Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Y. Z. Hu
Paul-André Meyer

Chaos de Wiener et intégrale de Feynman

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 51-71
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__51_0>

CHAOS DE WIENER ET INTEGRALE DE FEYNMAN

par Y.Z. Hu et P.A. Meyer

Ce travail est la suite de l'article de Meyer et Yan [14], paru dans le volume précédent de ce séminaire, et consacré à la théorie des distributions sur l'espace de Wiener, au sens de Hida. Mais notre but ici est assez différent : nous exposons dans le langage des chaos de Wiener divers résultats classiques sur l'intégrale de Feynman, et d'autre part nous essayons de clarifier divers points d'analyse de Wiener liés à la définition de cette intégrale. Pour la commodité du lecteur, nous avons rappelé les définitions de [14] qui nous sont indispensables. Nous nous sommes limités à la dimension 1 pour alléger les notations.

I. INTRODUCTION

1. Soit C l'espace de toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles à l'instant 0 ; on désigne par B_t l'application coordonnée d'indice t, et par P la mesure de Wiener sur C (sous laquelle les processus B_t et B_t^2-t sont des martingales nulles en 0). Cette mesure est portée par une toute petite partie de C : suivant l'idée de McKean, il est bon de se la représenter intuitivement comme une « répartition uniforme » sur la « sphère Ω de dimension infinie » définie par les relations quadratiques (t>0 dyadique)

$$[B,B]_t = t \quad \text{où } [B,B]_t = \lim_n \Sigma_{k<2^n} (B_{(k+1)2^{-n}t}-B_{k2^{-n}t})^2 .$$

On désigne par P_{σ^2} la mesure image de P par la dilatation de rapport σ : elle est portée par une « sphère » Ω_σ disjointe de Ω.

Soit f une fonctionnelle de Wiener (réelle ou complexe) appartenant à $L^2(P)$; nous écrirons son développement suivant les chaos de Wiener

$$(1)\qquad f = \Sigma_n \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}_+^n} f_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_1}\ldots dB_{s_n} = \Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(f_n)$$

où f_n est une fonction symétrique appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Un exemple fondamental de telles fonctionnelles est constitué par les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(\xi)$ associés aux éléments (réels ou complexes) ξ de l'espace de Hilbert $H=L^2(\mathbb{R}_+)$. On en connaît d'une part l'expression explicite, et d'autre part le développement suivant les chaos de Wiener

(2) $$\varepsilon(\xi) = \exp(\tilde{\xi} - \tfrac{1}{2}(\xi|\xi)) = \Sigma_n \tfrac{1}{n!}I_n(\xi^{\otimes n}) .$$

Ici et dans la suite, $\tilde{\xi}$ désigne l'intégrale stochastique $I_1(\xi)=\int\xi_s dB_s$ (et $\xi^{\otimes n}$ est la fonction $\xi(s_1)\ldots\xi(s_n)$ sur $\mathbb{R}_+^n$).

2. Nous allons nous occuper du problème suivant : soit f une fonctionnelle définie sur C ; définir l'<u>intégrale de Feynman</u> de f suppose que l'on forme l'intégrale $E_{\sigma^2}[f]$ par rapport à la mesure P_{σ^2} , puis que l'on fasse un prolongement analytique jusqu'à la valeur $\sigma^2=-i$. Ce problème est mal posé : la mesure P_{σ^2} étant portée par Ω_σ, et les sphères Ω_σ étant disjointes, on peut se donner de façon presque arbitraire une fonction f_σ sur Ω_σ et recoller ces fonctions en une fonctionnelle f sur C (nous avons dit presque arbitraire, parce qu'il y a des restrictions de mesurabilité). Notre travail dans ce paragraphe va consister à donner un sens précis à ces prolongements de la <<sphère unité>> à une autre <<sphère>>.

Nous partirons de l'idée de Hida, exposée dans [8], suivant laquelle la mesure P_{σ^2} peut être considérée comme une <u>distribution</u> sur l'espace de Wiener Ω, c. à d. une forme linéaire définie seulement sur un espace de fonctionnelles de Wiener $f = \Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(f_n)$ pour lesquelles les fonctions f_n sont suffisamment <u>régulières</u>. Cette régularité peut s'entendre en des sens différents.

1) Soit D_h ($h\in H$) l'opérateur de dérivation suivant $\int_0^\cdot h_s ds$. On a

(3) $$D_h I_n(f_n) = nI_{n-1}(h\cdot f_n)$$

où $h\cdot f_n(s_1,\ldots,s_{n-1}) = \int f_n(s_1,\ldots,s_n)h(s_n)ds_n$; D_h est un opérateur borné du n-ième chaos de Wiener dans le n-1-ième ; sur $L^2(P)$ il est fermable et l'on a

(4) $$D_h\varepsilon(\xi) = (h|\xi)\varepsilon(\xi) .$$

2) La <u>trace</u> de f_n est la fonction symétrique de n-2 variables définie formellement par

(5) $$\mathrm{Tr}f_n(s_1,\ldots,s_{n-2}) = \int f_n(s_1,\ldots,s_{n-2},s,s)ds .$$

En principe f_n est une classe de fonctions, et n'a donc pas de restriction à la diagonale $\{s_{n-1}=s_n\}$, qui est de mesure nulle. Il existe deux manières différentes de donner un sens à (5)

- en supposant que f_n possède de la régularité topologique (continuité, appartenance à un espace de Sobolev convenable) ;
- en se plaçant au sens hilbertien : pour toute base orthonormale (h_i) de H, la série $\Sigma_i\, h_i\cdot(h_i\cdot f_n)$ converge dans L^2, vers une limite indépendante de la base utilisée, et que l'on note alors $\mathrm{Tr}f_n$.

L'exemple fondamental de trace itérée est donné par :

(6) $$\mathrm{Tr}^k(\xi^{\otimes n}) = (\xi|\xi)^k \xi^{\otimes n-2k}$$

L'opérateur Tr de $L^2_s(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2_s(\mathbb{R}^{n-2}_+)$ admet un domaine dense, mais n'est pas fermable.

La définition proposée dans [14] est alors la suivante : on suppose que $f=\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(f_n)$ est une fonctionnelle de Wiener suffisamment régulière (en particulier, chaque f_n devra posséder des traces d'ordre k pour $k\leq n/2$) et l'on pose (si la série converge)

(7) $$E_\sigma\,[f] = \Sigma_k \frac{(\sigma^2-1)^k}{2^k\,k!}\,\mathrm{Tr}^k(f_{2k}) \quad (1)$$

Pour voir que cette formule est raisonnable, prenons $f=\mathcal{E}(\xi)$; la formule (7) nous donne la valeur $\exp(\frac{\sigma^2-1}{2}(\xi|\xi))$. Or ceci est bien l'espérance sous P_σ de $\exp(\int\xi_s dB_s - \frac{1}{2}(\xi|\xi))$, qui est l'expression explicite de $\mathcal{E}(\xi)$. Cette expression a un sens aussi pour $\sigma=0$, et définit alors la << valeur en 0 >> de la fonctionnelle f, le développement (7) étant analogue au développement de la fonction δ en série de polynômes d'Hermite.

3. Nous nous proposons ici, non seulement de définir $E_{\sigma^2}[f]$, mais de définir (pour f suffisamment régulière) une fonctionnelle f_σ sur Ω_σ qui sera, en un sens raisonnable, << la même fonctionnelle >> que f , de telle sorte que (7) soit simplement l'espérance de f_σ sous P_{σ^2} . Voici les conditions qui nous guideront

1) Si $f=B_t$, $f_\sigma=B_t$ (considérée comme fonction sur Ω_σ) . Plus généralement, cela s'appliquera à toute fonctionnelle linéaire $\tilde{\xi}$ (2) .

2) L'application $f\mapsto f_\sigma$ est un homomorphisme d'algèbre. En particulier, à un polynôme $F(B_{t_1},\dots,B_{t_k})$ en les coordonnées, on associera le même polynôme (ce qui est une façon raisonnable d'exprimer que l'on garde la même expression pour f et f_σ).

Dans ces conditions, si $f=\mathcal{E}(\xi)=\exp(\tilde{\xi}-\frac{1}{2}(\xi|\xi))$, on aura $f_\sigma=\exp(\tilde{\xi}-\frac{1}{2}(\xi|\xi)) = \exp(\frac{\sigma^2-1}{2}(\xi|\xi))\mathcal{E}_\sigma(\xi)$. Remplaçant ξ par $t\xi$ et développant en série, on voit que

$$\text{si } f = I_n(\xi^{\otimes n}) \ , \quad f_\sigma = \Sigma_{k\leq n/2} \frac{n!(\sigma^2-1)^k}{(n-2k)!k!2^k}(\xi|\xi)^k I^\sigma_{n-2k}(\xi^{\otimes n-2k})$$

Cela suggère la définition générale des "prolongements"

(8) $$\text{si } f=I_n(f_n) \ , \quad f_\sigma = \Sigma_{k\leq n/2} \frac{n!(\sigma^2-1)^k}{(n-2k)!k!2^k}\, I^\sigma_{n-2k}(\mathrm{Tr}^k f_n) \ .$$

En particulier, on peut retrouver (7) en remarquant que l'espérance du côté droit sous P_σ est simplement le terme d'ordre 0, et n'est $\neq 0$ que si n=2k.

Ces expressions ont en particulier un sens pour $\sigma=0$: la << sphère >> Ω_0 est identifiée à l'espace de Cameron-Martin (espace des fonctions continues, nulles en 0, dont la dérivée appartient à $H=L^2(\mathbb{R}_+)$), et l'on a

1. Il faut rectifier la formule (37) de [14] en supprimant la condition $s_1<\dots<s_n$. 2. Nous revenons là dessus dans la suite.

(9) $$I_n^0(f_n) = h \longmapsto \int f_n(s_1,\ldots,s_n)\dot{h}_{s_1}\ldots\dot{h}_{s_n}ds_1\ldots ds_n$$

(h est une fonction de Cameron-Martin, $\dot{h}$ est sa dérivée).

Pour dire ce qu'est une << même v.a. sur les différentes sphères >> il est peut être plus naturel de partir de la restriction à Ω_0 que de la restriction à Ω : le prolongement à Ω_σ de $\exp(\int \xi_s dB_s)=\exp(\int \xi_s \dot{h}_s ds)$ sur Ω_0 est $\exp(\frac{\sigma^2}{2}(\xi|\xi))\mathcal{E}_\sigma(\xi)$, d'où l'on déduit

(10) si $g_0=I_n^0(f_n)$, $g_\sigma = \Sigma_{k\leq n/2} \frac{n!\,\sigma^{2k}}{(n-2k)!k!2^k} I^\sigma_{n-2k}(Tr^k f_n)$

4. Cette section a pour but de mettre en garde contre des confusions possibles (et que nous avons commises nous mêmes). Nous avons d'après la formule (3)

$$\Sigma_i D_{h_i}D_{h_i}I_n(f_n) = n(n-1)I_{n-2}(Trf_n) \quad .$$

Or D_h est l'opérateur de dérivation suivant la fonction de Cameron-Martin $\int_0^\cdot h(s)ds$; on est donc tenté d'interpréter le côté gauche comme un laplacien $\Delta(I_n(f_n))$ (du point de vue probabiliste, $\frac{1}{2}\Delta$ est le générateur du mouvement brownien sur C). Mais ce raisonnement est manifestement faux, car la formule (3) n'a utilisé que des calculs faits sur l'espace de Wiener, qui est une << sphère >> de **C** , et nous n'avons jamais dit comment nous prolongions cette fonctionnelle hors de la sphère. Nous sommes donc en train de prétendre que la restriction du laplacien à la sphère dépend seulement de la restriction de la fonctionnelle à la sphère, et est donnée par la formule ci-dessus. Voici un contre-exemple immédiat.

Soit (X_t) le mouvement brownien issu de 0 ; soit $j(\omega)=\int \xi(s)dB_s(\omega)$, où ξ appartient à C_c^∞ , de sorte que $j(\omega)=-\int B_s(\omega)\xi_s' ds$ est une excellente forme linéaire sur C . Le processus $j(X_t)$ est alors un mouvement brownien réel de paramètre $E[j(X_1)^2]=(\xi|\xi)$. Prenons $n=2$, $f_2(s_1,s_2)=\xi(s_1)\xi(s_2)$, de sorte que sur la sphère Ω_σ $I_2^\sigma(f_2) = \int \xi(s_1)\xi(s_2)dB_{s_1}dB_{s_2}$ vaut $(\int \xi_s dB_s)^2 - \sigma^2(\xi|\xi)$.

Nous définissons ainsi un prolongement de la fonctionnelle $I_2(f_2)$ aux autres sphères, que l'on peut composer avec le mouvement brownien (X_t), car celui-ci, à l'instant t, prend ses valeurs dans Ω_t. La composition est la martingale $j(X_t)^2-t(\xi|\xi)$, donc le prolongement en question a un laplacien qui est nul, et non donné par $2Tr(f_2)$ comme on l'espérait.

Signalons que plus généralement, l'expression $\int f_n(s_1,..,s_n)dB_{s_1}..dB_{s_n}$ (dans laquelle on laisse libre le paramètre du mouvement brownien[1], de sorte que la fonctionnelle est définie sur toutes les sphères) est l'analogue d'un polynôme harmonique de degré n . On pourrait donc être tenté de définir $\sigma^{-n}\int f_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_1}\ldots dB_{s_n}$ comme un prolongement homogène de degré 0 de $I_n(f_n)$. Sur ce genre de questions, consulter Zakai [16].

5. Désignons par A l'opérateur $\frac{1}{2}\Sigma_i D_{h_i} D_{h_i}$; bien que ce ne soit pas un opérateur raisonnable sur l'espace de Wiener, il permet d'écrire la formule de prolongement (8) sous une forme agréable. En effet, la formule (3) nous donne

$$A^k I_n(f_n) = \frac{n!}{(n-2k)!2^k} I_{n-2k}(Tr^k f_n)$$

de sorte que (8) nous dit que les coefficients du développement de f_σ suivant les chaos sont les mêmes que ceux de la fonction sur la sphère Ω

$$f'_\sigma = e^{(\sigma^2-1)A} f \tag{11}$$

On passe ensuite de f'_σ à f_σ en conservant les mêmes coefficients, et en changeant de ⟨⟨ sphère ⟩⟩, c. à d. par prolongement harmonique.

REMARQUES. a) Notre discussion est un peu incomplète, car nous avons étudié le prolongement de Ω_1 à Ω_σ , alors qu'il aurait fallu décrire le prolongement entre deux ⟨⟨ sphères ⟩⟩ arbitraires Ω_τ et Ω_σ. Il est facile de réparer cette omission : si $f=I_n^\tau(f_n)$ est une v.a. sur Ω_τ, on a

$$f_\sigma = \Sigma_{k\leq n/2} \frac{n!(\sigma^2-\tau^2)^k}{(n-2k)!k!2^k} I^\sigma_{n-2k}(Tr^k f_n)$$

Il est facile de vérifier que ces prolongements sont compatibles : pour passer de 1 à σ, on peut passer de 1 à τ , puis de τ à σ .

b) Il est parfois avantageux de travailler sur des fonctions f_n non symétriques, en convenant que $I_n(f_n)=I_n(Sf_n)$ où S est la symétrisation. La formule qui remplace la précédente dans le cas non symétrique est

$$f_\sigma = \Sigma_{k\leq n/2} \frac{(\sigma^2-\tau^2)^k}{2^k k!} I^\sigma_{n-2k}(\Sigma_{a,b}\, Tr_{a,b} f_n)$$

où a,b désignent deux injections de $\{1,..,k\}$ dans $\{1,..,n\}$ dont les images sont disjointes, et $Tr_{a,b}\, f_n$ s'obtient en contractant les variables $s_{a(i)}$ et $s_{b(i)}$ pour $i=1,...,k$.

Rappelons la <u>formule de multiplication des intégrales stochastiques</u> sur l'espace de Wiener de paramètre σ . Nous indiquons la forme qui s'applique aux coefficients non symétriques (Sém. Prob. XX, p. 274)

$$I^\sigma_m(f_m).I^\sigma_n(g_n) = \Sigma_{p\leq m\wedge n} \frac{\sigma^{2p}}{p!} \Sigma_{c,d}\, I^\sigma_{m+n-2p}(f_m \overline{\overline{cd}}\, g_n)$$

où comme ci-dessus c et d (pour être précis, il faudrait écrire c_p, d_p) sont deux bijections de $\{1,..,p\}$ dans $\{1,..,m\}$ et $\{1,..,n\}$ respectivement (pas de condition ici sur les images), et $f_m \overline{\overline{cd}}\, g_n$ s'obtient en formant $f_m\otimes g_n$ et en contractant les variables $s_{c(i)}$ dans f_m et $t_{d(i)}$ dans g_n , pour $i=1,...,p$.

Il est alors facile de vérifier, par un argument purement combinatoire, que l'opération de prolongement est un <u>homomorphisme d'algèbre</u>, i.e. que le prolongement à Ω_σ du produit de deux v.a. sur la sphère Ω_τ est le produit (sur Ω_σ : le produit dépend de la sphère) de leurs prolongements. Vu la compatibilité des prolongements, on peut fixer la valeur de τ, et le choix de $\tau=0$ est avantageux, car $I_m^\circ(f_m).I_n^\circ(g_n)=I_{m+n}^\circ(f_m\otimes g_n)$. Il s'agit donc d'évaluer

$$\Sigma_{2q\leq m+n} \frac{\sigma^{2q}}{q!} \Sigma_{u,v} I^\sigma_{m+n-2q}(\mathrm{Tr}_{u,v}\, f_m\otimes g_n)$$

u,v étant deux injections de $\{1,..,q\}$ dans $\{1,..,m+n\}$ dont les images sont disjointes. On partage les indices en trois groupes : k indices i pour lesquels $u(i)\leq m$, $v(i)\leq m$ (on voit alors apparaître deux injections a,b à images disjointes de $\{1,..,k\}$ dans $\{1,..,m\}$), ℓ indices i pour lesquels $u(i)>m$ $v(i)>m$ (d'où deux injections c,d à images disjointes de $\{1,..,\ell\}$ dans $\{1,..,n\}$), enfin p indices i restants (d'où deux injections h,k de $\{1,.,p\}$ dans $\{1,..,m\}$ et $\{1,..,n\}$). Nous laisserons le lecteur achever la preuve.

II. SUR L'INTEGRALE DE FEYNMAN

1. Soit V une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, appelée le potentiel. Le problème de l'intégrale de Feynman consiste à définir pour $\sigma^2=-i$ l'« espérance »

(12) $$Q_t^\sigma(x,f) = E[\exp(i\int_0^t V(x+\sigma^{-1}B_s)ds)f(x+\sigma^{-1}B_t)] \quad \text{(mes. de Wiener)}$$

Pour $\sigma^2>0$, $Q_t^\sigma(x,f)=f(x,t)$ satisfait à l'équation de diffusion complexe

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + iVf \ , \qquad f(x,0)=f(x)$$

et pour $\sigma^2=-i$ on trouve l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + Vf \quad .$$

On sait résoudre l'équation de Schrödinger sous des conditions très larges, mais la méthode de prolongement analytique (et les autres méthodes rigoureuses de traitement mathématique de l'intégrale de Feynman) ne permettent d'atteindre qu'une classe beaucoup plus restreinte de potentiels (cf. Albeverio et Høegh-Krohn [1], Kallianpur-Bromley [12], etc.). Essentiellement, des potentiels de la forme

(13) $$V(x) = k\frac{x^2}{2} + ax + \int e^{iux}\alpha(du)$$

où α est une mesure complexe bornée. L'idée de base pour le traitement de cette classe est due à Ito [8], semble-t-il. (Cf. aussi le n°5 plus bas).

Dans la formule (12) nous pouvons supposer que f est une bonne fonction, i.e. un élément de l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz. En effet, une partie de la théorie (que nous n'abordons pas ici) consiste à établir que le semi-groupe Q_t^σ correspondant à $\sigma^2=-i$ préserve la norme de L^2 : ceci est lié à la vérification de l'équation de Schrödinger. Le passage de $\mathcal{S}$ à L^2 est alors immédiat par densité.

Si l'on remplace V par V(x+.), f par f(x+.), on ne sort pas de la classe de potentiels (13). On peut donc se ramener au cas où x=0 .

2. Nous allons d'abord traiter le cas où, dans (13), on a k=a=0. Notre point de départ est la remarque suivante : iuB_s est une intégrale stochastique $\tilde{\xi}$ où $\xi=\xi_{u,s}$ vaut $uI_{[0,s]}$. Donc on peut écrire

$$V(B_s) = \int e^{iuB_s}\,\alpha(du) = \int_H e^{i\tilde{\xi}}\,\beta_s(d\xi)$$

où β_s est la mesure bornée sur H, image de α par l'application $u \mapsto \xi_{u,s}$ de $\mathbb{R}$ dans H. Puis nous avons

$$\int_0^t V(B_s)ds = \int_H e^{i\tilde{\xi}}\,\gamma(d\xi) \quad , \quad \gamma = \int_0^t \beta_s$$

Notons ensuite que la convolution des mesures bornées sur H est bien définie, et que la transformation de Fourier la transforme en multiplication. On peut alors écrire

$$\exp(i\int_0^t V(B_s)ds) = \int_H e^{i\tilde{\xi}}\,\delta(d\xi) \ , \ \delta = \Sigma_n \frac{i^n}{n!}\,\gamma^{*n}$$

D'autre part, on peut aussi écrire

$$f(B_t) = \int e^{i\tilde{\xi}}\,\varepsilon(d\xi)$$

où ε est une mesure bornée : car $f\in\mathcal{S}$ est transformée de Fourier d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}$, et on traite le cas de $f(B_t)$ comme au début. Finalement on peut écrire

(14) $$\exp(i\int_0^t V(B_s)ds)f(B_t) = \int_H e^{i\tilde{\xi}}\,\theta(d\xi) \quad , \quad \theta = \delta*\varepsilon \ ,$$

θ étant une mesure bornée sur H .

Revenant au potentiel (13), nous voyons que le terme en ax est indifférent : il contribue $\exp(i\int_0^t aB_s ds)$ qui est de la forme $e^{i\tilde{\eta}}$, et on est ramené à translater la mesure θ de $\eta\in H$. Reste enfin à transformer

$$\frac{k}{2}\int_0^t B_s^2 ds = \frac{k}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \int L(u,v)dB_u dB_v\right) \ , \ L(u,v) = (t-u\vee v)^+$$

Pour finir, l'intégrale à calculer est

(15) $$e^{ikt^2/4}\int_H E_{\sigma^2}[\exp(\tfrac{ik}{2}\int L(u,v)dB_u dB_v + i\tilde{\xi}]\,\theta(d\xi)$$

Nous ne nous proposons d'ailleurs pas seulement de calculer l'intégrale elle même, mais de décrire la manière dont la v.a. sous le signe E[ ] se développe suivant les chaos de Wiener.

3. Pour la commodité du lecteur, nous allons reprendre certains calculs de [14].

Considérons L(u,v) comme définissant un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Cet opérateur laisse invariant les sous-espaces $L^2([0,t])$ et $L^2([t,\infty[)$, et annule le second. Cherchons ses valeurs propres λ_n et ses vecteurs propres e_n sur le premier. Ce calcul est tout à fait classique, il est étroitement lié au développement trigonométrique du mouvement brownien sur [0,t], dû à Wiener. Reprenons le ici.

On vérifie d'abord que L n'admet pas la v. propre 0. Cela revient à vérifier que la relation $\int_0^t f(s)B_s ds=0$ entraîne f=0, et nous laisserons cela au lecteur. Nous écrivons ensuite, avec $\lambda_n \neq 0$

$$\lambda_n e_n(u) = (t-u)\int_0^u e_n(v)dv + \int_u^t (t-v)e_n(v)dv \ .$$

Il en résulte que les fonctions $e_n(u)$ sont de classe C^1 sur $[0,t]$ et satisfont à $e_n(t)=0$. On a

$$\lambda_n e_n'(u) = -\int_0^u e_n(v)dv$$

donc e_n est en fait de classe C^2 avec $e_n'(0)=0$, et un petit calcul donne (a_n étant une constante de normalisation)

$$(16) \qquad \lambda_n = ((n+\tfrac{1}{2})\tfrac{\pi}{t})^{-2},\ n\geqq 0 \qquad e_n(u) = a_n \cos(u/\sqrt{\lambda_n})I_{\{u\leqq t\}} \ .$$

Noter que L est un opérateur positif à trace : $\Sigma_n \lambda_n$ converge.

Le noyau L(u,v) s'écrit $\Sigma_n \lambda_n e_n(u)e_n(v)$, et l'intégrale double $\int L(u,v)dB_u dB_v$ s'écrit $\Sigma_n \lambda_n(\tilde{e}_n^2-1)$, les v.a. $\tilde{e}_n$ étant gaussiennes centrées réduites indépendantes. Posons d'autre part $(e_n|\xi)=\xi_n$, de sorte que $\tilde{\xi} = \Sigma_n \xi_n \tilde{e}_n$. L'espérance figurant en (14) vaut pour $\sigma=1$

$$(17) \qquad \prod_n E[\ \exp(\tfrac{ik}{2}\lambda_n(\tilde{e}_n^2-1) + i\xi_n\tilde{e}_n\ ]$$

(pour le cas général, remplacer k par $\sigma^2 k$, ξ_n par $\sigma\xi_n$). D'après un calcul tout à fait classique, reproduit dans [14][1], on obtient

$$(18) \qquad E_{\sigma^2}[\exp(\tfrac{ik}{2}\int_0^t B_s^2 ds + i\int \xi_s dB_s)] =$$
$$e^{ik\sigma^2 t^2/4} \prod_n (e^{-ik\lambda_n\sigma^2/2}/\sqrt{1-ik\sigma^2\lambda_n}\,)\ e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\xi|T_\sigma\xi)}$$

où $(\xi|T_\sigma\xi) = \frac{1}{2}\Sigma_n\ \xi_n^2/1-ik\sigma^2\lambda_n$ (sommation uniquement sur les e_n ci-dessus : T_σ annule $L^2([t,\infty[)$). Le prolongement analytique pour $\sigma^2=-i$ nous donne pour l'intégrale de Feynman proprement dite

$$(19) \qquad e^{kt^2/4} \prod_n (e^{-k\lambda_n/2}/\sqrt{1-k\lambda_n})\ \exp(\tfrac{1}{2}\Sigma_n \frac{\xi_n^2}{1-k\lambda_n}\ )$$

Il n'y a aucune difficulté pour l'intégration en $\Theta(d\xi)$, mais il y a une singularité dans l'intégrale pour $t = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, correspondant à l'annulation d'un facteur $1-k\lambda_n$.

D'autre part, le pôle le plus proche de $E_{\sigma^2}[\ ]$, considérée comme fonction de la variable complexe σ^2, est $-i\pi^2/4kt^2$; il nous permet de déterminer le rayon de convergence du développement de $E_{\sigma^2}[\ ]$ en puissances de σ^2-1, qui est fourni par (7).

3. Nous allons maintenant nous occuper de calculer ce développement, i.e. de développer suivant les chaos de Wiener la v.a. figurant en (15), autrement dit , en modifiant un peu les notations

1. $E[\exp(aX+cX^2/2)=\exp(a^2/2(1-c))/\sqrt{1-c}$ si X est normale centrée réduite.

(20) $\exp(\frac{i}{2}\int K(u,v)dB_u dB_v + \tilde{\eta}) \doteq f$

(nous avons fait disparaître le coefficient k et changé le nom de la fonction linéaire) ; $K(u,v)$ est ici un noyau réel symétrique, qui s'écrit

$$K(u,v) = \Sigma_n\; c_n e_n(u)e_n(v) \qquad (c_n \text{ réels })$$

La méthode de calcul indiquée par Hida pour obtenir le développement $f=\Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(f_n)$ passe par la formule

(21) $\int f_n(s_1,\dots,s_n)\xi(s_1)\dots\xi(s_n)ds_1\dots ds_n = \frac{d^n}{dt^n}U(t\xi)|_{t=0}$

où $U(\xi)$ est la << fonction caractéristique >>

(22) $U(\xi) = E[f\mathcal{E}(\xi)]$

Le calcul de la fonction U est très voisin de celui de (17)-(19) : il s'agit de calculer

$$E[\exp(\tfrac{i}{2}\Sigma_n\; c_n(\tilde{e}_n^2-1) + \eta_n\tilde{e}_n + \xi_n\tilde{e}_n - \tfrac{1}{2}\Sigma_n\; \xi_n^2)]$$

et cela s'écrit

(23) $C\exp(\frac{1}{2}(\xi|A\xi) + (\xi|\zeta) = Ce^{R(\xi)}$

en posant :

$$C = \prod_n \frac{e^{-ic_n/2}}{\sqrt{1-ic_n}}\, e^{\eta_n^2/2(1-ic_n)}$$

(24) $(\xi|A\xi) = \Sigma_n\; \xi_n^2(\frac{1}{1-ic_n} - 1) = \int A(u,v)\xi(u)\xi(v)dudv$

$$\zeta = \Sigma_n\; \eta_n/1-ic_n$$

Tout le problème consiste donc à calculer les dérivées successives de la fonction $e^{R(t\xi)}$ pour t=0. Posons $R_k(\xi)= \frac{d^k}{dt^k}R(t\xi)|_{t=0}$; nous avons ici

(25) $R_0(\xi)=0$, $R_1(\xi)=(\xi|\eta)$, $R_2(\xi)=(\xi|A\xi)$, $R_k(\xi)=0$ pour $k>2$.

D'autre part, soit $\{A_1,\dots,A_k\}=\mathfrak{a}$ une partition de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ en ensembles non-vides, comportant respectivement $n_1,\dots n_k$ éléments. Nous lui associons la fonction $R_{\mathfrak{a}} = R_{n_1}\dots R_{n_k}$. Nous considérons deux partitions comme identiques si elles ne diffèrent que par le numérotage des A_i, et nous avons alors

(26) $\frac{d^n}{dt^n}\, e^{R(t\xi)} = \Sigma_{\mathfrak{a}}\; R_{\mathfrak{a}}(\xi)$.

Dans le cas présent, nous n'avons à considérer que des partitions en ensembles à <u>un</u> ou <u>deux</u> éléments ; nous pouvons donc écrire

$$\mathfrak{a} = \{s_{i_1},s_{j_1}\},\dots\{s_{i_k},s_{j_k}\},\ \{s_{\ell_{2k+1}}\}\dots\{s_{\ell_{n-2k}}\}$$

avec $i_1>j_1,\dots i_k>j_k$, $i_1<i_2<\dots<i_k$, $\ell_{2k+1}<\dots<\ell_{n-2k}$. La fonction $R_{\mathfrak{a}}(\xi)$ correspondante est simplement $(\xi|A\xi)^k(\xi|\eta)^{n-2k}$. On en déduit

$$\int f_n(s_1,\ldots,s_n)\,\xi(s_1)\ldots\xi(s_n)ds_1\ldots ds_n =$$
$$= \Sigma_{k\leqq n/2}\ \frac{n!}{(n-2k)!k!2^k}\ (\xi|A\xi)^k(\xi|\eta)^{n-2k}$$

et la fonction $f_n(s_1,\ldots s_n)$ elle même est la symétrisée de

(27) $$\Sigma_{k\leqq n/2}\ \frac{n!}{(n-2k)!k!2^k}\ A(s_1,s_2)\ldots A(s_{2k-1},s_{2k})\eta(s_{2k+1})\ldots\eta(s_n)$$

Les coefficients du développement suivant les chaos peuvent donc être écrits de manière relativement explicite. Les difficultés combinatoires véritables commencent avec le calcul des traces, car les indices sur lesquels on intègre peuvent se trouver 1) dans le même A ce qui fait apparaître Tr(A) ; 2) entre deux η ce qui fait apparaître $(\eta|\eta)$ 2) entre un A et un η ce qui fait apparaître le vecteur $A\eta$ 4) entre deux A différents ce qui fait apparaître le noyau A^2.

Existe-t-il un formalisme de ≪ diagrammes ≫ rendant transparent ce genre de calculs ?

4. Nous voudrions indiquer brièvement, d'après [9], pourquoi le calcul de l'intégrale de Feynman par prolongement analytique est trivial, sans passer par les chaos, lorsque le potentiel est <u>borné</u> (ce qui est le cas lorsque V est transformée de Fourier d'une mesure bornée !). Plus généralement, soient $V(s,x)$ une fonction complexe, η une mesure complexe bornée sur $[0,t]$. Johnson et Lapidus montrent que

(28) $$E[\exp(\int_0^t V(s,x+\sigma^{-1}B_s)\eta(ds))f(x+\sigma^{-1}B_t)]\quad (\text{ mes. de Wiener })$$

bien définie pour $\sigma>0$, se prolonge analytiquement au demi-plan $\Re(\sigma)\geqq 0$, pourvu que l'on ait

(29) $$A = \int_0^t |\eta(ds)|\,\|V(s,.)\|_\infty < \infty\ .$$

Désignons par P_t^σ le semi-groupe brownien de variance σ^2. Il est bien connu que l'on peut prolonger analytiquement ce semi-groupe au demi-plan, et que pour tout σ P_t^σ est une contraction de $L^2(\mathbb{R})$. Posons

$$J(\omega) = \int_0^t V(s,x+\sigma^{-1}B_s)\eta(ds)$$

Nous avons (pour $\sigma>0$ d'abord ; on ne restreint pas la généralité en supposant η positive)

$$E[Jf(x+\sigma^{-1}B_t)] = \int_0^t \eta(ds)P_s^\sigma(x,dy)V(s,y)P_{t-s}^\sigma(y,f)$$

et la norme L^2 de cette fonction de x est majorée par $A\|f\|_{L^2}$, parce que la norme de l'opérateur de multiplication par $V(s,.)$ est $\|V(s,.)\|_\infty$. On vérifie que ce terme se prolonge analytiquement au demi-plan.

Calculons ensuite

$$E[J^2f(x+\sigma^{-1}B_t)] = E[\int\int\eta(dr)\eta(ds)V(r,x+\sigma^{-1}B_r)V(s,x+\sigma^{-1}B_s)f(x+\sigma^{-1}B_t)]$$

L'intégrale sur le carré se décompose en deux fois l'intégrale sous la diagonale, et l'intégrale sur celle-ci (non nulle si η a une partie atomique, cas traité dans [9], mais ici nous supposerons η diffuse). Le résultat est donc

$$2\int_{r<s} \eta(dr)\eta(ds)P^{\sigma}_{r}(x,dy)V(r,y)P^{\sigma}_{s-r}(y,dz)V(s,z)P^{\sigma}_{t-s}(z,f)$$

qui se prolonge analytiquement au demi-plan, avec norme L^2 en x majorée par $A^2\|f\|_{L^2}$. On continue de même pour les termes suivants de la série exponentielle, et l'on a convergence de la série d'opérateurs obtenue, en norme

Pour traiter le terme quadratique de (13), il ne faut pas le faire entrer dans le terme "potentiel", mais simplement remplacer le semi-groupe brownien par le semi-groupe de l'oscillateur harmonique... l'idée étant finalement la remarque toute simple que les opérateurs de multiplication par une fonction de L^{∞} sont bornés sur L^2, et qu'une perturbation bornée d'un semi-groupe holomorphe reste holomorphe. Mais on a perdu la belle interprétation au moyen des distributions sur l'espace de Wiener.

III. CALCUL DE CERTAINS DEVELOPPEMENTS EN CHAOS DE WIENER

1. A la fin de l'article [14], Meyer et Yan indiquent une méthode (non rigoureusement justifiée) pour développer suivant les chaos de Wiener la fonctionnelle $\exp(i\int_0^t V(x+B_s)ds)f(x+B_t)$ qui intervient dans la définition de l'intégrale de Feynman. Nous nous sommes aperçus que ce calcul est étroitement lié à un travail d'Isobe et Sato [7], consacré au développement de Wiener des solutions d'é.d.s.. Nous allons d'abord présenter les résultats d'Isobe et Sato, puis nous ferons la relation avec le travail de Meyer et Yan.

Nous considérons une équation différentielle stochastique en dimension 1 (nous n'avons considéré plus haut que les chaos d'un mouvement brownien unidimensionnel)

(1) $$X^x_t = x + \int_0^t a(X^x_s)dB_s + \int_0^t b(X^x_s)ds$$ (on écrira parfois X_t sans x)

à coefficients lipschitziens, avec $a>0$. Nous savons que X^x_t appartient à $L^2(\underline{\underline{F}}_t)$, où $\underline{\underline{F}}_t$ est la tribu engendrée par les B_s, $s\leq t$, et nous allons chercher les coefficients du développement de X^x_t , ou plus généralement de $h(X^x_t)$ où h est une bonne fonction sur $\mathbb{R}$, suivant les chaos de Wiener. Ces coefficients dépendent, bien entendu, de x.

Le coefficient d'ordre 0 est

(2) $$F^0_t(x,h) = E[h(X^x_t)] = P_t(x,h)$$

où (P_s) est le semi-groupe de transition de la diffusion (1). Nous désignerons par $F^n_{s_1,\ldots,s_n,t}(x,h)$ ne n-ième coefficient du développement de $h(X^x_t)$ ($0<s_1\ldots<s_n<t$). D'aprés le théorême de dérivation de Lebesgue, on a pour presque tout point $(s_1,\ldots,s_n)$

(3) $F^n_{s_1,\ldots,s_n,t}(x,h) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E[\Delta_\varepsilon B_{s_1}\ldots\Delta_\varepsilon B_{s_n} h(X^x_t)]/\varepsilon^n$

où l'on a posé $\Delta_\varepsilon B_u = B_{u+\varepsilon}-B_u$. En effet, l'espérance à droite est l'intégrale de F^n sur le produit des intervalles $[s_i,s_i+\varepsilon]$. Isobe et Sato attribuent à Ito la remarque (3), qui manquait au travail de Meyer-Yan.

Commençons par le cas n=1, en posant $s_1=s$: introduisons la martingale $E[h\circ X^x_t|\underline{\underline{F}}_r] = P_{t-r}(X^x_r,h)$. D'après le théorème de représentation des martingales, celle-ci s'écrit $P_t(x,h) + \int_0^r \eta_u dB_u$, et l'on a

$$E[\Delta_\varepsilon B_s\, h(X^x_t)] = E[\int_s^{s+\varepsilon}\eta_u du\ ]$$

et par conséquent $F^1_{s,t}(x,h)=E[\eta_s]$ pour presque tout s .

Si les coefficients de l'équation (1) sont suffisamment réguliers (on donnera des détails plus loin) la fonction $j(r,x)=P_{t-r}(x,h)$ est de classe $C^{1,2}$ sur $[0,t[\times\mathbb{R}$, et la formule d'Ito donne pour s<t

$$j(s,X_s) = j(0,X_0) + \int_0^s j'(r,X_r)a(X_r)dB_r + \text{termes à variation finie}$$

mais comme on a affaire à une martingale, ces termes à variation finie ont une somme nulle, et il reste (' désignant une dérivée en x)

(4) $\eta_s = P'_{t-s}(X_s,h)a(X_s)$, $F^1_{s,t}(x,h) = \int P_s(x,dy)a(y)P'_{t-s}(y,h)$

Pour calculer le second coefficient, on développe à nouveau η_u en intégrale stochastique - par le même procédé que ci-dessus, puisque η_u est de la forme $f(X_u)$: $\eta_u = E[\eta_u] + \int_0^u \eta_{vu}dB_v$, et l'on a pour ε petit

$$E[\Delta_\varepsilon B_{s_1}\Delta_\varepsilon B_{s_2}\ h(X_t)] = E[\int_{[s_1,s_1+\varepsilon[\times[s_2,s_2+\varepsilon[}\eta_{vu}dudv]$$

d'où $F^2_{s_1,s_2,t}(x,h) = E[\eta_{s_1s_2}]$ p.p., et à nouveau

(5)
$$\eta_{s_1s_2} = P'_{s_2-s_1}(X_{s_1},aP'_{t-s_2}h)a(X_{s_1})$$
$$F^2_{s_1,s_2,t}(x,h) = \int P_{s_1}(x,dy)a(y)P'_{s_2-s_1}(y,aP'_{t-s_2}h)$$

etc. En pratique, les noyaux $P_t(x,dy)$ admettent une densité $p_t(x,y)$, la dérivée $P'_t(x,h)$ s'obtient en appliquant à h un noyau (non positif) de densité $p'_t(x,y)$, et les coefficients eux mêmes admettront une densité donnée par

(6) $$F^n_{s_1,\ldots,s_n,t}(x,y) = \int p_{s_1}(x,y_1)a(y_1)p'_{s_2-s_1}(y_1,y_2)a(y_2)\ldots$$
$$\ldots a(y_n)p'_{t-s_n}(y_n,y)\ dy_1\ldots dy_n\ .$$

Le principe du calcul de Meyer et Yan, pour développer suivant les chaos une v.a. de la forme

$$f(x+B_t)M_t^x \ , \ M_t^x = \exp[i\int_0^t V(x+B_s)ds + \int_0^t W(x+B_s)dB_s]$$

est exactement le même, le rôle du semigroupe (P_t) étant joué par le semigroupe $Q_t(x,h)=E^x[M_t^x h(x+B_t)]$ associé à la fonctionnelle multiplicative (M_t). Il manque à Meyer-Yan la remarque (3), et d'autre part les propriétés de régularité de (M_t) sont moins faciles à prouver que celles de (P_t) ci-dessus.

EXISTENCE DES TRACES

Cette section est importante, parce qu'elle montre l'existence (et l'appartenance à L^2) des traces itérées, dans un cas non trivial, et de grande importance pratique. Ainsi, les sections qui précèdent sont autre chose que du bavardage formel.

Cette section est peu satisfaisante, pour deux raisons

- La méthode que nous utilisons repose sur la théorie analytique des équations paraboliques. A cet égard, elle est "préhistorique" . Un calcul du type de Malliavin, mais plus raffiné, devrait pouvoir montrer a priori que les solutions d'e.d.s. appartiennent au domaine des mauvais laplaciens sur l'espace de Wiener que sont les opérateurs Tr^k .
- Nous n'avons pas su ramener toutes les hypothèses analytiques à des hypothèses portant sur les coefficients de l'e.d.s.. Ceci est dû uniquement à notre ignorance de la littérature des équations paraboliques. Les majorations de dérivées de la solution élémentaire $p_t(x,y)$ qui nous sont nécessaires sont probablement classiques, mais elles ne figurent pas dans les traités que nous avons pu consulter (Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications vol. 1 ; Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type).

Sur les coefficients a et b , nous ferons les hypothèses usuelles : a est borné inférieurement par une constante >0 (ellipticité) ; a et b sont bornés et admettent des dérivées bornées d'ordre suffisamment grand. Remarquer que dès que a' et b' sont bornées, on est dans le cas lipschitzien, et la solution de l'e.d.s. existe. De plus, le semi-groupe de transition P_t admet une densité $p_t(x,y)$ deux fois dérivable en x et une fois en t . Si les dérivées secondes de a et b existent et sont bornées, le semi-groupe adjoint $(\hat{P}_t)$ possède les mêmes propriétés de régularité (à cela près qu'il n'est pas sousmarkovien en général).

Nous aurons besoin de majorations des dérivées de la solution élémentaire $p_t(x,y)$, pour lesquelles nous introduirons les notations suivantes.

$\phi_t(x,y)$ sera une fonction de la forme $Ct^{-1/2}\exp(-c|x-y|^2/t)$, où la valeur des constantes $C>0$, $c>0$ ne nous intéresse pas. Une inégalité de la forme

$$|g(x,y)| \leqq H^{-1/2}\phi_t(x,y)$$

où H ne dépend pas de (x,y), sera écrite simplement $g\prec_t H$. Pour une famille de fonctions $(g_t(x,y))$ et une fonction $H(t)$, nous écrirons $g_\bullet \prec H(\cdot)$ pour exprimer que l'on a $g_t \prec_t H(t)$, avec des constantes C et c dans les fonctions ϕ_t qui ne dépendent pas de t, au moins lorsque celui-ci varie dans un intervalle borné.

Avec ce langage, les majorations classiques de la théorie des équations paraboliques s'écrivent

(7) $\quad p_t \prec 1$ (sur tout intervalle compact)

(7^1) $\quad D_x p_t$, $D_y p_t \prec t$ (idem)

(7^2) $\quad D_x^2 p_t$, $D_y^2 p_t \prec t^2$ (idem).

Ces inégalités ne nous suffisent pas : il nous faut savoir majorer une dérivée seconde supplémentaire

(7^3) $\quad D_x D_y p_t \prec t^2$ (...)

et pour l'appartenance des traces à L^2, nous aurons besoin de

(7^4) $\quad D_x^2 D_y p_t \prec t^3$, $D_x D_y^2 p_t \prec t^3$, $D_x^2 D_y^2 p_t \prec t^4$.

Autre notation abrégée très commode : si $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont deux fonctions et $h(x,y)=\int f(x,z)g(z,y)dz$, nous écrivons $h=f[]g$. La propriété de semi-groupe du mouvement brownien montre que $\phi_s[]\phi_t=\phi_{s+t}$, de sorte que les relations $f\prec_s H$, $g\prec_t K$ entraînent $f[]g\prec_{s+t} HK$.

<u>Justification du calcul des coefficients</u> (<u>formule</u> (6)). Dans le nouveau langage, la formule (6) s'écrit

(8) $$F^n_{s_1,\dots,s_n,t} = p_{s_1}a[]p'_{s_2-s_1}a[]\dots[]p'_{s_n-s_{n-1}}a[]p'_{t-s_n} .$$

La mention de n en haut sera parfois supprimée. Le raisonnement formel que nous avons indiqué pour le calcul des coefficients repose sur une récurrence, et l'étape essentielle est la première. Celle-ci va maintenant être justifiée, le lecteur étant prié de se reporter au voisinage de la formule (4). Les résultats ci-dessus concernant les équations paraboliques montrent que la fonction $j(r,x)$ est bien de classe $C^{1,2}$, donc l'application de la formule d'Ito est légitime. Le processus (η_s) de (4) est uniformément borné dans tout intervalle $[0,T]$ avec $T<t$, et il est facile de voir que ses trajectoires sont continues, donc le calcul de $F^1_{s,t}(h)$ par la formule (3) est justifié. Il apparaît que pour $0<s<t$, $F^1_{s,t}$ admet la densité

(9) $$F^1_{st}(x,y) = \int p_s(x,z)a(z)p'_{t-s}(z,y)dz = p_s a[]p'_{t-s} .$$

Comme on a $p_s a <_s 1$, $p'_{t-s} <_{t-s} t-s$, on a $F^1_{st} <_t t-s$. D'autre part, une intégration par parties nous donne

$$F^1_{st} = (-D(p_s a)) \square p_{t-s} \qquad \text{où } D=D_y$$

L'opérateur différentiel $f \mapsto -D(fa)$ interviendra tout le temps, et nous le noterons A ; on a $Ap_s <_s s$, $p_{t-s} <_{t-s} 1$, donc $F^1_{st} <_t s$. On raffine donc les deux majorations en remplaçant $t-s$ et s par leur sup, ou - cela revient au même à un facteur 2 près - par leur somme. Ainsi

$$F^1_{st} <_t t \qquad (\text{ indépendamment de } s<t\ )$$

En particulier F^1_{st} est une fonction bornée en s, pour t fixé. Il est intéressant de noter que $Ap_s(x,z)$ tend vers $Ap_t(x,z)$ pour $s \uparrow t$, uniformément en z pour x fixé ; il en résulte que $F^1_{s,t}(x,y)$ a une limite $F^1_{t,t}(x,y)$.

Ce genre de raisonnement consistant à intégrer par parties de toutes les manières possibles, à utiliser les majorations (7), et à prendre l'inf de tous les majorants obtenus (sur les inégalités $<_t$, cela revient à ajouter les seconds membres) est le modèle de tous les raisonnements ultérieurs, et nous ne le referons pas en détail.

Nous laissons au lecteur la récurrence qui justifie l'expression (6) ou (8) pour tous les coefficients. <u>Nous allons plutôt passer à la majoration de ceux-ci</u>.

REMARQUE. Il est intéressant de voir ce que donnent tous ces calculs lorsque l'équation différentielle stochastique est triviale : $a=1$, $b=0$, $X_t=x+B_t$. Dans ce cas, il s'agit seulement de développer suivant les chaos $h(x+B_t)$, et la recherche de la densité revient à développer $\delta(x-y+B_t)$: c'est une « fonction δ de Donsker », déjà étudiée dans l'article de Meyer et Yan, d'après Hida.

Que donne la formule (6) ? D'abord, toutes les fonctions de (x,y) considérées ne dépendent que de y-x, et nous les noterons comme fonctions d'une seule variable. Ensuite (faisant x=0)

$$F_{s_1,\dots,s_n,t}(y) = \frac{d^n}{dy^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2t}\right) = t^{-n/2}H_n(y/\sqrt{t})\phi_t(y)$$

où ϕ_t est la densité brownienne. Comme cela ne dépend que de t , l'intégration en $dX_{s_1}\dots dX_{s_n}$ revient à une multiplication par $t^{-n/2}H_n(X_t/\sqrt{t})/n!$.

<u>Majoration des coefficients</u>. Nous savons a priori que $F_{s_1\dots s_n,t}(x,h)$ appartient à L^2 lorsque h est bornée, mais pour la densité, analogue à une fonction δ de Donsker, il y a quelque chose à établir.

Nous allons poser $u_1=s_1$, $u_2=s_2-s_1, \dots$ $u_{n+1}=t-s_n$. Puis nous allons majorer simultanément, par récurrence, les expressions

$$F_{s_1\ldots s_n t} = p_{s_1} a[\![p'_{s_2-s_1} a[\![\cdots [\![p'_{s_n-s_{n-1}} a [\![p'_{t-s_n}$$

$$G_{s_1\ldots s_n t} = p_{s_1} a[\![p'_{s_2-s_1} a[\![\cdots [\![p'_{s_n-s_{n-1}} a [\![A p'_{t-s_n}$$

par

$$(10)\qquad \begin{array}{l} F_{s_1\ldots s_n t} \prec_t (u_1+u_2)\ldots(u_n+u_{n+1}) \\ G_{s_1\ldots s_n t} \prec_t (u_1+u_2)\ldots(u_n+u_{n+1})u_{n+1} \end{array}$$

La récurrence est immédiate : on écrit

$$F_{s_1\ldots s_n t} = F_{s_1\ldots s_n} [\![a p'_{t-s_n} = G_{s_1\ldots s_n} [\![p_{t-s_n} \quad (\text{ int. par parties })$$

$$G_{s_1\ldots s_n t} = F_{s_1\ldots s_n} [\![a A p'_{t-s_n} = G_{s_1\ldots s_n} [\![A p_{t-s_n}$$

Pour la première ligne, les facteurs sont $(u_1+u_2)..(u_n+u_{n-1})^{u_n}_{u_{n-1}}$ d'après l'hypothèse de récurrence, et ils donnent la formule voulue au rang n par addition.

Vérifier que $\int_{s_1<\ldots<s_n<t} |F_{s_1\ldots s_n t}|^2 ds_1\ldots ds_n < \infty$ revient alors à vérifier que

$$\int_{u_1+\ldots+u_{n+1}=t} (u_1+u_2)^{-1}\ldots(u_n+u_{n+1})^{-1} du_1\ldots du_n < \infty$$

Par homogénéité il suffit de vérifier que cette intégrale est finie pour <u>une</u> valeur de t, et a fortiori pour presque tout t. Il suffit alors de démontrer que pour tout s fini on a

$$\int_{u_1\leqq s\ldots u_{n+1}\leqq s} (u_1+u_2)^{-1}\ldots(u_n+u_{n+1})^{-1} du_1\ldots du_{n+1} < \infty$$

On prend alors $p_1,\ldots,p_n$ tels que $1>p_1\ldots>p_n>0$; l'inégalité $a+b\geqq a^p b^{1-p}$ pour $1>p>0$ nous donne alors pour cette intégrale un majorant

$$\int_{u_1\leqq s\ \ldots u_{n+1}\leqq s} u_1^{-p_1} u_2^{p_1-p_2-1} \ldots u_n^{p_{n-1}-p_n-1} u_{n+1}^{p_n-1} du_1\ldots du_{n+1} < \infty \ .$$

<u>Passage aux traces</u> (I). Prendre une trace itérée du coefficient $F_{s_1\ldots s_n t}$ - pour fixer les idées, une seconde trace - consiste à effectuer les opérations suivantes

a) choisir deux couples de temps $s_j s_{j+1}$, $s_k s_{k+1}$, que l'on va égaler (appelons r_j la valeur commune de s_j et s_{j+1}, r_k celle de s_k et s_{k+1}). On peut supposer $j<k$; en fait on a alors $j+1<k$ (pas de coincidences triples !) <u>mais il se peut qu'il n'y ait aucun</u> s_i <u>entre</u> r_j et r_k : c'est la situation la plus difficile à traiter.

Il n'y a aucune difficulté à établir l'existence de la limite

$$F_{s_1\ldots s_{j-1} r_j r_j (\ ) r_k r_k s_{k+2}\ldots s_n t} = p_{s_1} a[\![\cdots [\![p'_{s_{j-1}-s_{j-2}} a[\![[\![A p'_{r_j - s_{j-1}} a [\![$$

$$\Big(p'_{s_{j+2}-r_j} a[\![\cdots [\![p'_{s_{k-1}-s_{k-2}} a \Big) [\![A p'_{r_k - s_{k-1}} a [\![[\![p'_{s_{k+2}-r_k} a [\![\cdots [\![p'_{t-s_n}$$

le bloc délimité par la parenthèse au milieu peut être absent. En d'autres termes, on annule les variables u_{j+1} et u_{k+1} , qui ont le droit d'être consécutives.
b) Intégrer cette limite en $dr_j dr_k$, en prenant comme ensemble d'intégration : si $j+2<k$, $r_j \in [s_{j-1}, s_{j+2}]$ $r_k \in [s_{k-1}, s_{k+2}]$; si $j+2=k$, l'ensemble d'intégration est $\{s_{j-1}<r_j<r_k<s_{k+2}\}$.

En toute généralité, les fonctions F avec coincidences diffèrent des fonctions F que nous avons majorées en (10) par le remplacement de certains $[\,]p'_{s_i-s_{i-1}}a[\,]$ par des $[\,]Ap'_{s_i-s_{i-1}}a[\,]$; après quoi l'élément de trace correspondant comporte pour chaque terme de ce type une intégration en s_i sur l'intervalle s_{i-1}, s_{i+1}

Nous allons maintenant changer de numérotage : par comparaison avec les fonctions $F_{s_1 \ldots s_n t}$ que nous avons étudiées avant (10), nous sommes amenés à étudier des "fonctions F" plus compliquées

$$F_{s_1 s_2 \ldots \underline{s}_i \ldots \underline{s}_j \ldots s_n t} = p_{s_1}a[\,]p'_{s_2-s_1}a[\,]\ldots[\,]Ap'_{s_i-s_{i-1}}a[\,]\ldots[\,]p'_{t-s_n}$$

Pour les indices soulignés $\underline{s}_i$, le terme $p'_{s_i-s_{i-1}}a$ a été remplacé par un terme d'ordre supérieur $Ap'_{s_i-s_{i-1}}a$.

On fait ensuite disparaître les indices soulignés en intégrant en $\underline{s}_i$ sur l'intervalle $]s_{i-1}, s_{i+1}[$ (fixe si s_{i-1} et s_{i+1} ne sont pas soulignés, variable sinon). Cela fournit des <u>éléments de trace</u>, dont il faut établir l'existence et l'appartenance à L^2.

On notera que si s_1 est souligné, le premier terme est $Ap_{s_1}a$ et non $Ap'_{s_1}a$, l'intégration allant de 0 à s_2.

<u>Passage aux traces</u> (II). Nous allons étudier un terme contenant une concentration maximale de mauvais facteurs, i.e.

(11) $$F_{s_1 \underline{s}_2 \ldots \underline{s}_n t} = p_{s_1}a[\,]Ap'_{s_2-s_1}a[\,]\ldots[\,]Ap'_{s_n-s_{n-1}}a[\,]p'_{t-s_n}$$

Nous conservons les notations $u_k=s_k-s_{k-1}$, $u_1=s_1$, $u_{n+1}=t-s_n$ et commençons par

$$\begin{array}{lllll} p_{u_1}a[\,]Ap'_{u_2}a[\,]p'_{u_3} = Ap_{u_1}[\,]Ap_{u_2}a[\,]p'_{u_3} & = & p_{u_1}a[\,]A^2p'_{u_2}[\,]p_{u_3} & = & p_{u_1}a[\,]p'_{u_2}[\,](ap'_{u_3})' \\ & \| & & \| & \\ & = & Ap_{u_1}[\,]A^2p_{u_2}[\,]p_{u_3} & = & Ap_{u_1}[\,]p_{u_2}[\,](ap'_{u_3})' \end{array}$$

Utilisant les majorations de dérivées, en particulier celle qui concerne la dérivée troisième A^2p' (ou $D_x D_y^2$) on obtient en regroupant tous les termes

(12) $$p_{s_1}a[\,]Ap'_{s_2-s_1}a[\,]p'_{t-s_2} <_t (u_1+u_2)(u_2+u_3)^2$$

Les formules suivantes s'établissent exactement de la même façon

$$(12_a)\qquad p'_{s_1}a\square Ap'_{s_2-s_1}a\square p'_{t-s_2} <_t u_1(u_1+u_2)(u_2+u_3)^2$$

$$(12_b)\qquad Ap_{s_1}\square Ap'_{s_2-s_1}a\square p'_{t-s_2} <_t u_1(u_1+u_2)(u_2+u_3)^2$$

$$(12_c)\qquad Ap'_{s_1}a\square Ap'_{s_2-s_1}a\square p'_{t-s_2} <_t u_1^2(u_1+u_2)(u_2+u_3)^2$$

(celle-ci utilise la dérivée 3^e A^2p', déjà utilisée plus haut)

$$(12_d)\qquad p_{s_1}a\square Ap'_{s_2-s_1}a\square Ap'_{t-s_2} <_t (u_1+u_2)(u_2+u_3)^2u_3$$

(utilise une nouvelle dérivée troisième : $D_yD_x^2$)

$$(12_e)\qquad p_{s_1}a\square Ap'_{s_2-s_1}a\square A^2p'_{t-s_2} <_t (u_1+u_2)(u_2+u_3)^2u_3^2$$

(utilise la dérivée 4^e $D_x^2D_y^2$).

Ayant fait cela, il est facile de pousser (12) un cran plus loin

$$(13)\qquad p_{s_1}a\square Ap'_{s_2-s_1}a\square Ap'_{s_3-s_2}a\square p'_{t-s_3} <_t (u_1+u_2)(u_2+u_3)^2(u_3+u_4)^2$$

Il suffit pour cela de faire des intégrations par parties sur <u>les deux derniers</u> facteurs, sans toucher aux précédents, et d'utiliser (12_d),(12), (12_e). Nous laissons les détails au lecteur. Pour prolonger (13) par récurrence, il faut prolonger simultanément les inégalités analogues á (12_d) et (12_e).

Une méthode toute semblable permet de majorer les fonctions F avec un nombre quelconque de coïncidences (instants soulignés)

$$(14)\qquad F_{s_1\ldots s_j\ldots\underline{s_k}\ldots t} <_t (u_1+u_2)\ldots(u_j+u_{j+1})\ldots(u_k+u_{k+1})^2\ldots(u_n+u_{n+1})$$

(exposant 2 pour les k soulignés, 1 pour les j non soulignés).

<u>Passage aux traces (III)</u>. Il reste à effectuer l'intégration sur les instants soulignés, et á vérifier que la fonction obtenue appartient à L^2. Nous traiterons le cas particulier de (13) :

$$\int p_{s_1}\square Ap'_{s_3-s_2}a\square Ap'_{s_3-s_2}a\square p'_{t-s_3}I_{\{s_1<s_2<s_3<t\}}ds_2ds_3$$

$$<_t \int \underset{u_1+u_2}{s_2^{-1/2}}\,\underset{u_2+u_3}{(s_3-s_1)^{-1}}\,\underset{u_3+u_4}{(t-s_2)^{-1}}\,ds_1ds_2$$

On utilise des inégalités du type $u_3+u_4\geq u_3^{p_3}u_4^{1-p_3}\ldots$ l'intégration en u_3 donne $\int_0^{t-s_2} u_3^{p_2-p_3-1}\underset{=u_4}{(t-s_2-u_3)}^{p_3-1}du_3 = C(t-s_2)^{p_2-1}$ si $1>p_2>p_3$

puis l'intégration en u_2

$$s_1^{-p_1/2}\int_0^{t-s_1}u_2^{p_1/2-p_2-1/2}(t-s_1-u_2)^{p_2-1}du_2 = Cs_1^{-p_1/2}(t-s_1)^{(p_1-1)/2}$$

si $1>p_1>2p_2$. La fonction restante en s_1 appartient à $L^2([0,t])$. Noter que la trace itérée, <u>en tant que fonction de</u> (x,y), est majorée par une fonction de la forme $a_t(s)\phi_t(x,y)$, $a_t(\cdot)\in L^2([0,t])$.

IV. INTEGRALES DE FEYNMAN ET PROCESSUS DE SAUTS

1. Dans le cas des potentiels du type du §II, formule (13), mais avec des coefficients a=k=0, il existe une méthode probabiliste qui permet de représenter la solution de l'équation de Schrödinger au moyen d'une formule de Feynman-Kac complexe, sans prolongement analytique. Cette méthode est due à Maslov et Chebotarev [13]. Nous allons la présenter ici.

On commence par une transformation de Fourier sur l'équation de Schr.

(1) $$\frac{1}{i}\dot{f} = -\frac{1}{2}\Delta f + Vf \qquad \left(\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

Si l'on désigne par $g(u)$ la transformée de Fourier de $f(x)$, et si V est la transformée de Fourier de la mesure complexe bornée α, on a

(2) $$\frac{1}{i}\dot{g}(u) = \frac{1}{2}|u|^2 g(u) + \int g(u+v)\alpha(dv)$$

Nous allons montrer que $g(u,t)=g_t(u)$ peut se mettre sous la forme

(3) $$g_t(u) = E_u[g_0(U_t)M_t]$$

où (U_t) est un certain processus à accroissements indépendants (d'un type très simple) et (M_t) est une fonctionnelle multiplicative complexe.

2. Soit d'abord μ une mesure positive, de masse $m<\infty$. Désignons par (U_t) le processus à accroissements indépendants dont la mesure de Lévy est μ : il s'agit d'un processus dont les trajectoires sont constantes par morceaux, avec un nombre fini de sauts sur l'intervalle $[0,t]$ (le nombre de sauts obéit à une loi de Poisson d'espérance mt). Le générateur est

$$Ag(u) = \int (g(u+v)-g(u))\mu(dv)$$

Posons

$$M_t = \prod_{s\leqq t} h(\Delta U_s)$$

où h est une fonction complexe bornée ; (M_t) est une fonctionnelle multiplicative intégrable, et les noyaux

$$Q_t g(u) = E_u[g(U_t)M_t]$$

sont bornés et forment un semi-groupe. Cherchons son générateur : on a

$$Q_t g(u) = e^{-mt}g(u) + mte^{-mt}\int g(u+v)h(v)\frac{1}{m}\mu(dv) + o(t)$$

si g est borélienne bornée. Par conséquent, le générateur est

$$Bg(u) = -mg(u) + \int g(u+v)h(v)\mu(dv)$$

et par conséquent, si l'on choisit h et μ de telle sorte que $h(v)\mu(dv)= i\alpha(dv)$ (par exemple, $\mu=|\alpha|$ et $h = id\alpha/d|\alpha|$) la relation (2) s'écrit

$$\dot{g} = Bg + Wg \quad \text{où } W \text{ est la fonction } m+\frac{i}{2}|u|^2$$

On sait comment ajouter au générateur le ≪ potentiel ≫ W : il s'agit d'une formule de Feynman-Kac ordinaire. Autrement dit, la fonctionnelle multiplicative intervenant dans la construction du semi-groupe ne doit pas être (M_t), mais plutôt

$$(4) \qquad M'_t = \prod_{s \leq t} h(\Delta U_s) \cdot e^{mt + \frac{i}{2}\int_0^t |U_s|^2 ds}$$

et alors le semi-groupe associé à la fonctionnelle correspond exactement à l'équation d'évolution (2).

Il est absolument indispensable que la mesure α soit bornée : le terme e^{mt} figure dans cette expression, et d'autre part le produit $\prod_{s \leq t}$ porte sur des termes de module 1, de la forme $\pm i$ si α est réelle. Il ne peut donc converger que si le nombre de sauts sur $[0,t]$ est fini. Cette méthode élégante ne permet donc pas d'aborder directement un potentiel en $|x|^2$. Pour des applications, voir [4].

REFERENCES

[1] ALBEVERIO (S.) et HOEGH-KROHN (R.). Mathematical theory of F. path integrals. Lecture Notes in M. 523, 1976

[2] BERTRAND (J.) et GAVEAU (B.). Transformation canonique et renormalisation pour certaines équations d'évolution . JFA 50, 1983, 81-99.

[3] CAMERON (R.H.) et STORVICK (D.A.).Some Banach algebras of analytic F. integrable functionals. Analytic Functions, LN 798, 1980, 18-67.

[4] COMBE (P.), HOEGH-KROHN (R.), RODRIGUEZ (R.), SIRUGUE (M.), SIRUGUE-COLLIN (M.). Poisson processes on groups and F. path integrals. Comm. Math. Phys. 77. 1980, 269-288 et J. Math. Phys. 23, 1982, 405-411.

[5] ELWORTHY (D.) et TRUMAN (A.). Feynman maps, Cameron Martin formulas and anharmonic oscillators. Ann IHP 41, 1984, 115-142.

[6] GAVEAU (B.) et KAC (M.). A probabilistic formula for the quantum N-body problem... JFA 66, 1986, 308-322.

[7] ISOBE (E.) et SATO (S.). Wiener-Hermite expansion of a process generated by an Ito stochastic differential equation. J. Appl. Prob. 20, 1983, 754-765.

[8] ITO (K.). Wiener integral and F. integral. Proc. 4th Berkeley Symp., vol. 2, 1961, 227-238. Cf. aussi Generalized uniform complex measures in the hilbertian metric space with application to the F. integral, Proc. 5th Berkeley Symp., II-1, 1967, 145-161.

[9] JOHNSON (G.W.) et LAPIDUS (M.L.). Generalized Dyson series, F. diagrams F. integral and F's operational calculus. Memoirs AMS 351, 1986.

[10] JOHNSON (G.W.) et SKOUG (D.L.). Scale invariant measurability in Wiener space. Pacific J.M. 83, 1979, 157-176.

[11] ----- Notes on the Feynman integral. Pacific J.M. 93, 1981, 313-324. JFA 41, 1981, 277-289.

[12] KALLIANPUR (G.) et BROMLEY (C.). Generalized F. integration using analytic continuation in several complex variables. Stochastic analysis and applications, 217-267. Marcel Dekker 1984.

[13] MASLOV (V.P.) et TCHEBOTAREV (A.M.). The definition of F. integrals in the p-representation. Soviet Math. Doklady 17, 1976, 75-76. Aussi : Processus de sauts et leurs applications dans la mécanique quantique. Intégrales de Feynman, Marseille 1978, 58-72. Lect. Notes in Phys. 106.

[14] MEYER (P.A.) et YAN (J.A.). A propos des distributions sur l'espace de Wiener. Séminaire de Probabilités XX, 1987, 8-26. LN in M. 1247.

[15] STREIT (L.) et HIDA (T.). Generalized brownian functionals and the F. integral. Stoch. Proc. Appl. 16, 1983, 55-69.

[16] ZAKAI (M.). Malliavin derivatives and derivatives of functionals of a Wiener process with respect to a scale parameter. Ann. Prob. 13, 1985, 609-615.

HU Yao Zhong   Paul-André MEYER
IRMA, rue du G^{al} Zimmer
67084 Strasbourg Cedex

Hu Y.-Z. : Institut de Recherche Mathématique
Academia Sinica, Wuhan, R.P. de Chine

Note sur les épreuves

H. Doss et Y. Le Jan nous ont communiqué la très intéressante référence suivante, qui contient la même formule que [7] pour le développement en chaos de Wiener de la solution d'une e.d.s..

VERETENNIKOV (A.Y) et KRYLOV (N.V.). On explicit formulas for solutions of stochastic differential equations. Mat. Sbornik, 100, 1976 (tr. angl. Math USSR Sbornik, 29, 1976, p.239-256).

HU Yao Zhong , P.A. MEYER
IRMA, rue du G^{al} Zimmer
67084 Strasbourg Cedex

HU Y.-Z. : Institut de Recherche
Mathématique, Academia Sinica, Wuhan
R.P. de Chine