SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

Intégration stochastique et géométrie des espaces de Banach

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 129-137

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__129_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__129_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTEGRATION STOCHASTIQUE ET GEOMETRIE DES ESPACES DE BANACH

Maurizio Pratelli
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa.
56100 PISA Italie

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Si H et K sont deux espaces de Hilbert séparables, on sait construire l'intégrale stochastique $\int X_s dM_s$, où M est une semimartingale à valeurs dans H et X un processus prévisible (borné) à valeurs dans $\mathcal{L}(H, K)$ (voir [2]); mais si l'on veut remplacer H et K par deux espaces de Banach, on rencontre des difficultés. Les deux exemples qui suivent (dont le premier est dû à Yor, voir [4]) mettent en évidence ces difficultés: ils seront repris et interprétés dans le paragraphe suivant.

Exemple 1.1 Soit $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ un mouvement brownien réel: on sait que, pour tout p avec $1 \leq p < 2$, il existe une suite t_n décroissant vers 0 telle que $\sum_n |B_{t_n} - B_{t_{n+1}}|^p = +\infty$ p.s. Considérons le processus prévisible borné, à valeurs dans l'espace ℓ^p , $H(\omega, s) = \sum_n I_{]t_{n+1}, t_n]}(s) \cdot e_n$ (où e_n est l'élément de la base canonique de ℓ^p): l'intégrale $\int H_s dX_s$, s'il existe, ne peut raisonnablement être que $\sum_n (B_{t_n} - B_{t_{n+1}}) \cdot e_n$, mais cette définition n'a pas de sens car $\sum_n |B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega)|^p = +\infty$ p.s.

Par contre, si $p \geq 2$ et $H(\omega, s) = \sum_n H_n(\omega, s) \cdot e_n$ est prévisible borné à valeurs dans ℓ^p , en définissant $\int H_s dB_s = \sum_n \left(\int H_{n,s} dB_s \right) e_n$ on vérifie (à l'aide des inégalités de Burkholder) que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \int_{]0,t]} H_s dB_s \right\|_{\ell^p}^p \right] &= \sum_n \mathbb{E} \left[\left| \int_{]0,t]} H_{n,s} dB_s \right|^p \right] \\ &\leq c_p \sum_n \mathbb{E} \left[\left(\int_{]0,t]} H_{n,s}^2 ds \right)^{p/2} \right] \leq c_p \sum_n \mathbb{E} \left[\left(\int_{]0,t]} |H_{n,s}|^p ds \right) t^{p/2-1} \right] \\ &= c_p t^{p/2-1} \mathbb{E} \left[\int_{]0,t]} \|H_s\|_{\ell^p}^p ds \right] \end{aligned}$$

Cette inégalité permet d'étendre l'intégration à des

processus prévisibles de type plus général

Exemple 1.2 Si M est une martingale de carré intégrable à valeurs dans un espace de Hilbert, on a

$$\mathbb{E}[\|M_t - M_s\|^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\|M_t\|^2 - \|M_s\|^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s | \mathcal{F}_s]$$
 (où $\langle M \rangle_t$ est le processus croissant prévisible associé à la sousmartingale positive $\|M_t\|^2$). Considérons encore une suite t_n décroissant vers 0 et la martingale (à valeurs dans $\mathcal{H}$, avec $p > 2$)

$$M_t = \sum_n (B_{t_n \wedge t} - B_{t_{n+1} \wedge t}) \cdot [n(t_n - t_{n+1})]^{-1/2} \cdot e_n$$

On vérifie facilement que

$$\sup_t \mathbb{E}[\|M_t\|_{\mathcal{H}}^p] = \mathbb{E}[\|M_1\|_{\mathcal{H}}^p] \leq \mathbb{E}[\|M_1\|_{\mathcal{H}}^p]^{2/p}$$

$$= \left(\sum_n \mathbb{E}[|B_{t_n} - B_{t_{n+1}}|^p] \cdot n^{-p/2} \cdot (t_n - t_{n+1})^{-p/2} \right)^{2/p}$$

$$= \left(\sum_n c_p \cdot n^{-p/2} \right)^{2/p} < +\infty. \text{ Par contre}$$

$$\sum_n \mathbb{E}[\|M_{t_n} - M_{t_{n+1}}\|_{\mathcal{H}}^2] = \sum_n \mathbb{E}[|B_{t_n} - B_{t_{n+1}}|^2 n^{-1} (t_n - t_{n+1})^{-1}] =$$

$$= \sum_n n^{-1} = +\infty : \text{ pour la martingale de carré intégrable } M, \text{ il}$$

n'existe donc pas un processus croissant prévisible A tel que l'on ait $\mathbb{E}[\|M_t - M_s\|^2 | \mathcal{F}_s] \leq \mathbb{E}[A_t - A_s | \mathcal{F}_s]$.

Supposons fixé un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant aux hypothèses habituelles de [1] et [2]. Nous indiquerons par $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \dots$ des espaces de Banach séparables: si $x \in \mathbb{F}$, nous indiquerons sa norme par $|x|_{\mathbb{F}}$ (et aussi $|x|$ s'il n'y a pas danger de confusion). Nous supposerons que tous les espaces de Banach considérés possèdent la *propriété de Radon-Nikodym* (tout dual séparable d'un espace de Banach a cette propriété): si M est une martingale de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{F}$, il existe (p.s. et dans L^2) $M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ (voir [3] pag.112). On peut donc confondre une martingale de carré intégrable avec sa v.a. terminale et identifier l'espace des martingales de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{F}$ avec $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$.

Rappelons que toute martingale a une version à trajectoires c.à.d.l.à.g. (on peut en effet appliquer les inégalités de Doob à la sous-martingale $|M_t|_{\mathbb{F}}$) et dans la suite nous ne considérerons que des versions à trajectoires

régulières.

Un espace de Banach $\mathbb{F}$ est dit p -convexe ($2 \leq p < +\infty$) s'il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait, pour tout $x, y \in \mathbb{F}$

$$|x+y|_{\mathbb{F}}^p + |x-y|_{\mathbb{F}}^p \geq 2 |x|_{\mathbb{F}}^p + L |y|_{\mathbb{F}}^p.$$

$\mathbb{F}$ est dit p -lisse ($1 < p \leq 2$) s'il existe C telle que

$$|x+y|_{\mathbb{F}}^p + |x-y|_{\mathbb{F}}^p \leq 2 |x|_{\mathbb{F}}^p + C |y|_{\mathbb{F}}^p.$$

Les espaces de Hilbert sont évidemment 2-convexes et 2-lisses; les espaces p -convexes ou p -lisses sont réflexifs (ils ont donc la propriété de Radon-Nikodym). Rappelons encore que les espaces L^p (pour $1 < p < +\infty$) sont $\max(2, p)$ -convexes et $\min(2, p)$ -lisses.

Par abus de langage nous dirons qu'un espace $\mathbb{F}$ est p -convexe (p -lisse) s'il existe sur $\mathbb{F}$ une norme équivalente qui soit p -convexe (p -lisse).

2. INTEGRATION PAR RAPPORT AUX MARTINGALES DE CARRE INTEGRABLE.

Toutes les martingales considérées seront supposées nulles en 0.

Définition 2.1 Soit $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}; \mathbb{F})$: on dit que M est contrôlée par A (et on écrit $M \ll A$) si A est un processus croissant prévisible intégrable tel que l'on ait, pour tout $s < t$, $\mathbb{E}[|M_t - M_s|_{\mathbb{F}}^2 | \mathcal{F}_s] \leq \mathbb{E}[A_t - A_s | \mathcal{F}_s]$.

Nous désignerons par $\mathcal{M}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ (ou plus simplement par $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$) l'espace des martingales contrôlées à valeurs dans $\mathbb{F}$; posons $S(M) = \inf \mathbb{E}[A_{\infty}]^{1/2}$, où la borne inférieure est prise sur tous les processus A qui contrôlent M . Etant donnés $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on a $(a+b)^2 \leq (1+\varepsilon)^2 a^2 + (1+1/\varepsilon)^2 b^2$, et donc, si $M \ll A$ et $N \ll B$:

$$\mathbb{E}[|(M_t + N_t) - (M_s + N_s)|_{\mathbb{F}}^2 | \mathcal{F}_s] \leq (1+\varepsilon)^2 \mathbb{E}[A_t - A_s | \mathcal{F}_s] + (1+1/\varepsilon)^2 \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s]; \text{ par conséquent } S(M+N) \leq (1+\varepsilon)S(M) + (1+1/\varepsilon)S(N).$$

Les ensembles $\mathcal{U}_n = \{ M \mid S(M) < 1/n \}$ forment donc un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$: muni de cette topologie, $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ est métrisable et complet (on remarquera que, si M^n est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$, alors M_t^n est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ pour tout t).

Proposition 2.2 *Supposons que $\mathbb{F}$ soit 2-convexe. L'espace $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ est alors isométrique à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$, de sorte que toute martingale de carré intégrable est dominée.*

Démonstration Si $\mathbb{F}$ est 2-convexe, il existe (voir [6] pag.253) une constante C telle que, pour $s < t$
 $\mathbb{E}[|M_t - M_s|_{\mathbb{F}}^2 | \mathcal{F}_s] \leq C \cdot \mathbb{E}[|M_t|_{\mathbb{F}}^2 - |M_s|_{\mathbb{F}}^2 | \mathcal{F}_s]$: par conséquent M est contrôlée par $C \cdot \langle M \rangle$, où $\langle M \rangle_t$ est le processus croissant prévisible associé à $|M_t|_{\mathbb{F}}^2$. On a donc
 $C^{-1/2} S(M) \leq \mathbb{E}[|M_{\infty}|_{\mathbb{F}}^2]^{1/2} \leq S(M).$ ■

Théorème 2.3 *Supposons que $\mathbb{F}$ possède la propriété suivante: quelle que soit la filtration, toute martingale M de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ est un élément de $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$. L'espace $\mathbb{F}$ est alors 2-convexe.*

Démonstration Fixons une filtration, soit $u = (t_1, \dots, t_n)$ une partie finie croissante de $\mathbb{R}^+$ et soit
 $T_u(M) = (M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \dots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}}, 0, 0, \dots)$. Les opérateurs T_u sont définis sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \ell^2(\mathbb{F}))$: remarquons que $\|T_u(M)\|^2 = \mathbb{E}[|M_{t_1}|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=2}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|_{\mathbb{F}}^2]$. On a par hypothèse $\sup_u \|T_u(M)\| < +\infty$ pour tout M : le théorème de Banach-Steinhaus assure alors que $\sup_u \|T_u\| < +\infty$, c'est-à-dire qu'il existe K telle que l'on ait, pour tout u ,
 $\mathbb{E}[|M_{t_1}|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=2}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|_{\mathbb{F}}^2] \leq K \cdot \mathbb{E}[|M_{\infty}|_{\mathbb{F}}^2]$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 de [7] qui prouve que $\mathbb{F}$ est 2-convexe. ■

Les énoncés 2.2 et 2.3 permettent d'interpréter l'exemple 1.2.

Soit maintenant M une martingale à valeurs dans $\mathbb{F}$ contrôlée par A , $\mathbb{G}$ un autre espace de Banach et soit H prévisible élémentaire, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, de la forme
 $H(s, \omega) = \sum_{i=1}^{n-1} I_{]t_i, t_{i+1}]}(s) H_i(\omega)$, avec H_i $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable borné. On peut définir $(H.M)_t = \int_{]0, t]} H_s dM_s =$
 $= \sum_{i=1}^{n-1} H_i \cdot (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$: il est évident que $H.M$ est une martingale à valeurs dans $\mathbb{G}$. (Dans ce paragraphe, nous désignerons par $\|\cdot\|$ la norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$).

Proposition 2.4 *Supposons que $\mathbb{G}$ soit 2-lisse. Il existe alors une constante C ne dépendant que de $\mathbb{G}$ telle que*

$$\mathbb{E} [|(H.M)_\omega|_\sigma^2] \leq C \cdot \mathbb{E} \left[\int_{]0,+\infty[} \|H_s\|^2 dA_s \right]. \text{ Plus généralement, } (H.M) \text{ est contrôlée par } C \cdot \int_{]0,t]} \|H_s\|^2 dA_s.$$

Démonstration Il existe (voir [7] pag.336) une constante C telle que $\mathbb{E} [|\sum_i H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})|_\sigma^2] \leq C \cdot \sum_i \mathbb{E} [|H_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})|_\sigma^2]$.

Ce dernier terme est majoré par $C \cdot \sum_i \mathbb{E} [\|H_i\|^2 |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|_F^2] \leq C \cdot \sum_i \mathbb{E} [\|H_i\|^2 (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] = C \cdot \mathbb{E} \left[\int_{]0,+\infty[} \|H_s\|^2 dA_s \right]$; ceci prouve la première assertion. La deuxième en découle immédiatement

■

La proposition précédente permet de prolonger l'intégrale stochastique aux processus fortement prévisibles tels que $\mathbb{E} \left[\int_{]0,+\infty[} \|H_s\|^2 dA_s \right] < +\infty$.

Théorème 2.5 *Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si H est prévisible élémentaire à valeurs dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{E} \left[\int_{]0,+\infty[} |H_s|^2 ds \right] < \delta$, alors $\mathbb{P} \left(\left| \int_{]0,+\infty[} H_s dB_s \right| > \varepsilon \right) < \varepsilon$ où B est le mouvement Brownien réel. L'espace $\mathbb{G}$ est alors 2-lisse.*

Démonstration Un théorème de Pisier perfectionné par Rosinski (voir [9] pag.165) affirme que, pour prouver que $\mathbb{G}$ est 2-lisse, il suffit de montrer que toute martingale de Walsh-Paley à valeurs dans $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{E} [\sum_n |M_n - M_{n-1}|_\sigma^2] < +\infty$ converge en probabilité (les martingales de Walsh-Paley sont les martingales de la forme $M_n = \sum_{k=1}^n g_k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) \varepsilon_k$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ est une suite de variables de Bernoulli indépendantes et g_k est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans $\mathbb{G}$).

Considérons la suite de temps d'arrêt intégrables $T_0 = 0$, $T_n = \inf \left\{ s > T_{n-1} : |B_s - B_{T_{n-1}}| = 1 \right\}$ et posons $\alpha = \mathbb{E} [T_n - T_{n-1}]$. Les variables $\varepsilon_n = (B_{T_n} - B_{T_{n-1}})$ forment une suite de variables de Bernoulli indépendantes, et les martingales de Walsh-Paley peuvent être représentées sous la forme $M_n = \int_{]0, T_n]} H_s dB_s$, où

$H(s, \omega) = \sum_n I_{[T_{n-1}, T_n]}(s, \omega) H_{n-1}(\omega)$ et

$H_n = g_n(B_{T_1}, B_{T_2} - B_{T_1}, \dots, B_{T_n} - B_{T_{n-1}})$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_n |M_n - M_{n-1}|_\sigma^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_n |H_n|_\sigma^2 \right] = \alpha^{-1} \mathbb{E} \left[\sum_n |H_n|_\sigma^2 (T_{n+1} - T_n) \right] \\ &= \alpha^{-1} \mathbb{E} \left[\int_{]0, +\infty[} |H_s|_\sigma^2 ds \right], \text{ et l'hypothèse du théorème assure } \\ &\text{la convergence en probabilité de la suite } M_n. \end{aligned}$$

■

Les énoncés 2.4 et 2.5 permettent d'interpréter l'exemple 1.1.

La construction de l'intégrale stochastique peut ensuite être étendue par les méthodes usuelles (voir [1] et [2]): on peut ainsi intégrer un processus H prévisible localement borné à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ par rapport à un processus de la forme $X_s = X_0 + M_s + V_s$, où les trajectoires de V sont à variation bornée et M appartient localement à l'espace $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$.

3. UNE INÉGALITÉ DU TYPE METIVIER-PELLAUMAIL ET SES CONSÉQUENCES.

Soit $M \in \mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ contrôlée par A , et soient $s = t_1 < \dots < t_n = t$: on a $\mathbb{E} \left[\sum_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2 | \mathcal{F}_s \right] \leq \mathbb{E} [A_t - A_s | \mathcal{F}_s]$. Il en résulte que le processus croissant $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|^2$ est intégrable: soit $T_1, T_2, \dots$ une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints qui porte les discontinuités prévisibles de M et soit $B_t = \sum_n |\Delta M_{T_n}|^2 \cdot I_{\{t \geq T_n\}}$. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant:

Théorème 3.1 *Si l'espace $\mathbb{F}$ est 2-lisse, il existe une constante C (qui ne dépend que de $\mathbb{F}$) telle que l'on ait $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s < T} |M_s|^2 \right] \leq C \cdot \mathbb{E} [A_{T-} + B_{T-}]$ pour tout temps d'arrêt T .*

Cette inégalité permet d'appliquer à l'intégrale définie dans le paragraphe précédent les méthodes développées dans [2] pour les semimartingales hilbertiennes. Supposons en effet que H soit prévisible élémentaire à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ et que $\mathbb{G}$ (mais pas forcément $\mathbb{F}$) soit 2-lisse. La martingale $(H.M)_t$ est contrôlée par $\int_{]0, t]} \|H_s\|^2 dA_s$. De plus on a $|\Delta_t(H.M)| = |H_t \cdot \Delta M_t| \leq \|H_t\| \cdot |\Delta M_t|$; et par conséquent

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{[0,t]} H_s dM_s \right|_G^2 \right] \leq C \cdot \mathbb{E} \left[\int_{[0,T]} \|H_s\|^2 d(A_s + B_s) \right]$$

Plus généralement, pour un processus X de la forme $X_t = X_0 + M_t + V_t$ on prouve, exactement comme dans le cas Hilbertien, l'existence d'un processus croissant adapté C tel

$$\text{que } \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{[0,t]} H_s dX_s \right|_G^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[C_T \cdot \int_{[0,T]} \|H_s\|^2 dC_s \right].$$

Cela permet d'étendre au cas des processus à valeurs dans des espaces de Banach la théorie des équations différentielles stochastiques développée dans [2] ch.8.

La démonstration du théorème 3.1 est précédée par quelques lemmes. Dans tout ce paragraphe on suppose que l'espace $\mathbb{F}$ est 2-lisse. On désigne en outre par C une constante qui peut changer de ligne en ligne mais qui ne dépend que de $\mathbb{F}$; enfin on dira que la martingale M est contrôlée par le processus croissant prévisible A s'il existe une constante C telle que $M_t \ll C \cdot A_t$.

Lemme 3.2 Soit S un temps d'arrêt, $A \in \mathcal{F}_S$, $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_{S-}$ et A et soit Z une variable $\mathcal{G}$ -mesurable à valeurs dans $\mathbb{F}$ telle que $\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_{S-}] = 0$: on a alors (si $B = A^C$)

$$\mathbb{E}[|Z|^2 I_B] \leq \mathbb{E}[I_A \cdot \mathbb{E}[|Z|^2 | \mathcal{F}_{S-}]]$$

Démonstration Le résultat est connu dans le cas où Z est réelle (voir [2] pag.131). On peut écrire $Z = XI_A + YI_B$ avec X, Y $\mathcal{F}_{S-}$ -mesurables; soit Y' à valeurs dans $\mathbb{F}'$, $\mathcal{F}_{S-}$ -mesurable et telle que $|Y'|_{\mathbb{F}'} \leq 1$: la variable réelle $\langle Y', Z \rangle$ vérifie les hypothèses, de sorte que l'on a $\mathbb{E}[\langle Y', Y \rangle^2 I_B] = \mathbb{E}[\langle Y', Z \rangle^2 I_B] \leq \mathbb{E}[I_A \mathbb{E}[\langle Y', Z \rangle^2 | \mathcal{F}_{S-}]] \leq \mathbb{E}[I_A \mathbb{E}[|Z|^2 | \mathcal{F}_{S-}]]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut facilement construire Y' à valeurs dans $\mathbb{F}'$, $\mathcal{F}_{S-}$ -mesurable telle que $|Y'| \leq 1$ et $\langle Y', Y \rangle^2 \geq |Y|^2 - \varepsilon$: on obtient ainsi le résultat désiré. ■

Soit maintenant $T_1, T_2, \dots$ une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints et soit, pour tout n , H_n un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_n}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ tel que $\mathbb{E}[H_n | \mathcal{F}_{T_n-}] = 0$. Désignons par M_t^n la martingale $H_n I_{\{t \geq T_n\}}$, par C_t^n le processus croissant $|H_n|^2 I_{\{t \geq T_n\}}$ et par $\tilde{C}_t^n$ sa projection duale prévisible

(c'est-à-dire $\tilde{C}_t^n = E[|H_n|^2 | \mathcal{F}_{T_n-}] \cdot I_{\{t \geq T_n\}}$). Supposons enfin que $\sum_n E[|H_n|^2] < +\infty$.

Lemme 3.3 La série $\sum_n M_t^n$ converge dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ et est contrôlée par $\tilde{C}_t = \sum_n \tilde{C}_t^n$.

Démonstration. Si on considère un nombre fini de temps d'arrêt, on peut supposer $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$.

Soit $A \in \mathcal{F}_S$: puisque l'ensemble $A \cap \{s < T_1 \leq t\}$ appartient à $\mathcal{F}_{T_1-}$, les variables $H_i \cdot I_{A \cap \{s < T_1 \leq t\}}$ sont les accroissements d'une martingale à temps discret. On peut alors appliquer l'inégalité 2.4 pag.336 de [7] et on obtient

$$\begin{aligned} E[|I_A H_1 I_{\{s < T_1 \leq t\}} + \dots + H_n I_{\{s < T_n \leq t\}}|^2] &\leq \\ &\leq C \cdot E[|I_A (|H_1|^2 I_{\{s < T_1 \leq t\}} + \dots + |H_n|^2 I_{\{s < T_n \leq t\}})|] ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire $E[|\sum_{k=1}^n M_t^k - \sum_{k=1}^n M_s^k|^2 | \mathcal{F}_S] \leq$
 $\leq C \cdot E[\sum_{k=1}^n (C_t^k - C_s^k) | \mathcal{F}_S] = C \cdot E[\sum_{k=1}^n (\tilde{C}_t^k - \tilde{C}_s^k) | \mathcal{F}_S] .$
 On passe ensuite facilement à la limite. ■

Lemme 3.4 Soit $M \in \mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ contrôlée par A , et supposons que M soit dépourvue de discontinuités prévisibles. La martingale M est alors contrôlée par A_t^C , où A^C est la partie continue du processus croissant A .

Démonstration Rappelons la représentation $A_t = A_t^C + \sum_n (\Delta A_{S_n}) \cdot I_{\{t \geq S_n\}}$, où S_n est une suite de temps d'arrêt prévisibles qui porte les discontinuités de A . Soit $S_{m,n}$ une suite qui annonce S_n , et considérons le processus prévisible, à valeurs dans $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$, $I_{]S_{m,n}, S_n]}$: on a $(I_{]S_{m,n}, S_n]} \cdot M)_t = M_t \wedge S_n - M_t \wedge S_{m,n}$, et, puisque $\Delta M_{S_n} = 0$, à la limite $I_{[S_n]} \cdot M = 0$. Donc $M_t = (H \cdot M)_t$ où $H(t, \omega) = 1 - \sum_n I_{[S_n]}(t, \omega)$.

Il en résulte (voir 2.4) que M est contrôlée par le processus croissant $\int_{]0, t]} H_s^2 dA_s = A_t^C$ ■

Démonstration du théorème 3.1 Reprenons les notations introduites au début du paragraphe, et soit M_t^n la martingale $\Delta M_{T_n} \cdot I_{\{t \geq T_n\}}$: le lemme 3.2 assure que la série $\sum_n M_t^n$ converge dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{F})$ et que $M_t^P = \sum_n M_t^n$ est contrôlée par $\tilde{B}_t$ (projection duale prévisible de B). On voit facilement que $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s \leq A_t - A_s$ et donc $\hat{M}_t = M_t - M_t^P$ est dépourvue de discontinuités prévisibles et est contrôlée par A_t , donc aussi par A_t^C .

En appliquant l'inégalité de Doob on a donc

$$(3.5) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |\hat{M}_s|^2 \right] \leq 4 \cdot \mathbb{E} [|\hat{M}_T|^2] = \\ = 4 \mathbb{E} \left[\left| \int_{]0, +\infty[} I_{[0, T]}(s) d\hat{M}_s \right|^2 \right] \leq C \cdot \mathbb{E} [A_T^C] \leq C \cdot \mathbb{E} [A_{T-}].$$

Soient maintenant $A_n = \{T_n < T\}$, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_{T_n-}$ et A_n et $H_n = \Delta M_{T_n} I_{\{T_n < T\}} + \mathbb{E} [\Delta M_{T_n} | \mathcal{F}_n] \cdot I_{\{T_n \geq T\}}$. On vérifie (comme dans [2] pag.131) que l'on a $\mathbb{E} [H_n | \mathcal{F}_{T_n-}] = 0$ et $\mathbb{E} [H_n^2 | \mathcal{F}_{T_n-}] \leq \mathbb{E} [|\Delta M_{T_n}|^2 | \mathcal{F}_{T_n-}]$; en outre on trouve par le lemme 3.2 que $\mathbb{E} [H_n^2] \leq \mathbb{E} [I_{\{T_n < T\}} (|\Delta M_{T_n}|^2 + \mathbb{E} [|\Delta M_{T_n}|^2 | \mathcal{F}_{T_n-}])]$.

Soit $N_t = \sum_n H_n I_{\{t \geq T_n\}}$: cette série converge (voir lemme 3.3) et coïncide avec M_t^p sur $[0, T[$. Si $\tilde{C}_t$ est défini comme dans 3.3, on a:

$$(3.6) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t < T} |M_t^p|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t < T} |N_t|^2 \right] \leq \\ \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq +\infty} |N_t|^2 \right] \leq 4 \cdot \mathbb{E} [|\tilde{C}_\infty|^2] \leq 4 \cdot \mathbb{E} [\tilde{C}_\infty] = \\ = 4 \cdot \mathbb{E} \left[\sum_n |H_n|^2 \right] \leq 4 \cdot \mathbb{E} \left[\sum_n I_{\{T_n < T\}} (|\Delta M_{T_n}|^2 + \mathbb{E} [|\Delta M_{T_n}|^2 | \mathcal{F}_{T_n-}]) \right] = \\ = 4 \cdot \mathbb{E} [B_{T-} + \tilde{B}_{T-}] \leq 4 \cdot \mathbb{E} [B_{T-} + A_{T-}].$$

La conclusion résulte alors aussitôt de (3.5) et (3.6) ■

Bibliographie

- [1] Dellacherie C. Meyer P.A. *Probabilités et Potentiel Vol.II* Hermann.Paris 1975
- [2] Métivier M. *Semimartingales* W. de Gruyter Berlin NewYork 1982
- [3] Neveu J. *Martingales à temps discret* Masson Paris 1972
- [4] Yor M. *Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un Banach* C.R. Acad. Sc. Paris Ser.A 277 (1973) pp.467-469
- [5] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces* Lecture Notes in Mathematics 485 (1975) Springer Verlag
- [6] Woyczynski W. *Geometry and Martingales in Banach Spaces* Winter School on Probability Lecture Notes in Mathematics 472 (1975) Springer Verlag
- [7] Pisier G. *Martingales with values in uniformly convex spaces* Israel J. of Math. Vol.2 (1975) pp.326-350
- [8] Dettweiler E. *Stochastic integral equations and diffusions on Banach Spaces* Prob. Theory on Vector Spaces III Lecture Notes in Mathematics 1080 (1983) Springer-Verlag
- [9] Rosinski J. *Central limit theorems for dependent random vectors in Banach Spaces.* Lecture Notes In Mathematics 939 (1982) pp.157-181