DOMINIQUE LÉPINGLE
CHRISTINE MAROIS

Équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 520-533
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__520_0>

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES MULTIVOQUES UNIDIMENSIONNELLES

par D.Lépingle et C.Marois

Dans [2], P.Krée introduit la notion d'équation différentielle stochastique multivoque associée à un opérateur maximal monotone, il montre un théorème global d'unicité, puis un théorème d'existence lorsque la composante brownienne et la composante multivoque agissent dans des directions séparées. Un cas très fréquent d'opérateur maximal monotone multivoque est constitué par la sous-dérivée d'une fonction convexe; quand cette fonction vaut 0 dans un fermé convexe, $+\infty$ au-dehors, il s'agit simplement d'un problème de réflexion au bord d'un domaine convexe, et les équations stochastiques correspondantes ont déjà été étudiées notamment par H.Tanaka [5] et J.L.Menaldi [4]. Comme ce dernier, nous utiliserons une méthode de pénalisation pour donner un théorème d'existence et d'unicité dans le cas unidimensionnel avec un opérateur maximal monotone multivoque quelconque, dont on sait que dans ce cas il provient nécessairement de la sous-dérivée d'une fonction convexe. Cela nous permettra de traiter aussi bien de problèmes avec réflexion que de problèmes où la dérive est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction décroissante quelconques.

1. ENONCE DU PROBLEME ET DU RESULTAT.

Soit h une fonction convexe, semi-continue inférieurement, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$. Nous dirons qu'elle est <u>propre</u> si

$$\text{Dom } h = \{ x \in \mathbb{R} : h(x)<+\infty \}$$

a un intérieur non vide. On lui associe l'opérateur multivoque ∂h par la définition suivante:

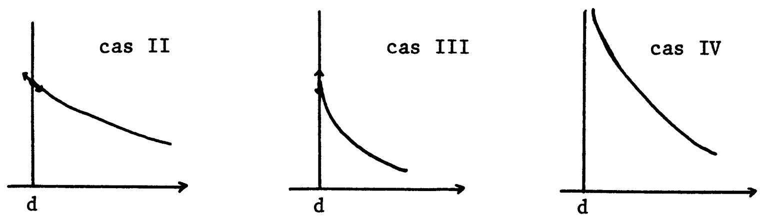
$$(x,y) \in Gr(\partial h) \iff \forall z \in \mathbb{R},\ h(z) \geqslant h(x) + y(z-x) \quad .$$

On a alors

$$\mathrm{Dom}\,\partial h \subset \mathrm{Dom}\,h \subset \overline{\mathrm{Dom}\,h} = \overline{\mathrm{Dom}\,\partial h} \quad ,$$

d'où de chaque côté de l'axe réel quatre types de situations:

- cas I : pas de bord, $\mathrm{Dom}\,\partial h$ s'étend jusqu'à l'infini;
- cas II : le bord $d \in \mathrm{Dom}\,\partial h$;
- cas III : le bord $d \notin \mathrm{Dom}\,\partial h$, mais $d \in \mathrm{Dom}\,h$;
- cas IV : le bord $d \notin \mathrm{Dom}\,h$.



Dans tout ce qui suit, on travaillera sur un espace probabilisé filtré fixé $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$, la filtration étant continue à droite et $\mathcal{F}_0$ contenant tous les ensembles négligeables des $\mathcal{F}_t$.

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat à obtenir.

THEOREME. <u>On se donne</u>

- <u>un mouvement brownien réel</u> W <u>défini sur l'espace probabilisé donné</u>;
- <u>une fonction</u> h <u>convexe, propre, semi-continue inférieurement</u>;
- <u>deux applications lipschitziennes</u> σ <u>et</u> g <u>de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans lui-même</u>, <u>de coefficient de Lipschitz</u> a;
- <u>une variable aléatoire</u> η $\mathcal{F}_0$<u>-mesurable</u>, <u>à valeurs dans</u> $\overline{\mathrm{Dom}\,h}$.

<u>Il existe alors un unique couple de processus continus adaptés</u> (Y_t,K_t) <u>tels que</u>

- Y_t <u>ait ses valeurs dans</u> $\overline{\mathrm{Dom}\,h}$ <u>avec</u> $Y_0=\eta$;
- K_t <u>soit à variation localement finie avec</u> $K_0=0$;
- $dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + g(Y_t)dt - dK_t$;
- <u>pour tout couple</u> (α_t,β_t) <u>de processus optionnels tels que</u> $(\alpha_t,\beta_t) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$, <u>la mesure</u> $(Y_t-\alpha_t)(dK_t-\beta_t dt)$ <u>soit</u> p.s. <u>positive sur</u> $\mathbb{R}_+$.

On dira que ce couple (Y,K) est solution du problème (h,σ,g,η).

2. DEMONSTRATION DE L'UNICITE.

Soient (Y^1,K^1) et (Y^2,K^2) deux couples solutions du problème (h,σ,g,η) sur le même espace probabilisé, et avec le même mouvement brownien W. Montrons d'abord que $(Y_t^1-Y_t^2)(dK_t^1-dK_t^2)$ est p.s. une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$. Pour $\varepsilon>0$ arbitraire, posons

$$\alpha_t = \frac{Y_t^1 + Y_t^2}{2} 1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}} + b\, 1_{\{Y_t^1\leq Y_t^2+\varepsilon\}} ,$$

où $b \in \mathrm{Dom}\, \partial h$, et soit β_t un processus optionnel tel que $(\alpha_t,\beta_t) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$. Si l'on note k_- et k_+ respectivement les dérivées à gauche et à droite de h, définies sur $\mathrm{Dom}\, h$, et finies sur son intérieur, on pourra prendre par exemple pour processus

$$\beta_t = k_+(\frac{Y_t^1+Y_t^2}{2})\, 1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}} + c\, 1_{\{Y_t^1\leq Y_t^2+\varepsilon\}} ,$$

où $(b,c) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$. Alors,

$$1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}}(Y_t^1-\alpha_t)(dK_t^1-\beta_t dt) \geq 0$$

$$1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}}(Y_t^2-\alpha_t)(dK_t^2-\beta_t dt) \geq 0 ,$$

puis

$$1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}}(Y_t^1-Y_t^2)(dK_t^1-\beta_t dt) \geq 0$$

$$1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}}(Y_t^2-Y_t^1)(dK_t^2-\beta_t dt) \geq 0 ,$$

d'où

$$1_{\{Y_t^1>Y_t^2+\varepsilon\}}(Y_t^1-Y_t^2)(dK_t^1-dK_t^2) \geq 0 .$$

Comme ε est arbitraire, on a donc $(Y_t^1-Y_t^2)(dK_t^1-dK_t^2)\geq 0$ sur $\{Y_t^1>Y_t^2\}$, puis par symétrie sur $\{Y_t^2>Y_t^1\}$, et de manière évidente sur $\{Y_t^1=Y_t^2\}$.

Posons

$$T_p = \inf \{t>0: |Y_t^1|+|Y_t^2|\geq p\} \qquad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*$$

$$Z_t = Y_t^1 - Y_t^2 .$$

Alors,

$$\frac{1}{2}(Z_{t\wedge T_p})^2 = \int_0^{t\wedge T_p}(\sigma(Y_s^1)-\sigma(Y_s^2))(Y_s^1-Y_s^2)dW_s + \int_0^{t\wedge T_p}(g(Y_s^1)-g(Y_s^2))(Y_s^1-Y_s^2)ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_p}(\sigma(Y_s^1)-\sigma(Y_s^2))^2 ds - \int_0^{t\wedge T_p}(Y_s^1-Y_s^2)(dK_s^1-dK_s^2)$$
$$\leqslant (a+\frac{a^2}{2})\int_0^{t\wedge T_p}(Y_s^1-Y_s^2)^2 ds + M_{t\wedge T_p} \quad ,$$

où M est la martingale locale

$$M_t = \int_0^t (\sigma(Y_s^1)-\sigma(Y_s^2))(Y_s^1-Y_s^2)dW_s \quad ,$$

qui vérifie $E(M_{t\wedge T_p})=0$. D'où

$$\frac{1}{2}E[(Z_{t\wedge T_p})^2] \leqslant (a+\frac{a^2}{2})\int_0^t E[(Z_{s\wedge T_p})^2]ds \quad ,$$

puis par Gronwall $E[(Z_{t\wedge T_p})^2]=0$, et donc Z=0.

3. PROPRIETES DES FONCTIONS CONVEXES DECROISSANTES.

LEMME. Soit h une fonction convexe, propre, semi-continue inférieurement et décroissante. Il existe alors une suite $(k_n, n\geqslant 1)$ de fonctions numériques sur $\mathbb{R}$, négatives, croissantes, lipschitziennes de rapport n, vérifiant $k_{n+1}(x)\leqslant k_n(x)$ pour tout x réel, telles que

. pour $x\in \mathrm{Dom}\,\partial h$, $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = k_+(x)$;

. pour $x\notin \mathrm{Dom}\,\partial h$, $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = -\infty$.

DEMONSTRATION. Pour $n\geqslant 1$, on définit l'opérateur k_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par son graphe

$$\{(x+\frac{1}{n}y,y) \text{ où } (x,y)\in Gr(\partial h)\} \quad .$$

Pour tout u réel, la droite d'équation $u=x+\frac{1}{n}y$ coupe $Gr(\partial h)$ en un point et un seul, ce qui prouve que k_n est une application numérique sur $\mathbb{R}$. Si deux couples (x,y) et (x',y') sont dans $Gr(\partial h)$, on a $(x-x')(y-y')\geqslant 0$, donc

$$(y-y')^2 \leqslant n^2[(x-x')+\frac{1}{n}(y-y')]^2 \quad ,$$

ce qui montre que k_n est lipschitzienne de rapport n.

Comme $(x,y)\in Gr(\partial h)$ et que h est décroissante, on a $y\leqslant 0$ et k_n est négative. Puisque

$$\left[(x+\frac{1}{n}y)-(x'+\frac{1}{n}y')\right](y-y') = (x-x')(y-y')+\frac{1}{n}(y-y')^2 \geqslant 0 \quad ,$$

la fonction k_n est croissante.

Si, toujours pour (x,y) et (x',y') dans $Gr(\partial h)$, on a $x+\frac{1}{n}y=x'+\frac{1}{n+1}y'$, alors

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (x-x')(y-y') &= \frac{1}{n(n+1)}(ny'-ny-y)(y-y') \\ &= -\frac{1}{n+1}(y-y')^2 - \frac{y(y-y')}{n(n+1)} \end{aligned}$$

et ainsi $y'\leqslant y$, donc pour tout u réel, $k_{n+1}(u)\leqslant k_n(u)$.

Soit $(u,v)\in Gr(\partial h)$. Si $u=x+\frac{1}{n}y$ avec $(x,y)\in Gr(\partial h)$, de $(u-x)(v-y)\geqslant 0$ on tire $y(v-y)\geqslant 0$, d'où $v\leqslant y$, ce qui montre que $k_n(u)\geqslant v$, et en particulier pour tout $u\in Dom(\partial h)$, $k_n(u)\geqslant k_+(u)$. Si maintenant $u'<u$, alors de $(u'-\frac{1}{n}k_n(u'),k_n(u'))\in Gr(\partial h)$ on déduit

$$(u-u'+\frac{1}{n}k_n(u'))(v-k_n(u')) \geqslant 0 \quad .$$

Si $\lim_{n\to\infty} k_n(u')>-\infty$, alors $\lim_{n\to\infty}(u-u')(v-k_n(u'))\geqslant 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} k_n(u')\leqslant v$, ce qui prouve $\lim_{n\to\infty} k_n(u')\leqslant k_-(u)\leqslant k_+(u)$. La continuité à droite de k_+ permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} k_n(u')=k_+(u')$ si $u'\in$ Dom ∂h , ou $-\infty$ si $u'\notin$ Dom ∂h .

4. EXISTENCE. CAS DECROISSANT.

On se propose dans ce paragraphe de montrer l'existence d'une solution lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées et que de plus h est décroissante. Soit alors $(k_n,n\geqslant 1)$ la suite de fonctions du lemme. On considère les équations différentielles stochastiques

$$\begin{cases} dY^n_t = \sigma(Y^n_t)dW_t + g(Y^n_t)dt - k_n(Y^n_t)dt \\ Y^n_0 = \eta \quad . \end{cases}$$

Le caractère lipschitzien de σ,g et k_n montre l'existence pour tout $n\geqslant 1$ d'une solution unique Y^n. Comparons maintenant Y^n et Y^{n+1} au moyen de la méthode employée par Le Gall [3]. Grâce à la formule de densité des temps d'occupation,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{da}{a^2}\, L_t^a(Y^n-Y^{n+1}) = \int_0^t \frac{(\sigma(Y_s^n)-\sigma(Y_s^{n+1}))^2}{(Y_s^n-Y_s^{n+1})^2}\, ds \leqslant a^2 t < \infty ,$$

et la continuité en zéro du temps local montre que $L_t^0(Y^n-Y^{n+1})=0$. Si $x^+=\max(x,0)$, la formule de Tanaka montre que

$$\begin{aligned}(Y_s^n-Y_s^{n+1})^+ &= \int_0^s 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[(g(Y_u^n)-k_n(Y_u^n))-(g(Y_u^{n+1})-k_{n+1}(Y_u^{n+1}))\right]du \\ &\quad + \int_0^s 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[\sigma(Y_u^n)-\sigma(Y_u^{n+1})\right]dW_u \\ &\leqslant \int_0^s 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[(g(Y_u^n)-k_n(Y_u^n))-(g(Y_u^{n+1})-k_n(Y_u^{n+1}))\right]du \\ &\quad + \int_0^s 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[\sigma(Y_u^n)-\sigma(Y_u^{n+1})\right]dW_u \quad ,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}E\left[(\sup_{s\leqslant t}(Y_s^n-Y_s^{n+1})^+)^2\right] &\leqslant 2E\left[(\sup_{s\leqslant t}\int_0^s 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[(g(Y_u^n)-g(Y_u^{n+1}))-(k_n(Y_u^n)-k_n(Y_u^{n+1}))\right]du)^2\right] \\ &\quad + 8\, E\left[\int_0^t 1_{\{Y_u^n>Y_u^{n+1}\}}\left[\sigma(Y_u^n)-\sigma(Y_u^{n+1})\right]^2 du\right] \\ &\leqslant (2(a+n)^2t+8a^2)E\left[\int_0^t ((Y_s^n-Y_s^{n+1})^+)^2 ds\right] \quad .\end{aligned}$$

Ainsi, p.s., on a $Y_t^n \leqslant Y_t^{n+1}$ pour tout t et tout $n \geqslant 1$.

Choisissons maintenant un couple (b,c) arbitraire dans $Gr(\partial h)$ et considérons l'équation suivante relative aux processus Z et L

- $Z_0 = \max(\eta, b)$
- Z_t est continu adapté à valeurs dans $[b,+\infty[$
- L_t est continu adapté nul en zéro et décroissant
- $dZ_t = \sigma(Z_t)dW_t + g(Z_t)dt - cdt - dL_t$
- la mesure $(Z_t-b)dL_t$ est nulle.

D'après [1], le couple (Z,-L) est exactement la solution unique du problème de réflexion en b avec les coefficients $\sigma(x)$ et $b(x)=g(x)-c$. Comparons maintenant Y^n et Z. Pour chaque n, le temps local en zéro de Y^n-Z est nul, pour les mêmes raisons que ci-dessus. Egalement,

$$E\left[\left(\sup_{s\leq t}(Y_s^n-Z_s)^+\right)^2\right] \leq 2\,E\left[\left(\sup_{s\leq t}\int_0^s 1_{\{Y_u^n>Z_u\}}\left[(g(Y_u^n)-k_n(Y_u^n))-(g(Z_u)-c)\right]du\right)^2\right]$$
$$+\,8\,E\left[\int_0^t 1_{\{Y_u^n>Z_u\}}\left[\sigma(Y_u^n)-\sigma(Z_u)\right]^2du\right] \quad .$$

Sur $\{Y_u^n>Z_u\}$, on a $Y_u^n>b$, donc $k_n(Y_u^n)\geq c$, et ainsi

$$E\left[\left(\sup_{s\leq t}(Y_s^n-Z_s)^+\right)^2\right] \leq 2\,E\left[\left(\int_0^t 1_{\{Y_s^n>Z_s\}}(g(Y_s^n)-g(Z_s))ds\right)^2\right]$$
$$+\,8a^2\,E\left[\int_0^t 1_{\{Y_s^n>Z_s\}}(Y_s^n-Z_s)^2ds\right]$$
$$\leq 2a^2(t+4)\int_0^t E\left[(Y_s^n-Z_s)^{+2}\right]ds \quad .$$

Donc p.s. $Y_t^n\leq Z_t$ pour tout n et pour tout t .

Posons maintenant

$$Y_t = \underline{\lim}_{n\to\infty} Y_t^n$$
$$K_t = -\,Y_t + \eta + \int_0^t \sigma(Y_s)dW_s + \int_0^t g(Y_s)ds \quad .$$

On a bien p.s. $-\infty<Y_t^1\leq Y_t\leq Z_t<+\infty$. Il faut montrer que (Y,K) est solution du problème.

<u>Continuité à gauche</u>.

Le processus Y_t est prévisible, presque toutes ses trajectoires sont des fonctions semi-continues inférieurement, et il en va de même pour $-K_t$. Comme $\int_0^t \sigma(Y_s^n)dW_s$ tend vers $\int_0^t \sigma(Y_s)dW_s$ uniformément en probabilité sur les compacts de $\mathbb{R}_+$, il existe un ensemble négligeable et une sous-suite $(n_p,p\geq 1)$ tels qu'en dehors de cet ensemble il y ait convergence de $\int_s^t k_{n_p}(Y_u^{n_p})du$ vers K_t-K_s pour $0\leq s<t<\infty$. Donc, p.s., K est un processus décroissant, continu à gauche puisque semi-continu supérieurement.

<u>L'extérieur</u>.

Montrons que p.s. Y_t reste dans $\overline{\mathrm{Dom}\,\partial h}$. Soit d la frontière de Dom ∂h, supposée non vide, et supposons qu'il existe t>0 et b<d tels que $Y_t(\omega)<b$. Il existerait alors $s\in\,]0,t[$ tel que $Y_u^n(\omega)\leq b$ pour $s\leq u\leq t$ et pour tout n, et on aurait

$$K_t(\omega)-K_s(\omega) = \lim_{p\to\infty}\int_s^t k_{n_p}(Y_u^{n_p})du \leq (t-s)\lim_{p\to\infty} k_{n_p}(b) = -\infty \quad ,$$

ce qui est impossible.

L'intérieur.

Lorsque $Y_t(\omega)$ appartient à l'intérieur de Dom ∂h, pour tout $\varepsilon>0$ tel que $Y_t(\omega)-\varepsilon$ soit encore dans cet intérieur, il existe $\delta>0$ et un entier q tels que

$$Y_u^{n_p}(\omega) \geqslant Y_t(\omega) - \varepsilon \quad \text{pour } t\leqslant u\leqslant t+\delta \quad \text{et} \quad p\geqslant q \quad .$$

Ainsi, pour $0<\gamma\leqslant\delta$,

$$K_{t+\gamma}(\omega) - K_t(\omega) \geqslant \lim_{p\to\infty} \int_t^{t+\gamma} k_{n_p}(Y_t(\omega)-\varepsilon)du = \gamma\, k_+(Y_t(\omega)-\varepsilon) \geqslant \gamma k_-(Y_t(\omega)) \ ,$$

ce qui prouve la continuité à droite de K_t et Y_t . Si $[s, t]$ est un intervalle tel que $Y_u(\omega)$ reste dans un intervalle $[a,b]$ inclus dans l'intérieur de Dom ∂h pour tout u dans $[s,t]$, on a de même

$$(t-s)\ k_-(a) \leqslant K_t(\omega) - K_s(\omega) \leqslant (t-s)\ k_+(b) \ ,$$

et cela montre que sur tout intervalle où $Y(\omega)$ ne rencontre pas la frontière de Dom ∂h, la trajectoire $K(\omega)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité comprise entre $k_-(Y(\omega))$ et $k_+(Y(\omega))$.

Le bord.

Montrons maintenant que lorsque $Y_t(\omega)=d$, il n'y a pas non plus de sauts à droite. Pour $e>d$, on pose

$$T = \inf\ \{t\geqslant 0:\ Y_{t_+}-Y_t > e-d\}$$

et supposons $P(T<\infty)>0$. Sur $\{T<\infty\}$, $Y_T=d$, $Y_T^n\leqslant d$, et si

$$T_n = \inf\{t>T:\ Y_t^n>e\} \quad ,$$

on a $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Sur l'espace filtré $(\{T<\infty\}, \mathcal{F}_{t+T}\cap\{T<\infty\}, \frac{P(.\cap\{T<\infty\})}{P(T<\infty)})$, le processus $W'_t=W_{t+T}-W_T$ est encore un mouvement brownien et les processus $Y'^n_t=Y^n_{t+T}$ sont solutions de

$$\begin{cases} dY'^n_t = \sigma(Y'^n_t)dW'_t + g(Y'^n_t)dt - k_n(Y'^n_t)dt \\ Y'^n_0 = Y^n_T \quad . \end{cases}$$

Pour $d<f<e$, soit X^n la solution de

$$\begin{cases} dX_t^n = \sigma(X_t^n)dW_t' + g(X_t^n)dt - k_n(X_t^n)dt \\ X_0^n = f \end{cases}$$

et un théorème de comparaison élémentaire montre que p.s. sur $\{T<\infty\}$, $X_t^n \geq Y_t'^n$. Si l'on pose $X_t = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_t^n$, comme $X_0=f$ est dans l'intérieur de Dom ∂h, on vient de voir que X est continu à droite pour t=0, et ainsi, pour

$$S_n = \inf\{t>0 : X_t^n > e\} ,$$

on a $\lim_{n\to\infty} S_n > 0$ p.s. sur $\{T<\infty\}$. Comme $T_n \geq T+S_n$, on ne peut avoir $\lim T_n = T$ p.s. sur $\{T<\infty\}$, d'où la continuité à droite de Y_t sur le bord.

Etudions d'un peu plus près ce qui se passe lorsque Y_t rencontre le bord.

Si $d \notin$ Dom ∂h (cas III et cas IV), alors $k_n(d) \to -\infty$ et

$$K_t = \lim_{p\to\infty} \int_0^t k_{n_p}(Y_s^{n_p})ds \leq \lim_{p\to\infty} \int_0^t 1_{\{Y_s=d\}} k_{n_p}(d)ds ,$$

d'où $\int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}ds = 0$.

Si $d \in$ Dom ∂h (cas II), alors $k_n(d) \to k_+(d) > -\infty$. Choisissant pour fonction $j(x)=1$ pour $x=d$ et $j(x)=0$ pour $x\neq d$, on montre grâce à la formule

$$\int_{\mathbb{R}} j(a)L_t^a(Y)da = \int_0^t j(Y_s)\sigma^2(Y_s)ds$$

que $\sigma^2(d) \int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}ds=0$, donc à nouveau $\int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}ds=0$ si $\sigma(d)\neq 0$. Si $\sigma(d)=0$, la même formule avec $j(x)=\frac{1}{(x-d)^2}$ pour $x>d$ et 0 pour $x\leq d$ montre par continuité du temps local en d que $L_t^d(Y)=0$, d'où

$$Y_t = \eta + \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}\sigma(Y_s)dW_s + \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}g(Y_s)ds - \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}dK_s ,$$

ce qui montre que

$$\int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}dK_s = g(d) \int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}ds .$$

Or, pour tout e>d tel que l'on ait $Y(\omega)\leq e$ dans un intervalle $[u,v]$, on a

$$K_v(\omega) - K_u(\omega) \leq (v-u)\, k_+(e),$$

et par conséquent pour tout $s\geq 0$ tel que $Y_s(\omega)=d$, on a

$$\lim_{r\to 0} \sup \left\{ \frac{K_v(\omega)-K_u(\omega)}{v-u} \; ; \; |v-u|<r,\ 0\leq u\leq s<v \right\} \leq k_+(d) .$$

On vient de voir que si $\{s : s\leq t, Y_s(\omega)=d\}$ est de mesure de Lebesgue non nulle, la densité de K sur cet ensemble doit valoir p.p. $g(d)$; cela nécessite donc $g(d)\leq k_+(d)$, autrement dit $(d,g(d)) \in Gr(\partial h)$.

Conclusion.

Il reste à montrer que pour tous processus optionnels α_t et β_t tels que $(\alpha_t,\beta_t) \in Gr(\partial h)$, la mesure $(Y_t-\alpha_t)(dK_t-\beta_t dt)$ est positive. C'est clair par monotonie de ∂h sur l'ensemble des (s,ω) tels que $Y_s(\omega)$ soit dans l'intérieur de Dom ∂h, car alors K_s a une densité comprise entre $k_-(Y_s)$ et $k_+(Y_s)$. Enfin, si la mesure $1_{\{Y_s=d\}}ds$ n'est pas nulle, on a nécessairement $(d,g(d)) \in Gr(\partial h)$ et

$$1_{\{Y_s=d\}}(Y_s-\alpha_s)(dK_s-\beta_s ds) = 1_{\{Y_s=d\}}(d-\alpha_s)(g(d)-\beta_s)ds \geq 0 \quad ,$$

tandis que si cette mesure est nulle,

$$1_{\{Y_s=d\}}(Y_s-\alpha_s)(dK_s-\beta_s ds) = 1_{\{Y_s=d\}}(d-\alpha_s)dK_s \geq 0.$$

5. EXISTENCE. CAS GENERAL.

Passons au cas général d'une fonction h convexe, propre, semi-continue inférieurement, et choisissons b et c dans l'intérieur de Dom ∂h, avec $b<c$. Posons

$$\begin{aligned} h^1(x) &= h(x) && \text{pour } x\leq c \\ &= h(c) + (x-c)k_-(c) && \text{pour } x>c \\ h^2(x) &= h(x) && \text{pour } x\geq b \\ &= h(b) + (x-b)k_+(b) && \text{pour } x<b \quad . \end{aligned}$$

Les fonctions

$$h'^1(x) = h^1(x) - (x-c)k_-(c)$$

$$h'^2(x) = h^2(-x) + (x+b)k_+(b)$$

sont convexes, propres, semi-continues inférieurement et décroissantes. On obtient aisément une solution (Y^1,K^1) au problème (h^1,σ,g,η^1) en considérant d'après le paragraphe précédent la solution (Y'^1,K'^1) du problème $(h'^1,\sigma,g-k_-(c),\eta^1)$ et en posant

$$Y_t^1 = Y_t'^1$$

$$K_t^1 = K_t'^1 + k_-(c)t$$

(on a choisi η^1 arbitrairement $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $\overline{\mathrm{Dom}\,\partial h^1}$). Pour le problème (h^2,σ,g,η^2), on considère d'abord la solution (Y'^2,K'^2) du problème $(h'^2,\sigma',g',-\eta^2)$, où

$$\sigma'(x) = -\sigma(-x)$$

$$g'(x) = -g(-x) + k_+(b) ,$$

et l'on trouve la solution cherchée en posant

$$Y_t^2 = -Y_t'^2$$

$$K_t^2 = -K_t'^2 + k_+(b)t.$$

Notons alors $(Y^{1,1},K^{1,1})$ la solution du problème (h^1,σ,g,η) et posons

$$S_1 = \inf\{t>0 : Y_t^{1,1} = c\} \quad .$$

Sur $\left(\{S_1<\infty\}, \mathcal{F}_{t+S_1} \cap \{S_1<\infty\}, \frac{P(.\cap\{S_1<\infty\})}{P(S_1<\infty)}\right)$ muni du brownien $W_t' = W_{t+S_1} - W_{S_1}$, on pose $(Y^{1,2},K^{1,2})$ la solution du problème (h^2,σ,g,c), puis

$$S_2 = \inf\{t>S_1 : Y_{t-S_1}^{1,2} = b\} \quad ;$$

de même, sur $\{S_2<\infty\}$, on pose $(Y^{1,3},K^{1,3})$ la solution du problème (h^1,σ,g,b), et ainsi de suite.

Egalement notons $(Y^{2,1},K^{2,1})$ la solution du problème (h^2,σ,g,η) et posons

$$T_1 = \inf\{t>0 : Y_t^{2,1} = b\}$$

puis

$$T_2 = \inf\{t>T_1 : Y_{t-T_1}^{2,2} = c\}$$

et ainsi de suite. Il est facile de vérifier que les deux suites $(S_p, p\geq 1)$ et $(T_p, p\geq 1)$ tendent vers l'infini p.s. On trouvera la solution du problème (h,σ,g,η) en posant

$$Y_t = 1_{\{\eta\leq b\}}(Y_t^{1,1}1_{\{t\leq S_1\}} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{t-S_p}^{1,p+1}\; 1_{\{S_p<t\leq S_{p+1}\}})$$
$$+\; 1_{\{\eta>b\}}(Y_t^{2,1}1_{\{t\leq T_1\}} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{t-T_p}^{2,p+1}\; 1_{\{T_p<t\leq T_{p+1}\}})$$
$$K_t = 1_{\{\eta\leq b\}}(K_{t\wedge S_1}^{1,1} + \sum_{p=1}^{\infty} K_{(t\wedge S_{p+1})-S_p}^{1,p+1}\; 1_{\{S_p\leq t\}})$$
$$+\; 1_{\{\eta>b\}}(K_{t\wedge T_1}^{2,1} + \sum_{p=1}^{\infty} K_{(t\wedge T_{p+1})-T_p}^{2,p+1}\; 1_{\{T_p\leq t\}}) \quad .$$

6. QUELQUES PRECISIONS.

La démonstration d'existence nous a permis de décrire le comportement de la solution (Y,K). Nous allons donner quelques détails supplémentaires.

Soit b dans l'intérieur de Dom h. Lorsque Y_t vaut b, K admet en t une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Si l'ensemble $\{t: Y_t=b\}$ a une mesure de Lebesgue non nulle, K a sur cet ensemble la densité g(b), et de fait Y reste en b dès qu'il a atteint ce point. Sinon, $k_+(Y_t)$ et $k_-(Y_t)$ sont égaux p.p. sur $\mathbb{R}_+$, donc égaux à la densité de K_t, du moins tant que Y_t reste à l'intérieur de Dom h.

Soit maintenant d un point de la frontière de Dom h (cas II,III ou IV). De la même façon, si $\sigma(d)=0$ et (d,g(d)) est dans le graphe de ∂h (nous sommes nécessairement dans le cas II), Y s'arrête dès qu'il a atteint le point d.
Sinon, la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{t: Y_t=d\}$ est nulle et la formule de Tanaka appliquée au cas où d est frontière à gauche donne

$$Y_t = \eta + \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}\sigma(Y_s)dW_s + \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}g(Y_s)ds - \int_0^t 1_{\{Y_s>d\}}dK_s + \frac{1}{2}L_t^d \quad ,$$

ce qui montre que

$$\int_0^t 1_{\{Y_s=d\}}dK_s = -\frac{1}{2}L_t^d \qquad (\;+\frac{1}{2}L_t^{d-} \text{ si d est frontière à droite }) \quad .$$

Si d n'est pas dans Dom h (cas IV), on peut voir que $L_t^d=0$ (respectivement $L_t^{d-}=0$). En effet, en se plaçant pour simplifier dans le cas où h est décroissante, on a

$$K_t = \lim_{p\to\infty} \int_0^t k_{n_p}(Y_s^{n_p})\, ds \leqslant \int_0^t k_+(Y_s)\, ds \quad ;$$

si $L_t^d > 0$, on aurait

$$\int_0^t \sigma^2(Y_s)\, k_+(Y_s)\, ds = \int_d^\infty k_+(a)\, L_t^a\, da = -\infty \quad ,$$

et comme $\sigma^2(Y_s)$ est borné sur $[0,t]$, cela entraînerait $K_t = -\infty$. De plus, lorsque $\sigma(d) \neq 0$ et $\int_{d+} \exp \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(d)}\, dz = +\infty$ (même condition avec d- si d est frontière à droite), alors p.s. le processus Y n'arrive jamais en d. En effet, supposons encore h décroissante, et soient b et c tels que $d<b<c$ et $\sigma(x)\neq 0$ pour $d\leqslant x\leqslant c$; soit enfin Y^n l'approximation de Y de condition initiale $Y_0^n = b$; si l'on pose

$$T_n = \inf\{t>0 : Y_t^n = d \text{ ou } c\},$$

alors

$$P(Y_{T_n}^n = d) = \frac{\displaystyle\int_b^c \exp\left[-2\int_b^z \frac{g(u)-k_n(u)}{\sigma^2(u)}\, du\right] dz}{\displaystyle\int_d^c \exp\left[-2\int_b^z \frac{g(u)-k_n(u)}{\sigma^2(u)}\, du\right] dz}$$

et cette expression tend vers 0 quand $n\to\infty$ si $\int_{d+} \exp \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(d)}\, dz = +\infty$.

Pour conclure, notons que Y est une diffusion de générateur infinitésimal A défini par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{f \in C_b^2(\overline{\mathrm{Dom}\ \partial h}) : \dfrac{df}{dx} = 0 \text{ à la frontière de Dom } \partial h\} \\ Af(x) = \dfrac{1}{2}\sigma^2(x)\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) + (g(x)-h'(x))\dfrac{df}{dx}(x) \quad , \end{cases}$$

où h' est toute fonction sur l'intérieur de Dom ∂h telle que $(x,h'(x)) \in Gr(\partial h)$ avec la seule condition: lorsque $\sigma(x)=0$ et qu'en même temps $(x,g(x)) \in Gr(\partial h)$, alors on doit choisir $h'(x)=g(x)$.

REFERENCES.

[1] EL KAROUI (N.), CHALEYAT-MAUREL (M.). Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. Cas continu. Astérisque 52-53,1978,117-144.

[2] KREE (P.). Diffusion equations for multivalued stochastic differential equations. Journal of Funct. Analysis, 49,1982,73-90.

[3] LE GALL (J.F.). Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Lect.Notes in Math. 986. Séminaire de Probabilités XVII,1983,15-31.

[4] MENALDI (J.L.) Stochastic variational inequality for reflected diffusion. Indiana Univ.Math.Journal 32,1983,733-744.

[5] TANAKA (H.). Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. Hiroshima Math.J. 9,1979,163-177.

Dépt. de Math. et Info.
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 ORLEANS Cédex 2