Jean-Dominique Deuschel

Représentation du champ de fluctuation de diffusions indépendantes par le drap brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 428-433
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__428_0>

Représentation du champ de fluctuation

de diffusions indépendantes par le drap brownien

J.D. Deuschel
Mathematik Department
E.T.H. Zentrum
CH-8092 Zürich (Suisse)

1. Introduction

Le champ de fluctuation de diffusions indépendantes est décrit par K. Itô /3/ (voir aussi /4/ et /5/) à l'aide d'une équation stochastique différentielle (ESD) par rapport à un processus de Wiener à valeur distributionnelle. Le but de cette note est de donner une représentation de ce processus par le drap brownien, ce qui permet de dériver l'ESD partielle satisfaite par le champ de fluctuation dans les coordonnées temps-espace.

2. Théorème limite centrale pour des diffusions indépendantes

Rappelons tout d'abord un résultat de K. Itô /3/.
Soit $\{ X_t^k, t\geq 0, k\varepsilon N\}$ une famille dénombrable de diffusions indépendantes dans R^1, solutions des ESD

(2.1) $$dX_t^k = b(X_t^k)dt + s(X_t^k)dW_t^k \quad , \quad X_0^k = x_0^k$$

où $\{W_t^k, t\geq 0, k\varepsilon N\}$ est un système de browniens indépendants.
Supposons que b et s soient suffisamment réguliers afin que pour t>0 la densité de la probabilité de transition $p_t(x,y)$ existe, qu'elle soit lisse en x et y et strictement positive.
Prenons comme mesure initiale la mesure produit $\prod_{k\varepsilon N} \mu$ où μ est L^2-bornée et notons par

$$p_t(y) = \int p_t(x,y)\mu(dx)$$

la densité de la loi de X_t^k.
Pour $n\varepsilon N$, considérons le processus $\{Y_t^{(n)}, t\geq 0\}$ à valeur dans $\mathcal{S}'$ (l'espace des distributions tempérées de R^1) défini par

$$(2.2)\quad Y_t^{(n)}(f) := n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\{f(X_t^k)-E(f(X_t^k))\}\qquad f\in\mathcal{S}.$$

Soient L et D les opérateurs sur $\mathcal{S}$ donnés par

$$Lf(x) := b(x)f'(x)+1/2 s^2(x)f''(x)$$

$$Df(x) := s(x)f'(x).$$

Avec la formule d'Itô on a

$$(2.3)\quad Y_t^{(n)}(f) = Y_0^{(n)}(f)+{}_0\int^t Y_s^{(n)}(Lf)ds+{}_0\int^t dM_s^{(n)}(Df)$$

où $\{M_t^{(n)}(Df), t\geq 0\}$ est la martingale

$$M_t^{(n)}(Df) := n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}{}_0\int^t Df(X_s^k)dW_s^k.$$

Par le théorème limite centrale multi-dimensionnel on obtient le résultat suivant (c.f. Itô /3/).

<u>Proposition</u> (2.4) Le processus $\{Y_t^{(n)}, t\geq 0\}$ converge en loi vers un processus gaussien centré $\{Y_t, t\geq 0\}$ à valeur dans $\mathcal{S}'$ dont la covariance est donnée par

$$\mathrm{cov}(Y_t(f), Y_s(g)) = \mathrm{cov}(f(X_t^k), g(X_s^k))\qquad f,g\in\mathcal{S}$$

Ce processus est solution de l'ESD à valeur dans $\mathcal{S}'$

$$(2.5)\quad Y_t(f)=Y_0(f)+{}_0\int^t Y_s(Lf)ds+{}_0\int^t dB_s(Df)\qquad f\in\mathcal{S}$$

où $\{B_t, t\geq 0\}$ est un processus de Wiener à valeur dans $\mathcal{S}'$ dont la variation quadratique est telle que

$$(2.6)\quad \langle B(f)\rangle_t = {}_0\int^t E(f^2(X_s^k))ds = {}_0\int^t \int_{\mathbb{R}} f^2(y)p_s(y)dyds\qquad f\in\mathcal{S}.$$

3. <u>La représentation par rapport au drap brownien</u>

Nous adoptons ici la notation de Cairoli et Walsh / 1/.
En utilisant la complétion de $B_t(f)$ en $L^2(P)$, nous définissons un processus à deux paramètres $M=\{M_z, z=(t,x)\in R^+ xR\}$ par

$$(3.1)\quad M_{t,x} := \begin{cases} B_t(I_{[0,x)}) & x\geq 0 \\ B_t(I_{(x,0]}) & x<0 \end{cases}$$

Soit $F = \{F_z, z\in R^+ xR\}$ la filtration générée par $\{M_z, z\in R^+ xR\}$.

Lemme (3.2) Le processus M est une martingale forte à deux indices, continue dont la variation quadratique $\langle M\rangle=\{\langle M\rangle_z, z\varepsilon \mathbf{R}^+ x\mathbf{R}\}$ est donnée par

$$\langle M\rangle_z = \iint_{R_z} p_s(y)\,dyds$$

Démonstration Par (2.6) nous voyons que $M(z_j,\tilde{z}_j]$, les accroissements de M_z sur des rectangles disjoints $(z_j,\tilde{z}_j], j=1,\dots,n$

$$M(z_j,\tilde{z}_j] := M_{\tilde{z}_j} - M_{t_j\tilde{x}_j} - M_{\tilde{t}_j x_j} + M_{z_j}$$

sont centrés et indépendants, ce qui implique la première partie de l'énoncé. Comme M est un processus gaussien

$$E((M(z,\tilde{z}])^{2p}) = c_p E((M(z,\tilde{z}])^2)^p = c_p K(\text{surface}(z,\tilde{z}]))^p$$

d'où nous déduisons la continuité de M par le critère de Kolmogorov. D'autre part, pour $z<\tilde{z}$ on a

$$E(M_{\tilde{z}}^2 - M_z^2 | F_z) = E(M^2(z,\tilde{z}] + M^2((t,0),(\tilde{t},x)] + M^2((0,x),(t,\tilde{x})] | F_z)$$

$$= E(M^2(z,\tilde{z}]) + E(M^2((t,0),(\tilde{t},x)]) + E(M^2((0,x),(t,\tilde{x})])$$

$$= \iint_{R_{\tilde{z}}} p_s(y)\,dyds - \iint_{R_z} p_s(y)\,dyds \;. \;\emptyset$$

Proposition (3.3) Il existe deux draps browniens indépendants $W^+=\{W_z^+, z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^+\}$ et $W^-=\{W_z^-, z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^-\}$ par rapport à $\{F_z\}$ tels que

$$M_z = \begin{cases} \iint_{R_z} p_s^{1/2}(y)\,dW_{sy}^+ & z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^+ \\ \iint_{R_z} p_s^{1/2}(y)\,dW_{sy}^- & z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^- \end{cases}$$

Démonstration Il suffit de voir que pour $z\varepsilon R^+ xR^+$,

$$W_z^+ := \iint_{R_z} p_s^{-1/2}(y)\,dM_{sy}$$

est un drap brownien(c.f. /6/Prop.5.5). $\emptyset$

Soit $W=\{W_z, z\varepsilon R^+ x\mathbf{R}\}$ le processus de Wiener à deux indices donné par

$$W_z := \begin{cases} W_z^+ & z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^+ \\ W_z^- & z\varepsilon\mathbf{R}^+ x\mathbf{R}^- \end{cases}$$

alors par $L^2(P)$-complétion on peut montrer que

$$(3.4)\quad B_t(f) = \iint_{[0,t)x\mathbf{R}} f(y)\,p_s^{1/2}(y)\,dW_{sy}$$

ainsi l'ESD (2.5) se transforme en une ESD par rapport à W :

$$(3.5)\quad Y_t(f)=Y_0(f)+{}_0\int^t Y_s(Lf)ds+\iint_{[0,t)\times\mathbb{R}} f'(y)s(y)p_s^{1/2}(y)dW_{sy}$$

Remarque (3.6) $<M>_z$ est la variation quadratique de la martingale M sur le rectangle R_z :

$$<M>_z = \lim_{|\Delta(n)|\to 0} \sum_{i,j} (M(\Delta_{ij}(n)))^2 \qquad \text{P-p.s.}$$

où $\Delta(n)$,n=1,2,..., sont des partitions de R_z. Par (2.5) on peut définir une fonction positive mesurable α telle que pour z=(t,x)

$$p_t(x)=\frac{d<M>_z}{dz} = \alpha(Y)(z)$$

ce qui nous donne une ESD indépendante de $p_t(x)$ pour Y (c.f. /3/).

4. L'équation stochastique différentielle partielle

Soit $\{Y_z, z\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\}$ le processus à deux indices défini (en $L^2(P)$-complétion) par

$$Y_{tx} := Y_t(I_{(-\infty,x]}) \quad .$$

Les accroissements du processus Y : $Y_{tx}-Y_{ty}$ décrivent la fluctuation des diffusions X^k,k=1,2,... au temps t sur l'intervalle (y,x]. Y est un processus gaussien, centré dont la variance est donnée par

$$(4.1)\quad E((Y_{tx})^2)=\mathrm{var}(I_{(-\infty,x]}(X_t^k)).$$

Comme pour la martingale M, on peut vérifier la continuité de Y. Soit $\hat{p}_t(x,y)$ le noyau défini par

$$(4.2)\quad \hat{p}_t(x,y) := -\partial_y P_t(y,x) = -\partial_y ({}_{-\infty}\int^x p_t(y,z)dz).$$

Pour tout y fixé, $\hat{p}_t(x,y)$ est la solution de l'équation différentielle partielle

$$(4.3)\quad \begin{aligned} \partial_t\hat{p}_t(x,y) &= \hat{L}\hat{p}_t(x,y) \\ \lim_{t\to 0} \hat{p}_t(x,y) &= \delta_{x-y} \end{aligned}$$

où $\hat{L}$ est l'opérateur

$$\hat{L}\hat{p}_t(x,y) := (-b(x)+s'(x)s(x))\partial_x\hat{p}_t(x,y)+1/2s^2(x)\partial_x^2\hat{p}_t(x,y).$$

<u>Proposition</u> (4.4) Le processus $Y=\{Y_{tx},(t,x)\in\mathbb{R}^+x\mathbb{R}\}$ peut s'écrire de la forme

$$Y_{tx} = {}_{\mathbb{R}}\int Y_{0,y}\hat{p}_t(x,y)dy- \iint_{[0,t)x\mathbb{R}} \hat{p}_{t-s}(x,y)s(y)p_s^{1/2}(y)dW_{sy}$$

où $Y_0=\{Y_{0x},x\in\mathbb{R}\}$ est le processus gaussien centré tel que

$$E(Y_{0x}Y_{0y}) = \mu(-\infty,x\wedge y]-\mu(-\infty,x]\mu(-\infty,y].$$

<u>Démonstration</u> Fixons t et x, soit F(s,y) la fonction lisse en s et y

$$F(s,y):=E(I_{(-\infty,x]}(X_t^k)\,|X_s^k=y)=P_{t-s}(y,x).$$

Alors par la formule d'Itô on a

$$I_{(-\infty,x]}(X_t^k)=F(t,X_t^k)=F(0,X_0^k)+{}_0\int^t\partial_y F(s,X_s^k)s(X_s^k)dW_s^k$$
$$=P_t(X_0^k,x)-{}_0\int^t\hat{p}_{t-s}(x,X_s^k)s(X_s^k)dW_s^k\ .$$

Par la proposition (2.4) et (3.4) nous obtenons

$$Y_{tx} = Y_0(P_t(\ ,x))- \iint_{[0,t)x\mathbb{R}} \hat{p}_{t-s}(x,y)s(y)p_s^{1/2}(y)dW_{sy}$$

où les intégrales sont bien définies puisque

$$\infty>var(I_{(-\infty,x]}(X_t^k))=var_\mu(P_t(X_0^k,x))+{}_0\int^t E((\hat{p}_{t-s}(x,X_s^k)s(X_s^k))^2)ds.$$

Il suffit alors de montrer par intégration partielle que

$${}_{\mathbb{R}}\int Y_{0,y}\hat{p}_t(x,y)dy = Y_0(P_t(\ ,x)).$$

Comme les deux processus sont gaussiens centrés, il faut vérifier que les covariances sont identiques :

$$cov({}_{\mathbb{R}}\int Y_{0,y}\hat{p}_t(x,y)dy,{}_{\mathbb{R}}\int Y_{0,\tilde{y}}\hat{p}_t(\tilde{x},\tilde{y})d\tilde{y}) = \iint_{\mathbb{R}x\mathbb{R}} E(Y_{0y}Y_{0\tilde{y}})\hat{p}_t(x,y)\hat{p}_t(\tilde{x},\tilde{y})dyd\tilde{y}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}x\mathbb{R}}\{\mu(-\infty,x\wedge\tilde{x}]-\mu(-\infty,x]\mu(-\infty,\tilde{x}]\}\hat{p}_t(x,y)\hat{p}_t(\tilde{x},\tilde{y})dyd\tilde{y}$$

$$={}_{\mathbb{R}}\int P_t(z,x)P_t(z,\tilde{x})\mu(dz)-{}_{\mathbb{R}}\int P_t(z,x)\mu(dz)\,{}_{\mathbb{R}}\int P_t(\tilde{z},\tilde{x})\mu(d\tilde{z})$$

$$= cov(Y_0(P_t(\ ,x),Y_0(P_t(\ ,\tilde{x}))).\ \emptyset$$

<u>Corollaire</u> (4.5) Le processus $Y=\{Y_{tx},(t,x)\in\mathbb{R}^+x\mathbb{R}\}$ est solution de l'ESD partielle linéaire

$$\partial_t Y_{t,x} = \hat{L}Y_{t,x}-s(x)p_t^{1/2}(x)dW_{tx}$$

c.à.d. pour tout $f \in \mathcal{S}$, $\langle Y_t, f\rangle := {}_{\mathbb{R}}\int Y_{tx} f(x)dx$ satisfait l'équation

$$\langle Y_t, f\rangle = \langle Y_0, f\rangle + {}_0\int^t \langle Y_s, \hat{L}^* f\rangle ds - \iint_{[0,t)\times R} f(x)s(x)p_s^{1/2}(x)dW_{sx} .$$

Démonstration L'équation ci-dessus est vérifiée par une règle de Fubini pour l'intégrale stochastique (c.f./5/). ∅

En conclusion nous voyons que l'ESD à valeur dans $\mathcal{S}'$ (2.5) peut être remplacée par une ESD partielle par rapport au drap brownien, ce qui nous donne une représentation du champ de fluctuation avec les coordonnées temps-espace $(t,x) \in R^+ \times R$. Dans des dimensions supérieures : $R^+ \times R^d$, ceci n'est pas toujours possible comme le montre un exemple de Walsh /5/.

Remarque (4.6) Une étude détaillée (existence, unicité, propriétés) des ESD partielles est décrite dans le cours de Walsh (voir aussi /2/ et /4/ Chap. 3).

Remerciements. L'auteur tient à remercier M. K. Itô pour les très utiles discussions échangées lors de son séjour à Zürich. Il remercie également M. A. Badikrian qui a eu l'amabilité de lui communiquer la référence /5/.

Littérature

/1/ Cairoli R. Walsh J.B.:Stochastic integrals in the plane, Acta Math. 134(1975) 111-183.

/2/ Funaki T.: Random motion of strings and related stochastic evolution equations, Nagoya Math.J. 89(1983)129-193.

/3/ Itô K. : Distribution-valued processes arising from independent Brownian motions, Math.Z. 182(1983) 17-33.

/4/ Itô K. : Foundations of stochastic differential equations in infinite dimensional spaces, SIAM (1984).

/5/ Walsh J.B. : An introduction to stochastic partial differential equations, Preprint (1985).

/6/ Zakai M. : Some classes of two parameter martingals, The Annals of Prob. 9(1981) 255-265.