

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

H. SADI

Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en pseudo-loi des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 434-437

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__434_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR LA CONVERGENCE EN PSEUDO-LOI DES PROCESSUS

H. SADI, Université de Paris VI, Laboratoire du Calcul des
Probabilités, 4 place Jussieu tour 56 3^e étage 75252 Cedex 05

Soient $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des processus à valeurs dans $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R})$ qu'on munit de la topologie de la convergence en mesure, c'est-à-dire qu'on considère $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R})$ comme un sous-espace de $\mathbb{L}^0([0,1], \mathbb{R}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On donne une condition nécessaire et suffisante particulièrement simple pour que X^n converge vers X en loi en tant que variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{L}^0([0,1], \mathbb{R}, \lambda)$. Plus généralement, soient (T, \mathcal{T}, μ) un espace standard de masse finie et X^n et X des processus mesurables indexés par T prenant leurs valeurs dans \mathbb{R} ; on a le résultat suivant:

Théorème: X^n converge en loi vers X dans $\mathbb{L}^0(T, \mathcal{T}, \mu)$ si et seulement si pour toute sous-suite (n') , il existe une sous-sous-suite (n'') et un ensemble $S \subseteq T$ vérifiant $\mu(S^c) = 0$ tels que les lois finidimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}^{n''}, \dots, X_{t_k}^{n''})$ convergent vers $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ pour tous $t_1, \dots, t_k \in S$.

Corollaire: Si $\mathcal{L}(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \rightarrow \mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ alors $\mathcal{L}(X^n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ en tant que variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{L}^0(T, \mu)$.

A la fin de ce papier nous donnerons la démonstration qui permet de passer de $[0,1]$ à n'importe quel espace standard T de masse finie. Avant de passer à la démonstration rappelons les liens qu'il y a avec les pseudo-lois et les pseudo-trajectoires introduites par C. Dellacherie et P.A. Meyer dans [2]. Notons par \mathbb{P} , l'espace compact des probabilités sur $[0,1] \times \bar{\mathbb{R}}$ et associons à tout $w \in \mathbb{D}$ un élément $\tilde{w} \in \mathbb{P}$ appelé pseudo-trajectoire de la manière suivante: La pseudo-trajectoire \tilde{w} est l'image de la mesure λ sur $[0,1]$ par l'application.

$$t \rightarrow (t, w(t))$$

On note $\Psi \subseteq \mathbb{P}$ l'espace des pseudo-trajectoires ainsi obtenu. On construit la trajectoire w à partir d'un "représentant" u de \tilde{w} (défini à un ensemble de

mesure nulle près) ainsi:

$$w(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds$$

La topologie héritée par Ψ correspond sur \mathbb{D} à celle induite par la convergence en mesure. C'est précisément là qu'est le lien entre pseudo-lois et lois dans \mathbb{L}^0 .

D'autres auteurs, I.I. Gikhman et A.V. Skorokhod [4], H. Cremers et D. Kadelka [1] ont étudié les théorèmes limites pour des processus à valeurs dans $\mathbb{L}^p([0,1], \lambda)$ $p \geq 1$, P.A. Meyer et W.A. Zheng [5] et R. Rebolledo [6] dans des articles récents ont étudié le cas $p=0$. Rebolledo [6] a donné une condition suffisante de convergence en pseudo-loi pour des processus à valeurs mesures, qui correspond aux critères habituels de convergence en loi, à savoir la convergence finidimensionnelle et la tension. Tandis que Meyer et Zheng [5] ont donné une condition nécessaire pour la convergence en pseudo-loi. Il s'avère que cette condition, qui est celle qui est énoncée dans le théorème précédent est aussi suffisante. La démonstration de la condition nécessaire figure dans Meyer et Zheng [5] et consiste à appliquer le théorème de Skorokhod pour obtenir une convergence $\mathbb{L}^1(\Omega \times [0,1], dP \times dt)$ après un changement d'échelle, puis une convergence presque sûre pour une sous-suite.

La démonstration de la condition suffisante utilise les mêmes techniques mais fait appel de manière essentielle au résultat suivant de L.Š. Grinblat [4]:

Théorème: [Grinblat] : Soient $p \geq 1$, (X_t^n) et X_t des processus définis pour $t \in [0,1]$ et supposons que:

$$\mathbb{E}(|X_t^n|^p) \leq C$$

$$\forall t_1, \dots, t_k \in [0,1] \quad \mathbb{L}(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \text{ tend vers } \mathbb{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

$$\mathbb{E}(|X_t^n|) \text{ tend vers } \mathbb{E}(|X_t|) \quad \forall t \in [0,1]$$

Alors pour toute fonctionnelle continue f sur $\mathbb{L}^p([0,1], \lambda)$ la loi de $f(X_t^n)$ tend vers la loi de $f(X_t)$.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Prokhorov et une caractérisation des compacts de $\mathbb{L}^p([0,1], \lambda)$

Revenons maintenant à la démonstration de la condition suffisante du théorème énoncé au début dans le cas $T=[0,1]$: On suppose donc que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n'') et un ensemble A

vérifiant $\lambda(A^c)=0$ telle que:

$\mathcal{L}(X_{t_1}^{n''}, \dots, X_{t_k}^{n''})$ tende vers $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \quad \forall t_1, \dots, t_k \in A$, il s'agit alors de montrer que X^n converge en loi vers X dans \mathbb{L}° .

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ un homéomorphisme. Alors $\mathcal{L}(\varphi \circ X_{t_1}^{n''}, \dots, \varphi \circ X_{t_k}^{n''})$ tend vers $\mathcal{L}(\varphi \circ X_{t_1}, \dots, \varphi \circ X_{t_k})$ pour tous $t_1, \dots, t_k \in A$.
De plus $\varphi \circ X^{n''}$ et $\varphi \circ X$ sont à trajectoires bornées donc dans $\mathbb{L}^1([0, 1],]-1, 1[, \lambda)$. Considérés comme tels on ne modifie pas ces processus en posant:

$$\varphi \circ X_t^{n''} = 0 \text{ et } \varphi \circ X_t = 0 \text{ pour tout } t \in A^c$$

Les nouveaux processus ainsi définis vérifient clairement les hypothèses du théorème de Grinblat pour $p=1$ et donc les lois $\mathcal{L}(\varphi \circ X^{n''})$ tendent vers $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^1([0, 1],]-1, 1[, \lambda)$, donc dans $\mathbb{L}^\circ([0, 1],]-1, 1[, \lambda)$. Inversement φ^{-1} induit une application continue de $\mathbb{L}^\circ([0, 1],]-1, 1[, \lambda)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0, 1], \mathbb{R}, \lambda)$, donc $\mathcal{L}(X^{n''}) \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

Finalement on a montré que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n'') telles que les lois de $X^{n''}$ convergent vers la même limite à savoir la loi de X dans $\mathbb{L}^\circ([0, 1], \mathbb{R}, \lambda)$. On en conclut donc que X et X^n considérés comme variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{L}° vérifient:

$$\mathcal{L}(X^n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

Terminons par la démonstration de l'extension signalée au début:

On remplace $([0, 1], \lambda)$ par un espace standard (T, \mathcal{T}, μ) c'est-à-dire un espace mesuré tel qu'il existe φ mesurable

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow T$$

$$\text{vérifiant} \quad \mu(U) = \lambda(\varphi^{-1}(U)) \quad \forall U \in \mathcal{T}$$

1) Preuve de la condition suffisante :

Soient Y^n et Y des processus mesurables par rapport à la tribu complétée de $\mu \times P$ et tels que pour toute sous-suite (n') il existe une sous-sous-suite (n'') et un ensemble S vérifiant $\mu(S^c)=0$ tel que:

$$\forall t_1, \dots, t_k \in S \quad \mathcal{L}(Y_{t_1}^{n''}, \dots, Y_{t_k}^{n''}) \rightarrow \mathcal{L}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$$

On définit alors sur $[0, 1]$ des processus X^n et X comme suit :

$$X_s^n(\omega) = Y_{\varphi(s)}^{n''}(\omega) \text{ et } X_s(\omega) = Y_{\varphi(s)}(\omega)$$

On a alors:

$\mathcal{L}(X_{s_1}^{n''}, \dots, X_{s_k}^{n''})$ tend vers $\mathcal{L}(X_{s_1}, \dots, X_{s_k}) \quad \forall s_1, \dots, s_k \in [\varphi^{-1}(S)]$, le résultat établi dans le cadre $[0, 1]$ permet alors de conclure que $\mathcal{L}(X^n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0, 1], \mathbb{R}, \lambda)$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}(Y^n) \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ dans $\mathbb{L}^\circ(T, \mathcal{T}, \mu)$

2) Condition nécessaire:

Si $\mathcal{L}(Y^n) \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ dans $\mathbb{L}^\circ(T, \mathcal{T}, \mu)$ on a $\mathcal{L}(X^n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1], \mathbb{R}, \lambda)$ car l'application φ induit une application continue de $\mathbb{L}^\circ(T)$ dans $\mathbb{L}^\circ([0,1])$, par suite on en déduit que les lois finidimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \rightarrow \mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ pour une sous-suite n'' de toute sous-suite n' . Il est alors clair que $\mathcal{L}(Y_{t_1}^{n''}, \dots, Y_{t_k}^{n''}) \rightarrow \mathcal{L}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$.

Bibliographie:

- [1] H. Cremers et D. Kadelka: On weak convergence of integral functionals of stochastic processes with applications to processes taking paths in \mathbb{L}_p^E Stochastic processes and their applications (21), North Holland 1986, 305-317.
- [2] C. Dellacherie et P.A. Meyer: Probabilités et potentiel, Herman vol (1) 1975
- [3] I.I. Gikhman et A.V. Skorokhod: Introduction to the theory of the random processes W.B. Saunders Company, 1969.
- [4] L.Š. Grinblat: A limit theorem for measurable random processes and its applications, Proceedings of AMS vol (61) 1976, 371-376.
- [5] P.A. Meyer et W.A. Zheng : Tightness criteria for laws of semi-martingales, Annales de l'Institut Henri Poincaré vol (20) n°4, 1984.
- [6] R. Rebolledo: Topologie faible et méta-stabilité, Séminaire de probabilités XXI, Lect. Notes in Mathematics n° 1247, Springer-Verlag 1987, 545-562.