Denis Feyel

Sur la méthode de Picard (EDO et EDS)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 515-519
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__515_0>

SUR LA METHODE DE PICARD (EDO et EDS)

Denis FEYEL[(*)]

On sait que la solution d'une équation différentielle ordinaire lipschitzienne est à croissance au plus exponentielle. Cela conduit à remplacer la norme uniforme par une norme équivalente pour laquelle on pourra appliquer le théorème du point fixe de Banach. Une méthode analogue permet de traiter le cas des équations différentielles stochastiques.

Considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$dx_t = F(t,x_t)dt \ ; \quad x_o = \chi$$

où F est borélienne sur $[o,a] \times B$, B est un espace de Banach (norme $|.|$) , et F vérifie la condition de Lipschitz uniforme :

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq K\ |x-y| \quad , \text{ pour } x \text{ et } y \in B$$

et $\displaystyle\int_o^a |F(t,o)|\ dt < \infty$

Si x est une fonction sur $[o,a]$ à valeurs dans B , posons

$$\| x \| = \operatorname{Sup}_{o \leq t \leq a} |\exp(-ct)\, x_t|$$

PROPOSITION. *L'application* $x \to x^\sim$ *définie par*

$$x_t^\sim = \chi + \int_o^t F(s,x_s)\ ds$$

est contractante pour $c > K$.

Démonstration. On a pour tout $t \in [o,a]$:

$$\exp(-ct)\ |y_t^\sim - x_t^\sim| \leq K \int_o^t \exp(-c(t-s))\ \exp(-cs)\ |y_s - x_s|\ ds \leq K/c\ \| y-x \|$$

puis

$$\| y^\sim - x^\sim \| \leq K/c\ \| y-x \|$$

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Equipe d'Analyse - Tour 56 - 4, place Jussieu - 4ème Etage
75252 PARIS CEDEX 05

Remarques. 1) En posant $x(t,t_o,\chi) = \chi + \int_o^t F(s,x(s,t_o,\chi))\,ds$, on trouve la même majoration, de sorte que la suite de Picard converge uniformément par rapport à $(t,t_o,\chi) \in \Delta x B$, avec $\Delta = \{(t,t_o)/o \leq t_o \leq t \leq a\}$.

2) En désignant par x^n une suite de Picard, on trouve l'inégalité : $|x_t - x_t^o| \leq A \exp(ct) \; \| x^1 - x^o \|$

pour $t \leq a$, où A est une constante ne dépendant que de K/c , de sorte que si $F(t,O)$ est à croissance au plus exponentielle, alors x_t elle-même est à croissance au plus exponentielle.

CAS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Considérons l' EDS :

$$dX_t = F(t,X_t)dW_t + G(t,X_t)dt \; ; \quad X_o = \chi$$

où W_t est un mouvement brownien à valeurs dans un espace euclidien B de dimension finie m et de norme $|.|$, par rapport à un système $(\Omega,\underline{F}_t,P)$ vérifiant les conditions habituelles.

Disons pour simplifier qu'un processus est *euclidien* si :

- il est à valeurs dans B ,
- il est prévisible,
- il est de carré intégrable.

On supposera que $\chi \in L^2(\underline{F}_o,B)$, et que F et G ont les propriétés suivantes :

a) pour tout $t \in [o,a]$, $F(t,.)$ et $G(t,.)$ sont des applications définies sur $L^2(\underline{F}_t,B)$ à valeurs respectivement dans $L^2(\underline{F}_t, \text{End } B)$ et $L^2(\underline{F}_t,B)$. (Rappelons que End B est euclidien pour la norme de la trace).

b) on a : $N_2(F(t,\lambda) - F(t,\mu)) \leq K\, N_2(\lambda-\mu)$,

$$N_2(G(t,\lambda) - G(t,\mu)) \leq K\, N_2(\lambda-\mu)$$

pour tout $(\lambda,\mu) \in L^2(\underline{F}_t,B)$.

c) pour tout processus euclidien Y_t , $F(t,Y_t)$ et $G(t,Y_t)$ ont des modifications en processus prévisibles.

d) $$E\int_o^a (|F(t,o)|^2 + |G(t,o)|^2)dt < \infty .$$

On introduit la norme suivante pour un processus prévisible X_t :

$$\| X \| = \operatorname{Sup}_{t\leq a} \exp(-ct)\ N_2(X_t^*)$$

avec $X_t^* = \operatorname{Sup}_{s\leq t} |X_s|$

THEOREME. *L'application* $X \to X^{\sim}$ *définie par*

$$X_t^{\sim} = \chi + \int_o^t F(s,X_s)dW_s + G(s,X_s)ds$$

est contractante pour $c > \operatorname{Sup}(2K, 8K^2)$.

Démontrons d'abord le :

LEMME. *Soient* H_t *et* V_t *définis par :*

$$H_t = \int_o^t f_s\, dW_s\ ,\ V_t = \int_o^t g_s\, ds$$

où f_t *(resp.* g_t*) sont des processus prévisibles à valeurs dans* End B *(resp. B) . On a les majorations :*

$$\| H \| \leq (2/c)^{1/2} \| f \| ,\quad \| V \| \leq 1/c \| g \|$$

Démonstration. On écrit :

$$E(|H_t|^2) = E\int_o^t |f_s|^2 ds$$

$$\exp(-2ct)E(|H_t|^2) \leq \int_o^t \exp(-2c(t-s))E(\exp(-2cs)\ |f_s|^2\, ds$$

$$\exp(-2ct)E(|H_t|^2) \leq 1/2c\ (1-\exp(-2ct))\ \| f \|^2$$

En utilisant l'inégalité de Doob et en prenant le $\operatorname{Sup}_{t\leq a}$, on obtient la première inégalité.

On a maintenant

$$|V_t^*|^2 \leq 2\int_o^t |V_s|\ |g_s|\ ds \leq \lambda\int_o^t |V_s|^2 ds + 1/\lambda\int_o^t |g_s|^2 ds$$

pour tout $\lambda > 0$, ce qui est une manière d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit :

$$E(\exp(-2ct)\ |V_t^*|^2) \leq \lambda/2c\ \| V \|^2 + 1/2\lambda c\ \| g \|^2$$

En prenant le Inf_{λ} puis le $\mathrm{Sup}_{t\leq a}$, on obtient la deuxième inégalité.

Démonstration du théorème. Si X et Y sont deux processus euclidiens, on a par le lemme :

$$\| \tilde{X}-\tilde{Y} \| \leq K/c' \; \| X-Y \|$$

avec $c' = c/(1 + (2c)^{1/2})$

donc l'application est contractante pour $c > \mathrm{Sup}(2K, 8K^2)$.

COROLLAIRES.

1) On retrouve évidemment le fait que la suite de Picard définie par $X_t^o = \chi$ *converge uniformément sur* $[o,a]$ *pour presque toute trajectoire.*

2) Supposons que les processus $F(t,o)$ *et* $G(t,o)$ *soient uniformément bornés par une constante* M *. Le lemme entraine la majoration indépendante de* a *:*

$$\| X^1 - X^o \| \leq M/c'$$

Pour $c' > K$ *, et si* X *est le point fixe, on a donc :*

$$\| X - X^o \| \leq K/c'-K)\; M/c' = KM/c'(c'-K) < M(c'-K)$$

Il s'ensuit que pour tout $t \in [o,+\infty[$ *, on a :*

$$N_2(X_t - \chi) \leq M\, exp(ct)/(c'-K)$$

Si l'on fait tendre t *vers* 0 *, il est loisible de prendre par exemple* $c=1/t$*, ce qui donne*

$$N_2(X_t - \chi) \leq 4\; Me\;\; t^{1/2}/(1-4Kt^{1/2})$$

On trouve évidemment que X_t *tend vers* χ *quand* t *tend vers* 0 *, mais ce qui est intéressant, c'est que la majoration est uniforme par rapport à* χ *.*

oooooooooo

MAJORATIONS DANS L^p . On suppose $p > 2$.

L'espace B est toujours euclidien, mais on remplace L^2 par L^p notamment dans les hypothèses a), b), c), d) .

On introduit la norme suivante, pour un processus prévisible :

$$\| X \| = \mathrm{Sup}_{t\leq a}\; \exp(-ct)\; N_p(X_t)$$

THEOREME. L'application $X \to \tilde{X}$ *définie comme plus haut est contractante pour* $c > Sup(2K, 4A_p^2K^2)$ *, où* $A_p^2 \doteq p/2\; (p/p-1))^p$ *.*

Il faut modifier le lemme.

<u>*LEMME*</u>. *On a* $\| H \| \leq A_p/c^{1/2} \| f \|$,

et toujours $\| V \| \leq 1/c \| g \|$.

<u>Démonstration</u>. D'après la formule d'Ito :

$$|H_t|^p = \text{martingale} + p(p-1)/2 \int_0^t |f_s|^2 \, |H_s|^{p-2} \, ds$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$|H_t|^p \leq \text{martingale} + p(p-1)/2 \, [\beta\lambda^\alpha \int_0^t |f_s|^p \, ds + \alpha\lambda^{-\beta} \int_0^t |H_s|^p \, ds]$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = (p-2)/p, \beta = p/2$.

On en déduit successivement :

$$\exp(-pct) E(|H_t|^p) \leq p(p-1)/2pc \, [\, \beta\lambda^\alpha \| f \|^p + \alpha\lambda^{-\beta} \| H \|^p]$$

$$\exp(-pct) E(H_t^{*p}) \leq p(p-1)/2pc \, (p/(p-1))^p \, [\beta\lambda^\alpha \| f \|^p + \alpha\lambda^{-\beta} \| H \|^p]$$

d'après l'inégalité de Doob. En prenant le Inf_λ et le $\mathrm{Sup}_{t \leq a}$, on obtient :

$$\| H \|^2 \leq A_p{}^2/c \, \| f \|^2$$

On a maintenant

$$|V_t{}^*|^p \leq p \int_0^t |g_s|^2 \, |V_s|^{p-1} \, ds \leq p \, [\beta\lambda^\alpha \int_0^t |g_s|^p \, ds + \alpha\lambda^{-\beta} \int_0^t |V_s|^p \, ds]$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = (p-1)/p$, $\beta = p$.

D'où comme ci-dessus :

$$\exp(-pct) E(V_t{}^{*p}) \leq p \, [\beta\lambda^\alpha \| g \|^p + \alpha\lambda^{-\beta} \| V \|^p]$$

et en prenant le Inf_λ et le $\mathrm{Sup}_{t \leq a}$:

$$\| V \| \leq 1/p \, \| g \|$$

<u>Démonstration du théorème</u>. Si X et Y sont deux processus p-euclidiens, on a par le lemme :

$$\| X^\sim - Y^\sim \| \leq K/c' \, \| X-Y \|$$

avec cette fois : $c' = c/(1 + A_p c^{1/2})$

donc l'application est contractante pour $c > \mathrm{Sup}(2K, 4A_p{}^2 K^2)$.