Marc Yor

Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 217-224
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__217_0>

REMARQUES SUR CERTAINES CONSTRUCTIONS DES MOUVEMENTS BROWNIENS FRACTIONNAIRES.

Marc YOR (*)

En préparation de l'article suivant (Weinryb-Yor [5]) dans ce volume, on présente en détail quelques réalisations des mouvements browniens fractionnaires indexés par $\mathbb{R}^d$, et les liens qui existent entre ces réalisations, en mettant l'accent sur la réalisation particulière qui apparait dans les théorèmes de limite centrale obtenus en [5].

1. *Définition des mouvements browniens fractionnaires.*

Pour tout entier $d \geq 1$, et tout réel γ tel que : $0 < \gamma \leq 2$, il existe un processus gaussien $(X_x \; ; \; x \in \mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles, centré, tel que :

$$(1) \qquad X_0 = 0 \quad \text{et} \quad E[(X_x - X_y)^2] = |x-y|^\gamma \qquad (x,y \in \mathbb{R}^d)$$

Kahane ([2], chapter 18) étudie ces processus de manière approfondie.

Paul Lévy a étudié le cas $\gamma = 1$; $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$ est alors appelé mouvement brownien (de Lévy) à d paramètres. Schoenberg [4] a montré l'existence d'un processus gaussien vérifiant (1) dans le cas général : $0 < \gamma \leq 2$.

B. Mandelbrot a proposé le nom de mouvement brownien fractionnaire pour le cas général. En conséquence, nous désignerons simplement par l'abréviation BF(d,γ) tout processus gaussien réel centré satisfaisant (1).

Le cas $\gamma = 2$ n'ést pas intéressant car le processus X_x peut alors être réalisé au moyen d'une variable gaussienne N centrée réduite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par la formule : $\qquad X_x = x \cdot N$

(pour $x,y \in \mathbb{R}^d$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire euclidien ; plus loin, nous utiliserons la notation $A \cdot x$ pour désigner l'image du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ par la matrice A).

Nous montrons ci-dessous comment construire le processus BF(d,γ) pour tout entier $d \geq 1$, et tout réel γ tel que $0 < \gamma < 2$ à partir d'une mesure gaussienne définie sur les champs de matrices $d \times d$.

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

2. *Préliminaires.*

On munit l'espace des matrices réelles $d \times d$ du produit scalaire de Hilbert-Schmidt : $((\varphi,\psi)) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}\,\psi_{ij}$ et de la norme associée : $\|\varphi\| = ((\varphi,\varphi))^{1/2}$.

Dans la suite, on appelle champ de matrices $d \times d$ toute application mesurable $\Phi : x \to \Phi(x)$ à valeurs dans les matrices $d \times d$.

Un champ de matrices $d \times d$ est dit de carré intégrable s'il satisfait :

$$(2) \qquad \int dx \ \|\Phi(x)\|^2 < \infty.$$

Soit maintenant B mesure gaussienne définie sur les champs de matrices $d \times d$ de carré intégrable et admettant pour covariance :

$$(3) \qquad E[B(\Phi)\ B(\Psi)] = \int dx \ ((\Phi(x),\ \Psi(x))).$$

A l'évidence, une telle mesure gaussienne $B(\Phi)$ peut être construite à l'aide de d^2 mesures gaussiennes indépendantes $(B_{ij}(\Phi_{ij})\ ;\ 1 \leq i,j \leq d)$ ayant chacune pour intensité la mesure de Lebesgue, au moyen de la formule : $B(\Phi) = \sum_{i,j} B_{i,j}(\Phi_{i,j})$.

Considérons maintenant, pour tout $p > 0$, le champ de matrices

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p}\,\sigma_p(x) \quad \text{où :} \qquad \sigma_p(x)_{i,j} = \delta_{i,j} - p\,\frac{x_i x_j}{|x|^2}\,.$$

La matrice $\gamma_p(x)$ apparaît de façon naturelle dans de nombreux calculs (voir, par exemple, Krylov [3], Yor [6], et surtout, en théorie de la turbulence), car elle satisfait :

$$\gamma_p(x) = \nabla_x\left(\frac{x}{|x|^p}\right).$$

Les propriétés du champ σ_p présentées dans le Lemme jouent un rôle crucial dans la suite.

Lemme 1 : *1) Pour tout $x \neq 0$, la matrice $\sigma_p(x)$ est caractérisée par les deux propriétés :*

$$\sigma_p(x)\cdot x = (1-p)x\ ;\quad \sigma_p(x)\cdot y = y, \quad si \quad x\cdot y = 0.$$

2) Pour toute transformation orthogonale T de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$T^*\sigma_p(Tx)T = \sigma_p(x).$$

3. *Enoncé et démonstration du théorème.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème : Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$: $\Phi_y^p(x) = \gamma_p(x-y) - \gamma_p(x)$. *Alors :*

1) Pour tout $y \neq 0$, *le champ de matrices* Φ_y^p *est de carré intégrable dès que :*

$$\frac{d}{2} - 1 < p < \frac{d}{2}. \tag{4}$$

2) Si la condition (4) est satisfaite, le processus gaussien

$$(B(\Phi_y^p) \; ; \; y \in \mathbb{R}^d)$$

est, à une constante multiplicative près, un processus $BF(d,d-2p)$.

Remarque : La condition (4) équivaut à :

$$0 < d-2p < 2.$$

Nous avons donc obtenu une réalisation du processus $BF(d,\gamma)$ pour tout γ tel que $0 < \gamma < 2$.

Démonstration : 1) Le champ de matrices Φ_y^p est de carré intégrable si, et seulement si, pour tous $i,j \in \{1,2,\dots,d\}$, on a :

$$\int dx (\Phi_y^p(x)_{i,j})^2 < \infty. \tag{5}$$

En particulier, pour $i = j$, la condition (5) est réalisée dès que :

$$\int dx \left(\frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)^2 < \infty. \tag{6}$$

Cette intégrale est finie au voisinage de 0 et de y si, et seulement si :

$$2p - (d-1) < 1, \quad \text{c'est-à-dire : } p < \frac{d}{2}.$$

Elle est finie au voisinage de l'infini dès que :

$$2(p+1) - (d-1) > 1, \quad \text{c'est-à-dire : } p > \frac{d}{2} - 1.$$

Pour voir cela, on utilise le théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\frac{1}{u^p} - \frac{1}{v^p} = (u-v)\,\frac{1}{\theta^{p+1}}, \quad \text{où :} \quad u < \theta < v.$$

Il nous reste maintenant à montrer que, sous la condition (4), on a :

$$\int dx(\Phi_y^p(x)_{i,j})^2 < \infty \qquad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Posons $\theta_{ij}(x) = \dfrac{x_i x_j}{|x|^2}$. Il s'agit d'estimer la finitude de :

$$\int dx\left(\frac{1}{|x-y|^p}\,\theta_{ij}(x-y) - \frac{1}{|x|^p}\,\theta_{ij}(x)\right)^2$$

(7) $$\leq 2\int dx\left(\frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)^2 + 2\int \frac{dx}{|x|^{2p}}\,(\theta_{ij}(x-y) - \theta_{ij}(x))^2.$$

La première intégrale figurant en (7) est finie ; d'autre part, on a :

$$\theta_{ij}(x-y) - \theta_{ij}(x) = -y\cdot\nabla\theta_{ij}(\xi)$$

pour un point ξ appartenant au segment $[x-y,x]$, et il est facile de montrer que :

$$|\nabla\theta_{ij}(\xi)|^2 \leq \frac{C}{|\xi|^2}\,.$$

De cette majoration et de l'hypothèse $p > \frac{d}{2} - 1$, on déduit la finitude de la seconde intégrale qui figure en (7).

2) Pour démontrer la seconde assertion du théorème, il nous suffit de calculer, pour $y,z \in \mathbb{R}^d$:

$$E[(B(\Phi_y^p) - B(\Phi_z^p))^2] = \int dx\,\|\Phi_y^p(x) - \Phi_z^p(x)\|^2$$

$$= \int dx\,\|\gamma_p(x-y) - \gamma_p(x-z)\|^2 = \int dx\,\|\gamma_p(x-(y-z)) - \gamma_p(x)\|^2.$$

Le problème est donc ramené à démontrer que la fonction

$$\varphi_p(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx\,\|\gamma_p(x-\xi) - \gamma_p(x)\|^2$$

satisfait : (8) $\varphi_p(\xi) = c_{p,d}|\xi|^{d-2p}$, pour une certaine constante $c_{p,d}$.

Pour cela, il nous suffit de remarquer que :

- d'une part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, et tout $\lambda > 0$, $\varphi_p(\lambda\xi) = \lambda^{d-2p}\,\varphi_p(\xi)$;

- d'autre part, φ_p est une fonction radiale, ce qui équivaut à montrer que pour toute transformation orthogonale T de $\mathbb{R}^d$:

$$\varphi_p(T\xi) = \varphi_p(\xi).$$

Cette propriété découle aisément de la seconde assertion du lemme 1.

4. *Commentaires.*

(4.1) Les raisonnements que nous avons faits ci-dessus avec le champ de matrices

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p}\,\sigma_p(x)$$

sont également valables avec la famille de champs indexée par les 2 paramètres p,ν pour tout $\nu \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_{p,\nu}(x) = \frac{1}{|x|^p}\,\sigma_\nu(x).$$

Ainsi, si l'on pose : $\Phi_y^{p,\nu}(x) = \gamma_{p,\nu}(x-y) - \gamma_{p,\nu}(x)$,

le processus gaussien : $X_y^\nu \overset{\text{def}}{=} B(\Phi_y^{p,\nu})$

est un multiple du processus $BF(d,d-2p)$.

Remarquons maintenant que l'on a :

$$\Phi_y^{p,\nu}(x) = \Phi_y^{p,o}(x) - \nu\Psi_y^p(x)$$

où :

$$\Psi_y^p(x)_{i,j} = \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^{p+2}} - \frac{x_i x_j}{|x|^{p+2}}\,.$$

Posons : $X_y = B(\Phi_y^{p,o})$ et $Y_y = B(\Psi_y^p)$.

On a : $X_y^\nu = X_y - \nu Y_y$.

Pour décrire la loi conjointe des processus $(X^\nu, \nu \in \mathbb{R})$, il suffit donc de connaître la loi du couple (X,Y).

Or, on a :

$$E[X_y\ Y_z] = \int dx\ ((\Phi_y^{p,o}(x), \Psi_z^p(x)))$$

$$= \int dx \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)\left(\frac{(x_i-z_i)^2}{|x-z|^{p+2}} - \frac{x_i^2}{|x|^{p+2}}\right)$$

$$= \int dx \left(\frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)\left(\frac{1}{|x-z|^p} - \frac{1}{|x|^p}\right)$$

$$= \frac{1}{d} E[X_y\ X_z].$$

On déduit de ce calcul la relation :

(9) $$E[Y_z|X] = \frac{1}{d} X_z.$$

Finalement, on peut donc obtenir toute la famille $(X^\nu\ ;\ \nu \in \mathbb{R})$ des processus BF(d,d-2p) comme combinaison linéaire des deux processus indépendants X^o et X^d.

(4.2) Nous terminons cette Note par une remarque sur la représentation de BF(d,d-2p) sous la forme : $X_y = B(\Phi_y^{p,o})$, $y \in \mathbb{R}^d$, dégagée ci-dessus.

Les matrices $\Phi_y^{p,o}(x)$ étant toutes des multiples (dépendant de x) de la matrice identité, il revient au même de représenter BF(d,d-2p), à une constante multiplicative près, sous la forme :

(10) $$\tilde{X}_y = \int \beta(d\xi)\left(\frac{1}{|\xi+y|^p} - \frac{1}{|\xi|^p}\right) \qquad (y \in \mathbb{R}^d)$$

où $\beta(d\xi)$ désigne une mesure gaussienne réelle sur $\mathbb{R}^d$, d'intensité $d\xi$.

Or, la représentation de BF(d,d-2p) qui est généralement utilisée (voir Cartier [1], Kahane [2]) est :

(11) $$\int \left(b(dx),\ \frac{1-\exp iy\cdot x}{|x|^{d-p}}\right) \qquad (y \in \mathbb{R}^d)$$

où $b(dx) = b_1(dx) + ib_2(dx)$ est obtenue à l'aide de deux mesures gaussiennes b_1 et b_2 réelles, indépendantes sur $\mathbb{R}^d$, d'intensité dx, et où $(z,z') = \mathrm{Re}(z\bar{z}')$ désigne le produit scalaire usuel des deux nombres complexes z et z'.

Nous remarquons ici que l'équivalence des deux représentations (10) et (11) peut s'expliquer à l'aide du

Lemme 2 : Soit d *entier,* $d \geq 1$*,* $y \in \mathbb{R}^d$*, et* α *tel que* $\frac{d}{2} < \alpha < \frac{d}{2} + 1$*.*
La transformée de Fourier-Plancherel de la fonction, définie sur $\mathbb{R}^d$*, par :*

$$x \to \frac{1-e^{iy\cdot x}}{|x|^\alpha} \quad \textit{est :} \qquad \xi \to c\left(\frac{1}{|\xi+y|^{d-\alpha}} - \frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}}\right)$$

pour une certaine constante c.

Démonstration : La transformée de Fourier-Plancherel est donnée par :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{|x|^\alpha} \left(e^{i\xi\cdot x} - e^{i(\xi+y)\cdot x}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left\{\frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}} F_\alpha(R|\xi|) - \frac{1}{|\xi+y|^{d-\alpha}} F_\alpha(R|\xi+y|)\right\}$$

où $F_\alpha(R) = \int_{|x|\leq R} \frac{dx}{|x|^\alpha} e^{i1\cdot x}$, en notant $1 = (1,0,\ldots,0)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que $F_\alpha(R)$ converge vers une limite finie, lorsque $R \to \infty$.

Rappelons maintenant que, si φ est une fonction radiale de $L^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier Φ est également radiale et est donnée, à une constante multiplicative près, par :

$$\Phi(\rho) = \int_0^\infty dr\ r\left(\frac{r}{\rho}\right)^\nu J_\nu(r\rho)\ \varphi(r)$$

où $\nu = \frac{d}{2} - 1$ et J_ν est la fonction de Bessel d'indice ν.

En conséquence, on a : $F_\alpha(R) = \int_0^R dr \frac{J_\nu(r)}{r^\beta}$ où $\beta = \alpha - (1+\nu)$ appartient, sous l'hypothèse du lemme, à l'intervalle $]0,1[$.

Dans le cas $d = 3$ $(\nu = 1/2)$, on a : $J_\nu(r) = c\,\frac{\sin r}{r^{1/2}}$ et la convergence, lorsque $R \to \infty$, de : $\int_0^R dr \frac{\sin r}{r^\gamma}$ est bien connue pour tout $\gamma \in]0,2[$

(ici : $\gamma = \beta + \frac{1}{2} \in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$). Pour une dimension d générale, on a (cf. [7], p. 364) :

$$J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\ \cos\left(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

Le même résultat de convergence assure encore la convergence de $F_\alpha(R)$, lorsque $R \to \infty$.

REFERENCES :

[1] P. CARTIER : Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres. Séminaire de Probabilités V. Lect. Notes in Maths 191, p. 58-75 (1971).

[2] J.P. KAHANE : Some random series of functions. (Second edition). Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 5 (1985).

[3] N.V. KRYLOV : Controlled diffusion processes. Springer-Verlag, Berlin (1980).

[4] I. SCHOENBERG : Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc. 44, p. 522-536 (1938).

[5] S. WEINRYB, M. YOR : Le mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection. Dans ce volume.

[6] M. YOR : A propos de l'inverse du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$. Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 21, n° 1, p. 27-38 (1984).

[7] M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN : Handbook of Mathematical Functions. New-York, Dover (1970).