PHILIPPE BIANE

Sur un calcul de F. Knight

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 190-196
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__190_0>

SUR UN CALCUL DE F. KNIGHT

par Ph. Biane
C.N.R.S., L.A. 212, Tour 45-55 5[e] étage
Université Paris VII 2 place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

Introduction

Le mouvement Brownien possède de nombreuses propriétés d'invariance (par changement d'échelle, translation, inversion du temps, etc...) qui donnent lieu à des identités remarquables entre les lois de certaines de ses fonctionnelles. Dans [1]...[4], on a montré comment certaines identités, dues à Chung, Kennedy, Verwaat, s'interprétaient au moyen de décompositions de la trajectoire Brownienne. On se propose ici, à titre d'exemple d'application des méthodes développées dans [1]...[4], d'expliquer une identité donnée par F. Knight [5]

a) L'identité de Knight

Soit B un mouvement Brownien réel issu de 0. On note l_t^0 son temps local en 0, $\tau(\alpha) = \inf\{ t>0 \ / \ l_t^0>\alpha \}$, $M_\alpha = \sup\{ |B_s| \ / \ s\le\tau(\alpha) \}$. F. Knight a calculé la loi de la variable $\frac{\tau(\alpha)}{M_\alpha^2}$ en donnant sa transformée de Laplace:

$$E[\exp-\lambda \frac{\tau(\alpha)}{M_\alpha^2}] = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\mathrm{sh}2\sqrt{2\lambda}}$$

(Le fait que la loi de cette variable ne dépende pas de α résulte d'un argument de changement d'échelle usuel)

En particulier, elle a la même loi que le premier temps d'atteinte de 2 par un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 (cf. Itô McKean [6]). C'est cette égalité en loi que nous nous proposons d'expliquer ici par des considérations trajectorielles.

b)Quelques notations:

On va utiliser dans la suite des notations introduites dans [2], §6. Pour la commodité du lecteur nous les rappelons ici.

$\mathcal{W}$ désigne l'espace des fonctions continues ω, définies sur un intervalle $[0,\zeta(\omega)]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On va définir des opérations sur $\mathcal{W}$:

"Composition": soient $\omega_1,\omega_2\in \mathcal{W}$, $\omega_1\circ\omega_2$ est défini par:

$$\zeta(\omega_1\circ\omega_2) = \zeta(\omega_1)+\zeta(\omega_2)$$

$$\begin{aligned}\omega_1\circ\omega_2(s) &= \omega_1(s), && \text{si } 0\le s\le\zeta(\omega_1)\\ &= \omega_1(\zeta(\omega_1))+\omega_2(s-\zeta(\omega_2))-\omega_2(0) && \text{si } \zeta(\omega_1)\le s\le\zeta(\omega_1\circ\omega_2)\end{aligned}$$

"Retournement": soit $\omega\in \mathcal{W}$, $\check{\omega}$ est défini par:

$$\zeta(\check{\omega}) = \zeta(\omega)$$

$$\check{\omega}(s) = \omega(\zeta(\omega)-s) \quad \text{si } 0\le s\le\zeta(\omega).$$

"Arrêt": soit $T:\mathcal{W}\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application mesurable, ω^T est défini par:

$$\zeta(\omega^T) = T(\omega)\wedge\zeta(\omega)$$

$$\omega^T(s) = \omega(s) \quad \text{si } 0\le s\le\zeta(\omega^T)$$

"Translation": soit $a\in\mathbb{R}$, ${}^a\omega$ est défini par:

$$\zeta({}^a\omega) = \zeta(\omega)$$

$${}^a\omega(s) = \omega(s)+a \quad \text{si } 0\le s\le\zeta(\omega).$$

Si M et N sont des mesures sur $\mathcal{W}$, on notera $M\circ N$ (resp. $\check{M}$, M^T, ${}^aM$) l'image de $M\otimes N$ (resp. M, M, M) par l'application $\circ$ (resp. $\check{.}$, $.^T$, ${}^a.$).
On utilisera par la suite les mesures suivantes sur $\mathcal{W}$:

P = la loi du mouvement Brownien réel issu de 0

S = la loi du processus de Bessel de dimension 3 issu de 0

N_a = la loi du mouvement Brownien issu de 0 et conditionné à ne pas dépasser a en valeur absolue.

Cette dernière loi est définie de la façon suivante:
si n désigne la mesure d'excursions du mouvement Brownien réel hors de 0, la mesure sur $\mathcal{W}$: $n(.1_{\{\sup|\omega|\le a\}})$ est la mesure d'excursions d'une diffusion sur $\mathbb{R}$, dont on note la loi N_a. (On peut montrer, par exemple en utilisant les techniques de grossissement de filtration (cf. Jeulin [7]), que cette diffusion a pour générateur infinitésimal:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \left[\frac{1}{x+a} 1_{\{-a<x<0\}} + \frac{1}{x-a} 1_{\{0<x<a\}} \right] \frac{d}{dx}).$$

On note l_t^x la famille des temps locaux de l'élément ω de $\mathcal{W}$ (pour toutes les mesures que nous aurons à considérer l_t^x existe p.s. et admet une version bicontinue en (x,t)).

On utilisera également les temps définis sur $\mathcal{W}$ par:
$T_x = \inf\{ t\ge0 \ / \ \omega(t)=x \}$
$R_x = \inf\{ t\ge0 \ / \ |\omega(t)|=x \}$
$\tau(\alpha) = \inf\{ t\ge0 \ / \ l_t^0 \ge \alpha \}$;

c)Une transformation de la trajectoire Brownienne

On va énoncer ici le résultat principal de cet article et en déduire l'identité de Knight.

Soit $\omega \in \mathcal{W}$, on pose:

$$M(\omega) = \sup_{0\le s\le\zeta(\omega)}|\omega(s)| \ , \ R(\omega) = \inf\{ t\ge0 \ / \ |\omega(t)|=M(\omega) \} \ ,$$
$$g(\omega) = \sup\{ t\le R \ / \ \omega(t)=0 \} \ , \ d(\omega) = \inf\{ t\ge R \ / \ \omega(t)=0 \}$$

On définit la transformation $\mathbb{T} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ par:

$$\zeta(\mathbb{T}\omega) = \zeta(\omega)$$

$$\mathbb{T}\omega(s) = \begin{cases} \omega(s+g) & \text{si } \omega(R) = M \\ -\omega(s+g) & \text{si } \omega(R) = -M \end{cases} \qquad \text{pour } 0\le s\le R-g$$

$$\mathbb{T}\omega(s) = M + \omega(s-R+g) \qquad \text{pour } R-g\le s\le R$$

$$\mathbb{T}\omega(s) = M + \omega(s-R+d) \qquad \text{pour } R\le s\le \zeta+R-d$$

$$\mathbb{T}\omega(s) = \begin{cases} M + \omega(\zeta+R-s) & \text{si } \omega(R) = M \\ M - \omega(\zeta+R-s) & \text{si } \omega(R) = -M \end{cases} \qquad \text{pour } \zeta+R-d\le s\le\zeta$$

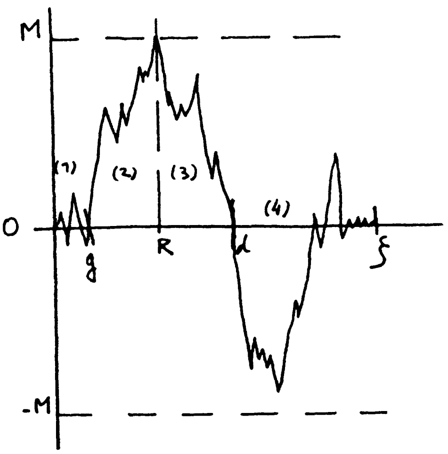
remarque: $\mathbb{T}$ n'est définie que sur le sous ensemble de W des ω tels que

$$\omega(0) = \omega(\zeta) = 0$$

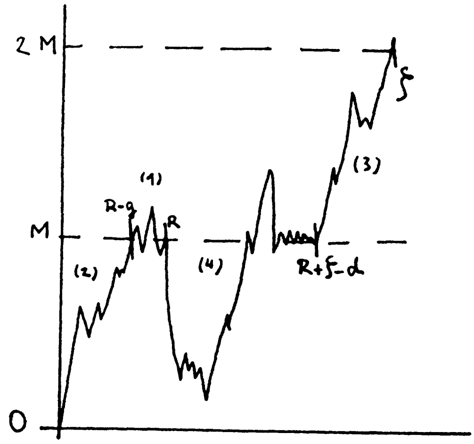
d'autre part, on a:

$$\mathbb{T}\omega(\zeta) = 2M(\omega) \quad \text{et} \quad 1^{0}_{\zeta}(\omega) = 1^{M(\omega)}_{\zeta}(\mathbb{T}\omega)$$

Voici un exemple sur un dessin:



ω



$\mathbb{T}\omega$

Enonçons maintenant le

Théorème:

La mesure $\int_0^\infty S^{T_{2x}} \frac{dx}{x}$ sur W est l'image par la transformation $\mathbb{T}$

de la mesure $\int_0^\infty P^{\tau(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha}$.

(La seconde de ces mesures étant portée par l'ensemble des ω tels que $\omega(0) = \omega(\zeta) = 0$, son image par $\mathbb{T}$ est bien définie).

La démonstration du Théorème occupe la suite de l'article; avant de commencer cette preuve, nous allons voir comment le résultat implique l'identité trouvée par Knight.

Tout d 'abord, on a:

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} 1_{(1<\alpha<2)} P^{\tau(\alpha)}[\exp-\lambda \frac{\tau(\alpha)}{M^2}] = \mathrm{Log}2.P^{\tau(1)}[\exp-\lambda \frac{\tau(1)}{M^2}]$$

car la loi de la variable $\frac{\tau(\alpha)}{M^2}$ sous $P^{\tau(\alpha)}$est indépendante de α, à cause des propriétés de scaling du mouvement Brownien.

D'autre part, cette quantité vaut, d'après le Théorème:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} S^{T_{2x}}[1_{(1<l^x_{T_{2x}}<2)} \exp-\lambda \frac{T_{2x}}{x^2}]$$

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{x} S^{T_2}[1_{(\frac{1}{2}l^1_{T_2} < \frac{1}{x} < l^1_{T_2})} \exp-\lambda T_2]$$, (d'après les propriétés de scaling du processus de Bessel de dimension 3).

$=\mathrm{Log}2.S^{T_2}[\exp-\lambda T_2]$, (en intégrant par rapport à x)

ce qui montre le résultat de Knight.

d) Preuve du Théorème

Le théorème résulte d'un certain nombre de résultats de décomposition de trajectoires de diffusions réelles que nous énonçons:

Lemme 1:

$$P^{R_x}=\int_0^\infty N_x^{\tau(\alpha)} \circ S^{T_x} \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x} d\alpha$$

Preuve: voir Jeulin [7] p. 107.

Lemme 2:

$$S^{T_{2x}}= S^{T_x} \circ \int_0^\infty {}^x(N_x^{\tau(\alpha)}) \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x} d\alpha \circ {}^x(S^{T_x}) = S^{T_x} \circ {}^x(P^{R_x})$$

Preuve: voir [2], p. 91, Prop.(7.8).

Lemme 3:

a) $\check{}(N_x^{\tau(\alpha)}) = N_x^{\tau(\alpha)}$

b) ${}^x(N_x^{\tau(\alpha)}) \circ {}^x(N^{\tau(\beta)}) = {}^x(N_x^{\tau(\alpha+\beta)})$

Preuve: a) résulte de l'invariance du mouvement Brownien par retournement du temps et b) de la propriété de Markov au temps $\tau(\alpha)$.

Lemme 4:

$$\int_0^\infty P^{\tau(\alpha)}\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{R}{P}{}^{x}[\,./\ \omega(R_x)=x\,]\circ \check{}(\overset{R}{P}{}^{x}[\,./\ \omega(R_x)=x\,]).$$

Preuve: voir [2] p. 89, Proposition 7.5.

Lemme 5:

$$\int_0^\infty P^{\tau(\alpha)}\,\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma\ \frac{e^{-(\beta+\gamma)/|x|}}{(\beta+\gamma)\,|x|^2}\ N_x^{\tau(\beta)}\circ \overset{T}{S}{}^{x}\circ\check{}(\overset{T}{S}{}^{x})\circ N_x^{\tau(\gamma)}$$

(ici, si $x\le 0$, $\overset{T}{S}{}^{x}$ désigne la loi de $-\omega$ sous $\overset{T}{S}{}^{-x}$ et $N_x \equiv N_{-x}$)

Preuve: on utilise successivement le lemme 4, puis le lemme 1, puis le lemme 3a), en remarquant que $\check{}(M\circ N)=\check{N}\circ\check{M}$, pour deux mesures M et N sur $\mathcal{W}$.

Lemme 6:

$$\int_0^\infty \overset{T}{S}{}^{2x}\,\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \overset{T}{S}{}^{x}\circ \left[\int_0^\infty {}^{x}(N_x^{\tau(\alpha)})\ \frac{e^{-\alpha/x}}{x}\, d\alpha\right]\circ {}^{x}(\overset{T}{S}{}^{x})\ \frac{dx}{x}$$

Preuve: résulte immédiatement du lemme 2.

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème:

La décomposition de la trajectoire donnée par le lemme 5 est exactement celle qui est utilisée pour effectuer la transformation $\mathbb{T}$, on a donc:

$$\mathbb{T}\left[\int_0^\infty P^{\tau(\alpha)}\,\frac{d\alpha}{\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma\ \frac{1}{|x|^2}\exp-\frac{(\beta+\gamma)}{|x|}\ \mathbb{T}\left[N_x^{\tau(\beta)}\circ \overset{T}{S}{}^{x}\circ\check{}(\overset{T}{S}{}^{x})\circ N_x^{\tau(\gamma)}\right] \quad \text{(lemme 5)}$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma\ \frac{1}{|x|^2}\exp-\frac{(\beta+\gamma)}{|x|}\ \overset{T}{S}{}^{x}\circ {}^{x}(N_x^{\tau(\beta)})\circ {}^{x}(N_x^{\tau(\gamma)})\circ {}^{x}(\overset{T}{S}{}^{x})$$

(par définition de $\mathbb{T}$)

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma\ \frac{1}{|x|^2}\exp-\frac{(\beta+\gamma)}{|x|}\ \overset{T}{S}{}^{x}\circ {}^{x}(N_x^{\tau(\beta+\gamma)})\circ {}^{x}(\overset{T}{S}{}^{x}) \quad \text{(lemme 3)}$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\alpha \, \frac{1}{|x|} \, \exp-\frac{\alpha}{|x|} \; S^{T_x} \circ {}^x(N_x^{\tau(\alpha)}) \circ {}^x(S^{T_x})$$

$$= \int_0^\infty S^{T_{2x}} \frac{dx}{x} \qquad \text{ce qui montre le théorème .}$$

Je remercie J.F. Le Gall pour une conversation au sujet de cet article.

Références:

[1] Ph. Biane: *Relations entre pont et excursions du mouvement Brownien réel* Annales de l'I.H.P., vol 22, n°1, 1986, p. 1-7.

[2] Ph. Biane et M. Yor: *Valeurs principales associées aux temps locaux Browniens*, Bull. Sc. math., 2^e série, 111, 1987, p. 23-101.

[3] Ph. Biane, J.F. Le Gall, et M. Yor: *Un processus qui ressemble au pont Brownien*, Séminaire de Probabilités XXI, Lecture Notes in Mathematics n° 1247 Springer 1987, p. 270-275.

[4] Ph. Biane et M. Yor: *Précisions sur le méandre Brownien*, à paraître au Bull. Sc. math, Vol 112, 1988.

[5] F. Knight: *Inverse Local Times, Positive Sojourns, and Maxima for Brownian Motion*, à paraître dans Astérisque , volume consacré au colloque Paul Lévy.

[6] K. Itô et H.P. McKean, Jr: *Diffusion Processes and their sample paths*, Academic Press (1965), New York.

[7] Th. Jeulin: *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, Lecture Notes in Mathematics n°833, Springer 1980.