions non symétriques. Nous utiliserons plutôt une autre méthode.

L'identité à établir s'écrit

$$\begin{aligned} (I_n(f_n)I_p(g_p))^x &= \sum_{\substack{k \leq n \wedge p \\ i \leq n+p-2k}} k! \binom{n}{k} \binom{p}{k} \binom{n+p-2k}{i} x^i I_{n+p-2k-i}^x (T^i(f_n \circ_k g_p)) \\ &= I_n(f_n)^x I_p(g_p)^x = \sum_{\substack{r \leq n, s \leq p \\ t \leq (n-r) \wedge (p-s)}} t! \binom{n}{r} \binom{p}{s} \binom{n-r}{t} \binom{p-s}{t} x^{r+s} I_{n-r+p-s-2t}^x ((T^r f_n) \circ_s (T^s g_p)) \end{aligned}$$

ou le symbole  $\circ_j$  désigne un produit symétrique contracté  $j$  fois.

Identifiant les coefficients des puissances de  $x$  et les intégrales stochastiques de même ordre, cela devient, pour  $i \leq n \wedge p$  et  $k \leq (n+p-i)/2$

$$k! \binom{n}{k} \binom{p}{k} \binom{n+p-2k}{i} T^i(f_n \circ_k g_p) = \sum_{\substack{r+s=i \\ (n-r) \wedge (p-s) \geq k}} k! \binom{n}{r} \binom{p}{s} \binom{n-p}{k} \binom{n-s}{k} T^r f_n \circ_k T^s g_p$$

Il s'agit maintenant d'une égalité entre fonctions sur  $\mathbb{R}_+^{n+p-2k}$ , qui se ramène ( pour chaque point de cet espace ) à une égalité entre mesures positives à support fini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , que l'on peut se borner à vérifier lorsque  $f_n$  est de la forme  $f^{\otimes n}$  et  $g_p$  de la forme  $g^{\otimes p}$ . Il suffit alors d'établir

$$\sum_{n,p} \frac{\lambda^n \mu^p}{n! p!} I_n(f^{\otimes n})^x I_p(g^{\otimes p})^x = \sum_{n,p} \frac{\lambda^n \mu^p}{n! p!} (I_n(f^{\otimes n}) I_p(g^{\otimes p}))^x$$

et l'on est ramené à une vérification immédiate sur les exponentielles stochastiques. Cette méthode très simple aurait pu être employée aussi pour les mesures  $P_\sigma$ .

2. Nous allons maintenant ( comme nous l'avons fait dans [1] ) récrire

la formule principale de manière plus simple. Au lieu de travailler sur  $I_n(f_n)$ , travaillons sur l'intégrale stochastique  $J_n(f_n) = I_n(f_n)/n!$  sur le simplexe croissant. La formule (3) devient alors

$$J_n(f_n)^x = \sum_k \frac{x^k}{k!} J_{n-k}^x (T^k f_n) \quad (T^k f_n = 0 \text{ pour } k > n)$$

qui peut s'écrire sans référence à un  $n$  particulier

$$(6) \quad J(f)^x = J^x(e^{xT} f) \quad (f \text{ est la suite des } f_n).$$

Cette formule peut elle même se généraliser en une formule faisant passer, non plus de 0 à  $x$ , mais de  $u$  à  $v$  :

$$(7) \quad (J^u(f))^v = J^v(e^{(v-u)T} f)$$

et il est alors facile de la combiner avec la formule du même type de [1] pour décrire l'effet des translations et des dilatations.

[1]. HU (Y.Z.) et MEYER (P.A.). Chaos de Wiener et intégrale de Feynman ( dans ce volume ).

[2]. MEYER (P.A.) et YAN (J.A.). A propos des distributions sur l'espace de Wiener. Sém. Prob. XXI, LN. 1247, p. 8-26.