

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J.-Y. CALAIS

MARC YOR

**Renormalisation et convergence en loi pour
certaines intégrales multiples associées au
mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 375-403

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__375_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RENORMALISATION ET CONVERGENCE EN LOI POUR CERTAINES
INTEGRALES MULTIPLES ASSOCIEES AU
MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^d$

J.Y. CALAIS et M. YOR^(*)

1. INTRODUCTION.

(1.0) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0.

L'objet de ce travail est l'étude asymptotique, lorsque $t \uparrow \infty$, des intégrales multiples :

$$(1.a) \quad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \dots \int_{u_{k-1}}^t du_k f(B_{u_2} - B_{u_1} ; B_{u_3} - B_{u_2} ; \dots ; (B_{u_k} - B_{u_{k-1}}))$$

où $f : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue à support compact. Plus précisément, on s'intéresse au comportement asymptotique du processus en t obtenu en remplaçant, dans ces intégrales, la variable t par (λt) , et en faisant tendre λ vers ∞ .

Par scaling, cette étude est ramenée à celle du comportement asymptotique, lorsque $n \rightarrow \infty$, des processus en t définis par :

$$(1.b) \quad I_k^{(n)}(f; t) \equiv \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \dots \int_{u_{k-1}}^t du_k f(n(B_{u_2} - B_{u_1}); n(B_{u_3} - B_{u_2}); \dots; n(B_{u_k} - B_{u_{k-1}}))$$

(1.1) On connaît déjà, pour $k = 2$, les résultats suivants :

• si $d = 2$, la suite :

$$(1.c) \quad n^2 \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \{f(n(B_{u_2} - B_{u_1})) - E[f(n(B_{u_2} - B_{u_1}))]\}$$

converge p.s. et dans L^2 ; ce résultat, dû pour l'essentiel à Varadhan [9], et redémontré de différentes manières à l'aide du temps local d'intersection (Rosen [7] ; Le Gall [5] ; Yor [10]) est souvent appelé "renormalisation de Varadhan".

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu -
 Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

• si $d = 3$, le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$(1.d) \quad (B_t; \frac{1}{\sqrt{\log n}} \{n^3 \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 f(n(B_{u_2} - B_{u_1})) - \frac{tn}{2\pi} \int \frac{dy}{|y|} f(y)\} \quad (t \geq 0))$$

converge en loi vers :

$$(B_t; \frac{1}{\pi} (\int f(y) dy) \beta_t \quad (t \geq 0)),$$

où $(\beta_t; t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel indépendant de $(B_t; t \geq 0)$ (cf : Yor [11]).

Pour compléter ces résultats, et par analogie avec les études "au second ordre" pour les fonctionnelles additives du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, en dimension $d = 1$ (Tanaka [14]) ou $d = 2$ (Kasahara-Kotani [4]), il semble naturel d'étudier :

- d'une part, la vitesse de convergence de l'expression (1.c) vers sa limite ; cette étude est menée en [12].

- d'autre part, la convergence en loi du processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, qui figure en (1.d), lorsque f satisfait : $\int dx f(x) = 0$ (on dit alors que f est une fonction-charge), et que l'on a supprimé le facteur $(\log n)^{-1/2}$; cette étude est entreprise au chapitre 3 du présent travail.

(1.2) Restons dans le cas $k = 2$, et présentons les résultats obtenus ci-dessous pour les dimensions $d \neq 2, 3$.

• Le cas de la dimension $d = 1$ est, bien sûr, très particulier, ceci étant dû à l'existence et à la continuité des temps locaux (ℓ_t^a) du mouvement Brownien réel. Nous montrons que :

$$(1.e) \quad \frac{n}{2} \{n \int_0^t du_1 \int_0^t du_2 f(n(B_{u_2} - B_{u_1})) - \bar{f} \int da (\ell_t^a)^2\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} -n(f) \cdot t,$$

$$\text{où } \bar{f} = \int_0^\infty db f(b), \text{ et } n(f) = \int_0^\infty db bf(b).$$

• Pour les dimensions $d \geq 4$, nous montrons que le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$(1.f) \quad (B_t; n^3 \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 f(n(B_{u_2} - B_{u_1})) - t n c_d \int \frac{dy}{|y|^{d-2}} f(y)) \quad (c_d = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{2 \cdot \pi})$$

converge en loi vers :

$$(\beta_t(1) ; \sum_{i=1}^d \beta_t^{(i)}(F^{(i)})),$$

$$\text{où } F = (F^{(i)} ; 1 \leq i \leq d) = \int_0^\infty ds \nabla(Uf)(B_s),$$

Uf désigne le potentiel newtonien de f , et $(\beta_t^{(i)}(H) ; i \leq d, t \geq 0, H \in L^2(\sigma(B_s), s \geq 0 ; P))$ est un processus gaussien centré de covariance : $\mathbb{E}(\beta_t^{(i)}(H) \beta_s^{(j)}(K)) = \delta_{i,j}(t \wedge s) E(HK)$.

Ce résultat est démontré en particulier au chapitre 2 ; il s'étend, à l'aide d'un argument de récurrence, aux processus $(I_k^{(n)}(f;t) t \geq 0)$ pour tout $k \geq 2$, lorsque $d \geq 4$. La loi limite obtenue peut encore être exprimée en termes du processus $(\beta_t(H))$ présenté ci-dessus.

En outre, la même méthode de démonstration permet de couvrir le cas des fonctions charge $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dont il a été question au paragraphe précédent ; pour ces fonctions, le résultat (1.f) est encore valable (avec $d = 3$, et $c_d = \frac{1}{2\pi}$).

(1.3) Nous terminons cette introduction en complétant le tableau de l'étude asymptotique de $I_k^{(n)}(f;t)$ pour toutes les dimensions d , et toutes les multiplicités k :

a) $d = 1$. Le résultat (1.e) admet une extension adéquate à tout ordre de multiplicité k , les quantités

$$\int da (\ell_t^a)^2 \quad \text{et} \quad t$$

qui figurent en (1.e) étant alors remplacées respectivement par :

$$\int da (\ell_t^a)^k \quad \text{et} \quad \int da (\ell_t^a)^{k-1}.$$

b) d = 2. Le résultat de renormalisation (1.c) vient d'être étendu par J. Rosen [8] sous la forme suivante : à toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue, à support compact, on associe $\phi^{(n)}(x) = n^2 \phi(nx)$ ($n \in \mathbb{N}$) ; alors, pour tout $t > 0$, l'expression :

$$(1.g) \quad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \dots \int_{u_{k-1}}^t du_k \{\phi^{(n)}(B_{u_2} - B_{u_1})\} \dots \{\phi^{(n)}(B_{u_k} - B_{u_{k-1}})\}$$

converge dans L^2 , lorsque $n \rightarrow \infty$ (on a posé : $\{X\} = X - E(X)$).

Indépendamment, E. Dynkin [2] a donné un développement asymptotique pour l'expression :

$$(1.g') \quad \int_0^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 \dots \int_{u_{k-1}}^t du_k \phi^{(n)}(B_{s_2} - B_{s_1}) \dots \phi^{(n)}(B_{s_k} - B_{s_{k-1}})$$

en s'appuyant sur sa construction des processus gaussiens liés aux intersections du mouvement brownien plan ([1]).

J. Rosen et M. Yor ([13]) ont également montré la convergence de (1.g) pour $k = 3$ et donné une représentation de sa limite comme intégrale stochastique.

c) d = 3. Nous conjecturons que le résultat (1.d) s'étend comme suit, pour tout ordre de multiplicité $k \geq 3$, et nous prouvons cette conjecture pour $k = 3$: le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$(B_t ; \frac{1}{\sqrt{\log n}} [n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; t) - n t f_1], t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(B_t ; c(f_k) \beta_t ; t \geq 0)$$

où $(\beta_t ; t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel indépendant de $(B_t ; t \geq 0)$ et $c(f_k)$ est une constante dépendant de f_k . Ces convergences en loi ont lieu conjointement pour tous les ordres de multiplicité, avec le même mouvement brownien β .

d) d $\geq$ 4. Nous avons déjà signalé en (1.2) que le résultat (1.f) s'étend de façon convenable à tout $k \geq 3$. Nous renvoyons ici simplement le lecteur à l'énoncé précis (Théorème (2.2) ci-dessous), celui-ci nécessitant un ensemble de notations assez important.

Indiquons enfin que la méthode de démonstration utilisée tout au long de ce travail est une variante de celle développée en [11] pour $d = 3$, $k = 2$. De façon à ne pas reprendre plusieurs fois les mêmes arguments sous différentes formes, nous avons dégagé un énoncé général (Proposition (2.1)) dont nous déduisons les différents résultats de ce travail pour $d \geq 3$.

2. ETUDE POUR LES DIMENSIONS $d \geq 4$.

La démonstration consiste à mettre en place une méthode de réduction de l'étude de $I_k^{(n)}(f;t)$, lorsque $n \rightarrow \infty$, à celle de certaines intégrales stochastiques, dont on fera ensuite l'étude asymptotique.

Nous aurons besoin d'un ensemble assez important de notations, que nous introduisons peu à peu au cours de la démonstration.

Il est suggéré au lecteur, dans un premier temps, de se placer dans le cas $k = 2$, puis, ensuite, de considérer le cas général.

(2.1) Dans toute la démonstration, les fonctions dépendant de $(k-1)$ variables ($k \geq 2$) seront affectées de l'indice k .

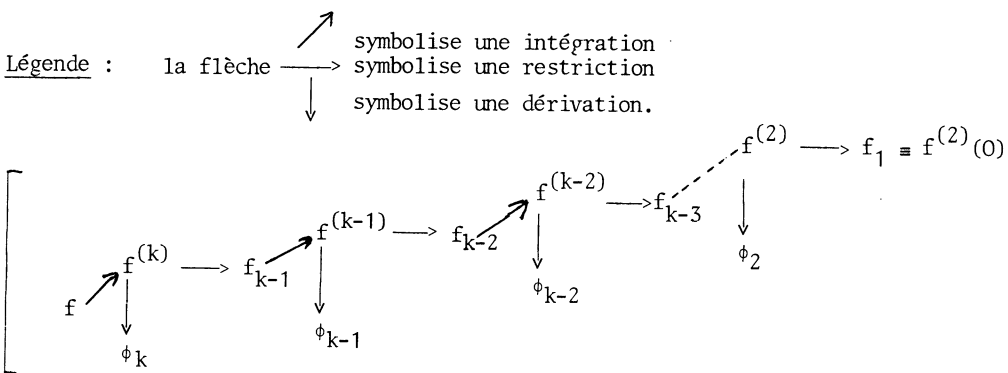
Ainsi, on note f_k pour f ; $\tilde{f}^{(k)}$ désigne le potentiel newtonien, pris par rapport à la variable x_{k-1} , de $f(x_1, \dots, x_{k-2}, \cdot)$, et ϕ_k le gradient par rapport à la variable x_{k-1} de $\tilde{f}^{(k)}$. On a, de façon explicite, en posant $c_d = \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(\frac{d}{2} - 1)$:

$$\tilde{f}^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}) = c_d \int \frac{dy}{|x_{k-1} - y|^{d-2}} f_k(x_1, \dots, x_{k-2}, y)$$

$$\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = c_d (2-d) \int \frac{dy (x_{k-1} - y)}{|x_{k-1} - y|^d} f_k(x_1, \dots, x_{k-2}, y).$$

On notera encore : $f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) = \tilde{f}^{(k)}(x_1, \dots, x_{k-2}, 0)$.

Pour permettre au lecteur de mémoriser ces notations, nous présentons le diagramme suivant :



On a alors, en utilisant ces notations, à l'aide de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
 & f^{(k)} [n(B_{u_2} - B_{u_1}), n(B_{u_3} - B_{u_2}), \dots, n(B_t - B_{u_{k-1}})] \\
 &= f_{k-1}^{(k)} [n(B_{u_2} - B_{u_1}), n(B_{u_3} - B_{u_2}), \dots, n(B_{u_{k-1}} - B_{u_{k-2}})] \\
 &+ n \int_{u_{k-1}}^t (dB_{u_k} ; \phi_k [n(B_{u_2} - B_{u_1}), n(B_{u_3} - B_{u_2}), \dots, n(B_{u_k} - B_{u_{k-1}})]) \\
 &- n^2 \int_{u_{k-1}}^t du_k f_k [n(B_{u_2} - B_{u_1}), \dots, n(B_{u_k} - B_{u_{k-1}})] .
 \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de cette identité par rapport à

$n^{2k-3}(du_1 \cdot du_2 \dots du_{k-1})$, on obtient :

$$(2.a) \quad n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; t) = n^{2(k-1)-1} I_{k-1}^{(n)}(f_{k-1}; t) + \int_0^t (dB_{u_k} ; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k; u_k)) - \frac{1}{n} D_{k-1}^{(n)}(f^{(k)}; t),$$

$$\text{où } D_{k-1}^{(n)}(g; t) = n^{2(k-1)} \int_0^t du_{k-1} \int_0^{u_{k-1}} du_{k-2} \dots \int_0^{u_2} du_1 g(n(B_{u_2} - B_{u_1}), \dots, n(B_t - B_{u_{k-1}})).$$

(2.2) Nous montrons maintenant que, pour tout $d \geq 4$, on a :

$$(2.b) \quad \frac{1}{n} D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|, t) \xrightarrow{(P)}_{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

On a en effet :

$$(2.b') \quad \begin{cases} - \text{si } d \geq 5, \text{ l'expression } D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|; t) \text{ converge en loi ;} \\ - \text{si } d = 4, \quad E[D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|, t)] = O(\log n) \quad (n \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Dans les deux cas, l'assertion (2.b) en découle :

Pour démontrer (2.b'), remarquons que, pour toute fonction $g : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a :

$$D_{k-1}^{(n)}(g; t) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{n^2 t} dv_{k-1} \int_{v_{k-1}}^{n^2 t} dv_{k-2} \dots \int_{v_2}^{n^2 t} dv_1 g(B_{v_1} - B_{v_2}, \dots, B_{v_{k-1}}).$$

Cette dernière expression est majorée, dans le cas où $g = |f^{(k)}|$, par :

$$C \int_0^{n^2 t} dv_{k-1} h_R(B_{V_{k-1}}) \left(\int_0^\infty ds 1_{(|B_{S+V_{k-1}} - B_{V_{k-1}}| \leq R')} \right)^{k-2}$$

avec C, R, R' des constantes convenables dépendant de f , et

$$h_R(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{dy}{|x-y|^{d-2}}.$$

L'assertion (2.b') découle alors facilement de cette dernière majoration.

(2.3) En appliquant conjointement la formule de récurrence (2.a), et le résultat (2.b), il apparaît que :

$$\sup_{s \leq t} |n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; s) - nsf_1| - \sum_{j=2}^k \int_0^s (dB_u; D_{-1}^{(n)}(\phi_j, u)) \left| \frac{(P)}{(n \rightarrow \infty)} \right| > 0.$$

L'existence de la limite en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, de la suite de processus à trajectoires continues : $\{B_t; n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; t) - ntf_1 \ (t \geq 0)\}$ et la caractérisation de cette limite sont donc ramenées à celles de la suite de processus :

$$(2.c) \quad \{B_t; \sum_{j=2}^k \int_0^t (dB_u; D_{j-1}^{(n)}(\phi_j; u)) \ (t \geq 0)\}.$$

Cette dernière étude sera faite à l'aide du résultat général de la proposition (2.1) ci-dessous. Afin de pouvoir énoncer cette proposition, il nous faut introduire d mesures Browniennes indépendantes $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(d)}$ définies sur l'espace $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega_d; dt \times W_d)$ où $\Omega_d \equiv C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence compacte, et W_d désigne la mesure de Wiener sur cet espace.

Nous considérerons plus particulièrement les mouvements Browniens associés aux variables de $L^2(W_d)$, à partir de ces mesures gaussiennes, au moyen de la formule :

$$\beta_t^{(i)}(H) \stackrel{\text{déf}}{=} \beta^{(i)}([0, t] \times H) \quad (H \in L^2(W_d)).$$

On précisera toujours le choix de $(\beta_t^{(i)}(H), t \geq 0)$ en prenant une version continue de ce mouvement Brownien. Notons que la covariance des mouvements Browniens ainsi obtenus est :

$$\mathbb{E}[\beta_t^{(i)}(H) \beta_s^{(j)}(K)] = \delta_{ij} (t \wedge s) \mathbb{E}[HK].$$

Remarque : A l'aide de la décomposition de tout élément $H \in L^2(W_d)$ dans les chaos de Wiener, on peut construire la mesure gaussienne $(\beta_t(H))$ à partir de mesures gaussiennes indépendantes définies sur $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, dt_1 dt_2 \dots dt_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$). $\square$

Nous aurons encore besoin des notations suivantes : à tout $\omega \in \Omega_d$, on associe :

- pour tout $u > 0$, la trajectoire $\hat{\omega}_u$, retournée au temps u de la trajectoire ω , c'est-à-dire : $\hat{\omega}_u(t) = \omega(u) - \omega(u-t)$ ($t \leq u$)
- pour tout $c > 0$, la trajectoire $\omega^{(c)}$, transformée de la trajectoire ω par scaling d'ordre c , c'est-à-dire : $\omega^{(c)}(t) = c \omega(t/c^2)$ ($t \geq 0$). On a maintenant la :

Proposition (2.1) : Soit $(\hat{\Phi}(t, \omega), t \geq 0)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, prévisible par rapport à la filtration Brownienne, tel que :

$$(i) \quad \text{pour tout } p \in [1, \infty[, \quad \sup_{t \geq 0} E[|\hat{\Phi}(t)|^p] < \infty$$

$$(ii) \quad \hat{\Phi}(t, \omega) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(P)} \psi(\omega).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\hat{\Phi}_n(u, \omega) = \hat{\Phi}(n^2 u, \omega^{(n)})$, et on définit :

$$\Phi_n(u, \omega) = \hat{\Phi}_n(u, \hat{\omega}_u).$$

On a alors :

$$\{B_t ; \int_0^t (dB_u ; \Phi_n(u, \omega))\}_{t \geq 0} \xrightarrow[(n \rightarrow \infty)]{(d)} \{B_t(1) ; \sum_{i=1}^d \beta_t^{(i)}(\psi^{(i)})\}_{t \geq 0}.$$

Démonstration : a) Remarquons tout d'abord que la famille des lois des intégrales

stochastiques $(M^{(n)}(t) \equiv \int_0^t (dB_u ; \Phi_n(u, \omega)) ; t \geq 0)$ est tendue, lorsque n varie.

On a, en effet :

$$\begin{aligned} E[|M^{(n)}(t) - M^{(n)}(s)|^p] &\leq C_p E\left[\left(\int_s^t du |\Phi_n(u, \omega)|^2\right)^{p/2}\right] \\ &\leq C_p (t-s)^{p/2} \sup_{u \geq 0} E[|\Phi_n(u, \omega)|^p] \end{aligned}$$

Or, on a :

$$E[|\Phi_n(u, \omega)|^p] = E[|\hat{\Phi}_n(u, \omega)|^p] = E[|\hat{\Phi}(n^2 u, \omega)|^p],$$

et finalement, d'après (i), $\sup_{n, u \geq 0} E[|\Phi_n(u, \omega)|^p] < \infty$, ce qui implique le résultat cherché.

b) La proposition sera alors démontrée dès que l'on aura prouvé les résultats suivants :

$$(2.d) \quad \langle B^{(i)}, \int_0^t dB_u^{(i)} \Phi_n^{(i)}(u) \rangle_t \equiv \int_0^t du \Phi_n^{(i)}(u, \omega) \frac{L^p}{(n \rightarrow \infty)} \rightarrow t E[\psi^{(i)}]$$

$$(2.e) \quad \langle \int_0^t dB_u^{(i)} \Phi_n^{(i)}(u) \rangle_t \equiv \int_0^t du (\Phi_n^{(i)}(u, \omega))^2 \frac{L^p}{(n \rightarrow \infty)} \rightarrow t E[(\psi^{(i)})^2].$$

Les membres de gauche étant bornés dans L^p (pour t fixé, et n variant), il suffira de montrer que la convergence a lieu dans L^2 . Alors, le résultat (2.d) - par exemple - découle de :

$$(2.f) \quad E[\Phi_n^{(i)}(u)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\psi^{(i)}] \text{ (u fixé)} ; E[\Phi_n^{(i)}(u) \Phi_n^{(i)}(v)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\psi^{(i)}]^2 (u < v)$$

ce qui provient de l'hypothèse (i) de bornitude dans L^p d'une part, et d'autre part, de ce que :

$$(2.g) \quad (\Phi_n^{(i)}(u), \Phi_n^{(i)}(v)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\psi^{(i)}, \hat{\psi}^{(i)}),$$

où $\hat{\psi}^{(i)}$ est une copie indépendante de $\psi^{(i)}$.

En effet, on a :

$$(2.h) \quad (\Phi_n^{(i)}(u, \omega) ; \Phi_n^{(i)}(v, \omega)) \\ \equiv (\hat{\Phi}_n^{(i)}(u, \hat{\omega}_u) ; \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u, \hat{\omega}_v) + [\hat{\Phi}_n^{(i)}(v, \hat{\omega}_v) - \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u, \hat{\omega}_v)])$$

Or, la v.a. $\hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u, \hat{\omega}_v)$ ne dépend que des accroissements de ω entre u et v , et est donc indépendante de $\hat{\Phi}_n^{(i)}(u, \hat{\omega}_u)$.

D'autre part, on a, pour $h \leq v$ (h fixé) :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(h, \hat{\omega}_V) \stackrel{(d)}{=} \hat{\Phi}_n^{(i)}(h, \omega) \stackrel{(d)}{=} \hat{\Phi}^{(i)}(hn^2, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \psi^{(i)}.$$

On a ainsi montré que :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(v, \hat{\omega}_V) - \hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u, \hat{\omega}_V) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} 0,$$

et, d'autre part :

$$\hat{\Phi}_n^{(i)}(v-u, \hat{\omega}_V) \xrightarrow{(d)} \psi^{(i)}.$$

Le résultat (2.g) découle maintenant de l'identité (2.h).

(2.4) En s'appuyant essentiellement sur la Proposition (2.1), on peut maintenant énoncer et démontrer le

Théorème (2.2) : Soit $f \equiv f_k : (\mathbb{R}^d)^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact, et $(\phi_j)_{2 \leq j \leq k}$ les fonctions gradient définies à partir de f au moyen du diagramme présenté en (2.1).

Posons :

$$F_j = \int_0^\infty du_{j-1} \int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2} \dots \int_{u_2}^\infty du_1 \phi_j(B_{u_2}^{-B_{u_1}}, B_{u_3}^{-B_{u_2}}, \dots, B_{u_{j-1}}^{-B_{u_{j-2}}}, B_{u_{j-1}})$$

et
$$F = \sum_{j=2}^k F_j.$$

On a alors : $\{B_t^{(1)} ; n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k ; t) - nt f_1 \quad (t \geq 0)\}$

$$\begin{array}{c} \downarrow (d) \\ \{B_t^{(1)} ; \sum_{i=1}^d B_t^{(i)} (F^{(i)}) \quad (t \geq 0)\}. \end{array}$$

Démonstration : D'après (2.c), on est ramené à l'étude de la convergence en loi

de $\{B_t ; \sum_{j=2}^k \int_0^t (dB_u ; D_{j-1}^{(n)}(\phi_j, u)) \quad (t \geq 0)\}$, et on va appliquer la Propo-

sition (2.1) aux processus $\phi_n(u) = D_{j-1}^{(n)}(\phi_j, u)$.

Le processus $(\hat{\phi}(u), u \geq 0)$ associé à la suite (ϕ_n) est alors :

$$\hat{\phi}(u) = \int_0^u du_{j-1} \int_{u_{j-1}}^u du_{j-2} \dots \int_{u_2}^u du_1 \phi_j(B_{u_2} - B_{u_1}, B_{u_3} - B_{u_2}, \dots, B_{u_{j-1}})$$

et, pour pouvoir appliquer la Proposition (2.1), il reste à montrer que la variable

$$\tilde{\psi}_j = \int_0^\infty du_{j-1} \int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2} \dots \int_{u_2}^\infty du_1 |\phi_j|(B_{u_2} - B_{u_1}, \dots, B_{u_{j-1}})$$

possède des moments de tous ordres, ce qui découlera du Lemme (2.3) ci-dessous. $\square$

Majorons d'abord la variable $\tilde{\psi}_j$ par :

$$IF_j = \int_0^\infty du_{j-1} \int_{|B_{u_{j-1}} - y| \leq \rho} \frac{dy}{|B_{u_{j-1}} - y|^{d-1}} \int_{u_{j-1}}^\infty du_{j-2} \dots \int_{u_2}^\infty du_1 |f_j|(B_{u_2} - B_{u_1} ; B_{u_3} - B_{u_2} ; \dots ; B_{u_{j-1}} - B_{u_{j-2}} ; y).$$

On remarque ensuite que :

$$IF_j \leq \int_0^\infty du \int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|B_u - y|^{d-1}} \left\{ \int_u^\infty dv 1_{|B_v - B_u| \leq R} \right\}^{j-2}$$

pour ρ et R suffisamment grands.

La fonction : $z \longrightarrow \int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|y - z|^{d-1}}$ étant uniformément bornée, et de l'ordre

de $1/|z|^{d-1}$, lorsque $|z| \rightarrow \infty$, on peut encore majorer IF_j comme suit :

$$\mathbb{F}_j \leq C \left(\int_0^\infty du \, 1_{(|B_u| \leq R)} \right)^{j-1} + \int_0^\infty du \, \frac{1_{|B_u| \geq R}}{|B_u|^{d-1}} \left(\int_u^\infty dv \, 1_{(|B_v - B_u| \leq R)} \right)^{j-2} \}.$$

On a déjà remarqué que $\int_0^\infty du \, 1_{(|B_u| \leq R)}$ possède des moments de tous ordres.

Pour étudier l'intégrabilité du second terme qui figure dans la majoration précédente, posons :

$$A_t = \int_0^t du \, \frac{1_{|B_u| \geq R}}{|B_u|^{d-1}} \quad \text{et} \quad R_u = \left(\int_u^\infty dv \, 1_{(|B_v - B_u| \leq R)} \right)^{j-2}.$$

Le lemme suivant, qui donne - dans un cadre général - des conditions suffisantes

pour que $\int_0^\infty dA_u \, R_u$ admette des moments de tous ordres nous permettra de terminer la démonstration du Théorème (2.2).

Lemme (2.3) : Soit (A_t) un processus croissant continu, adapté, dont le potentiel est borné. Soit, d'autre part, (R_t) un processus mesurable positif tel qu'il existe une probabilité μ sur $\mathbb{R}_+$ admettant des moments de tous ordres, et vérifiant l'hypothèse "d'indépendance" :

pour tout t.a. prévisible T , et toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne,

$$E[f(R_T) / \mathcal{H}_{T-}] = \int f(u) d\mu(u)$$

(en d'autres termes, la projection prévisible de $(f(R_t), t \geq 0)$ est le processus constant $\int f(u) d\mu(u)$).

Sous ces deux hypothèses, $\int_0^\infty dA_u \cdot R_u$ admet des moments de tous ordres.

Démonstration : 1) Commençons par quelques majorations élémentaires :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^\infty R_S dA_S\right)^k\right] &= E\left[A_\infty^k \left(\frac{1}{A_\infty} \int_0^\infty R_S dA_S\right)^k\right] \\ &\leq E\left[A_\infty^{k-1} \int_0^\infty R_S^k dA_S\right] \\ &\leq E\left[A_\infty^{2(k-1)}\right]^{1/2} E\left[\left(\int_0^\infty R_S^k dA_S\right)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Or, on sait que, sous l'hypothèse faite sur A , A_∞ admet des moments de tous ordres (cf : Meyer [6], par exemple).

On est donc ramené à montrer, quitte à remplacer (R_s) par (R_s^k) , qui vérifie d'ailleurs la même hypothèse que (R_s) , que l'on a :

$$E\left[\left(\int_0^\infty R_s dA_s\right)^2\right] < \infty$$

2) De même qu'en 1), on a :

$$E\left[\left(\int_0^\infty R_s dA_s\right)^2\right] \leq E\left[A_\infty \int_0^\infty R_s^2 dA_s\right].$$

Puis, on a :

$$\begin{aligned} E\left[A_\infty \int_0^\infty R_s^2 dA_s\right] &= E\left[\int_0^\infty E[A_\infty R_s^2 / \mathcal{H}_s] dA_s\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s) R_s^2 / \mathcal{H}_s] dA_s\right] + E\left[\int_0^\infty A_s E[R_s^2] dA_s\right]. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $E[R_s^2]$ ne dépend pas de s , et est fini, et, d'autre part :

$$E\left[\int_0^\infty A_s dA_s\right] = \frac{1}{2} E[A_\infty^2] < \infty.$$

Il reste à majorer : $E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s) R_s^2 / \mathcal{H}_s] dA_s\right]$

$$\leq E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2 / \mathcal{H}_s]^{1/2} E[R_s^4]^{1/2} dA_s\right] = C E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2 / \mathcal{H}_s]^{1/2} dA_s\right]$$

où C désigne la constante $E[R_s^4]^{1/2}$.

Remarquons maintenant que l'on a :

$$E[(A_\infty - A_s)^2 / \mathcal{H}_s] = 2 E\left[\int_s^\infty dA_u E[A_\infty - A_u / \mathcal{H}_u] / \mathcal{H}_s\right],$$

et si $a \equiv \text{ess sup } E[A_\infty - A_u / \mathcal{H}_u]$, on a donc :

$$E[(A_\infty - A_s)^2 / \mathcal{F}_s] \leq 2a^2,$$

et finalement :

$$E\left[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^2 / \mathcal{F}_s]^{1/2} dA_s\right] \leq \sqrt{2} \cdot a^2,$$

ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

Remarques : 1) Sous la seule hypothèse "d'indépendance" sur R , la projection

duale prévisible de $\int_0^\cdot R_u dA_u$ est C.A, où C est la constante $E[R_s]$

(indépendante de s). En conséquence, une condition nécessaire pour que

$\int_0^\infty R_u dA_u$ admette des moments de tous ordres est que A admette également des moments de tous ordres.

Le lemme montre que, sous l'hypothèse un peu plus restrictive que (A_t) admette

un potentiel borné, alors $(\int_0^\infty R_u dA_u)$ admet des moments de tous ordres.

2) En [3], T. Jeulin a montré, sous l'hypothèse "d'indépendance" sur R , en supposant en outre : $\mu\{0\} = 0$, et $\int d\mu(x)x < \infty$, que les ensembles :

$$\left\{\int_0^\infty R_s dA_s < \infty\right\} \text{ et } \{A_\infty < \infty\} \text{ sont p.s. égaux. } \square$$

Nous terminons maintenant, à l'aide du Lemme(2.3), la démonstration du Théorème (2.2) :

a) Le processus $R_u = \left(\int_u^\infty dv 1_{(|B_v - B_u| \leq R)}\right)^{j-2}$ vérifie bien la propriété

"d'indépendance", et admet des moments de tous ordres.

b) Il reste à montrer que le processus (A_t) admet un potentiel borné, ce qui revient à montrer que la fonction :

$$y \xrightarrow{\phi_d} \int \frac{dx}{|x-y|^{d-2}} 1_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|^{d-1}} \text{ est uniformément bornée sur } \mathbb{R}^d.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\phi_d(y) &= \frac{|y|^d}{|y|^{d-2}} \int \frac{dx'}{|x'-1|^{d-2}} \mathbf{1}_{(|x'| \geq \frac{R}{y})} \frac{1}{(|y||x'|)^{d-1}} \\ &= \frac{1}{|y|^{d-3}} \int \frac{dx}{|x-1|^{d-2}} \mathbf{1}_{(|x| \geq \frac{R}{|y|})} \frac{1}{|x|^{d-1}}.\end{aligned}$$

Lorsque $|y| \rightarrow \infty$, on a : $\phi_d(y) = O(\frac{1}{|y|^{d-3}})$.

Lorsque $|y| \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned}\phi_d(y) &\simeq \frac{1}{|y|^{d-3}} \int_{(R/|y|)} \frac{r^{d-1} dr}{r^{2d-3}} \simeq \frac{1}{|y|^{d-3}} \int_{R/|y|} r^{2-d} dr \\ &= O(\frac{1}{|y|^{d-3}} (\frac{R}{|y|})^{1-d}) \\ &= O(\frac{y^{d-1}}{|y|^{d-3}}) = O(|y|^2) \xrightarrow{|y| \rightarrow 0} 0, \text{ d'où le résultat.}\end{aligned}$$

(2.5) Considérons, pour simplifier, le cas $k = 2$ seulement.

Contrairement à ce qui se passe en dimension 3 (cf : (1.d)), pour les dimensions $d \geq 4$, le mouvement brownien d'origine $(B_t \equiv \beta_t(1) ; t \geq 0)$ n'est pas, en général,

indépendant du mouvement brownien $(\beta_t(F) \equiv \sum_{i=1}^{(i)} \beta_t^{(i)}(F^{(i)}) ; t \geq 0)$, limite en loi du processus $(n^{\frac{3}{2}} I_2^{(n)}(f_2; t) - nt f_1 ; t \geq 0)$ [voir l'énoncé du théorème (2.2)].

Nous explicitons maintenant la corrélation de ces deux mouvements browniens.

On a :
$$\langle \beta_*(1), \beta_*(F) \rangle_t = t E \left[\int_0^\infty ds \nabla(Uf)(B_s) \right],$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\langle \beta_*(1), \beta_*(F) \rangle_t = t \gamma_d \int dy f(y) \frac{y}{|y|^{d-2}},$$

avec γ_d constante strictement positive, ne dépendant que de d .

L'intégrale $\int dy f(y) \frac{y}{|y|^{d-2}}$ est, bien sûr, nulle si f est une fonction radiale, mais elle ne l'est pas dans le cas général.

3. ETUDE POUR LA DIMENSION $d = 3$.

(3.1) Conformément au paragraphe (1.1), commençons par étudier le cas $k = 2$, et $f \equiv f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, fonction-charge.

Le théorème (2.2) est encore valable dans ce cadre, où il prend la forme plus simple suivante :

Théorème (3.1) : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, fonction-charge, et $\phi = \nabla(f)$. Posons :

$$F = \int_0^\infty du \phi(B_u).$$

$$\text{On a alors : } \{B_t ; n^3 \int_0^t du \int_u^t ds f(n(B_u - B_s)) - \frac{nt}{2\pi} \int \frac{dy f(y)}{|y|}, (t \geq 0)\}$$

$$\downarrow (d)$$

$$\{\beta_t(1) ; \sum_{i=1}^3 \beta_t^{(i)}(F^{(i)}) (t \geq 0)\}.$$

Démonstration : D'après la démonstration du théorème (2.2), tout se ramène à montrer que la variable $\int_0^\infty du |\phi|(B_u)$ admet des moments de tous ordres, et, pour cela, il suffit que le potentiel newtonien de $|\phi|$, c'est-à-dire la fonction de u :

$$\Phi(u) \equiv \int \frac{dy}{|y-u|} \left| \int dz f(z) \frac{y-z}{|y-z|^3} \right| = \int \frac{dy}{|y|} \left| \int dz f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3} \right|$$

soit uniformément bornée, ce que l'on démontre dans le lemme suivant.

Lemme (3.2) : La fonction Φ définie par :

$$(3.a) \quad \Phi(u) \equiv \int \frac{dy}{|y|} \left| \int dz f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3} \right| \quad (u \in \mathbb{R}^3)$$

à partir d'une fonction-charge f , est continue, et uniformément bornée.

Démonstration : Soit $R > 0$ tel que le support de f soit contenu dans $\{z : |z| < R\}$. On ne perd pas de généralité en supposant $|f| \leq 1$.

(i) Vérifions tout d'abord que Φ est finie. Pour cela, on peut supposer, quitte à remplacer $f(u+)$ par f , que $u = 0$.

Remarquons alors que l'on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z| \leq R} dz \frac{1}{|y-z|^2} \leq \int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z-y| \leq R+\rho} \frac{dy}{|y-z|^2} \leq C(R+\rho) \int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|y|} < \infty.$$

D'autre part, on peut majorer l'intégrale restante dans $\Phi(0)$ par :

$$\int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z| \leq R} dz \left| \frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y-1}{|y-1|^3} \right|.$$

Or, on prouve aisément l'inégalité élémentaire suivante, valable pour $y, z, \alpha \in \mathbb{R}^3$:

$$(3.b) \quad \left| \frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y-\alpha}{|y-\alpha|^3} \right| \leq 3 |z-\alpha| \left\{ \frac{1}{|y-z|^3} + \frac{1}{|y-z||y-\alpha|^2} \right\}.$$

En prenant $\alpha = 1$, l'intégrale double ci-dessus est donc majorée, en supposant $\rho \geq R + 1$, par :

$$C(1+R)R^3 \int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \left\{ \frac{1}{(|y|-R)^3} + \frac{1}{|y-1|^2} \frac{1}{(|y|-R)} \right\} < \infty, \text{ car } \int \frac{dr}{r^2} < \infty.$$

(ii) Une légère modification des arguments ci-dessus permet de montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que Φ est continue.

En effet, soit $u_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} u$. Dans l'intégrale en (dz) qui figure dans la définition de $\Phi(u_n)$ en (3.a), on peut remplacer (dz) par $(dz)1_{|u_n+z| \leq R}$; ensuite, la suite (u_n) étant bornée, on peut remplacer $|u_n+z| \leq R$ par $|z| \leq R'$, avec R' suffisamment grand. Les majorations faites en (i) s'appliquent alors, en remplaçant partout R par R' .

(iii) Il suffit maintenant de montrer que, lorsque u est suffisamment grand, $\Phi(u)$ est uniformément borné. On reprend à nouveau les majorations faites en (i) et (ii), mais cette fois en supposant $\rho \equiv \rho(u) = 2|u|$, et en détaillant la dépendance en u . Majorons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 & \int_{|y| \leq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|u+z| \leq R} dz \frac{1}{|y-z|^2} \\
 &= \int_{|u+z| \leq R} dz \int_{|y| \leq \rho} dy \frac{1}{|y||y-z|^2} = \int_{|u+z| \leq R} dz \int_{|y| \leq \frac{\rho}{|z|}} dy \frac{1}{|y||y-1|^2} \\
 &= \int \frac{dy}{|y||y-1|^2} \int dz \mathbf{1}_{(|z| \leq \rho/|y|)} \mathbf{1}_{(|u+z| \leq R)} \\
 &= \int \frac{dy}{|y||y-1|^2} |u|^3 \int dz \mathbf{1}_{(|z| \leq \rho/|y| \cdot |u|)} \mathbf{1}_{(|z+1| \leq R/|u|)} \quad (3.c)
 \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que :

- d'une part, pour que les boules $\{z : |z| \leq \rho/|y| \cdot |u|\}$ et $\{z : |z+1| \leq R/|u|\}$ soient d'intersection non vide, il est nécessaire que l'on ait :

$$1 \leq \frac{\rho}{|y| \cdot |u|} + \frac{R}{|u|}$$

$$\text{soit : } (3.d) \quad |y| \leq 2/(1 - \frac{R}{|u|})^+ :$$

- d'autre part, on a la majoration évidente :

$$(3.e) \quad |u|^3 \int dz \mathbf{1}_{(|z| \leq \frac{\rho}{|y| \cdot |u|})} \mathbf{1}_{(|z+1| \leq \frac{R}{|u|})} \leq C \left\{ \frac{\rho^3}{|y|^3} \wedge R^3 \right\}$$

A l'aide de (3.d) et (3.e), l'intégrale double qui figure en (3.c) est donc majorée par un multiple de :

$$\int \frac{dy}{|y||y-1|^2} \left\{ \frac{\rho^3}{|y|^2} \wedge R^3 \right\} \mathbf{1}_{(|y| \leq 2/(1 - \frac{R}{|u|})^+),}$$

et pour $|u| \geq 3R$, cette intégrale est majorée par :

$$\int_{|y| \leq 3} \frac{dy}{|y| |y-1|^2} R^3 < \infty.$$

Il nous reste à majorer uniformément l'expression :

$$\begin{aligned} & \int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \left| \int_{|z+u| \leq R} dz f(u+z) \frac{y-z}{|y-z|^3} \right| \\ & \leq \int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z+u| \leq R} dz \left| \frac{y-z}{|y-z|^3} - \frac{y+u}{|y+u|^3} \right|. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité (3.b) prise avec $\alpha = -u$, on est ramené à majorer :

$$(3.f) \quad \int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \int_{|z+u| \leq R} dz \left\{ \frac{1}{|y-z|^3} + \frac{1}{|y-z| |y+u|^2} \right\}.$$

Or, on a, pour (u, y, z) qui vérifient : $|u| \geq 2R$, $|y| \geq 2|u|$, $|z+u| \geq R$:

$$|y-z| \geq |y+u| - R \geq |u| - R \geq R.$$

L'intégrale (3.f) peut donc être majorée par :

$$\begin{aligned} & C \cdot R^3 \int_{|y| \geq \rho} \frac{dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|y+u|-R)^3} + \frac{1}{(|y+u|-R) |y+u|^2} \right] \\ & = C \cdot R^3 \int_{|y| \geq 2} \frac{|u|^2 dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|u||y+1|-R)^3} + \frac{1}{(|u||y+1|-R) |u|^2 |y+1|^2} \right] \\ & \leq \frac{C \cdot R^3}{|u|} \int_{|y| \geq 2} \frac{dy}{|y|} \left[\frac{1}{(|y+1| - \frac{1}{2})^3} + \frac{1}{(|y+1| - \frac{1}{2}) |y+1|^2} \right] \end{aligned}$$

L'intégrale figurant en (3.f) est donc $O(\frac{1}{|u|})$, lorsque $|u| \rightarrow \infty$, et le lemme est démontré.

(3.2) Considérons maintenant le cas $k \geq 3$.

Notre objectif est d'étendre convenablement, dans ce cas, le résultat de convergence en loi (1.d). Des difficultés techniques beaucoup plus grandes que pour les dimensions $d \geq 4$ nous empêchent cependant de conclure rigoureusement. En conséquence, ce paragraphe (3.2) ne contient que des conjectures qui nous semblent toutefois très raisonnables.

(i) Compte tenu des difficultés dont nous venons de faire état, nous pouvons supposer, pour simplifier, que la fonction $f : (\mathbb{R}^3)^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de la forme :

$$f_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} g^i(x_i),$$

chaque fonction $g^i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ étant continue, et à support compact.

La formule :

$$(2.a) \quad n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; t) = n^{2(k-1)-1} I_{k-1}^{(n)}(f_{k-1}; t) + \int_0^t (dB_u; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k, u)) - \frac{1}{n} D_{k-1}^{(n)}(f^{(k)}; t)$$

est toujours valable.

Or, à l'aide de la majoration faite à la fin du paragraphe (2.2) pour démontrer (2.b'), on obtient :

$$(3.g) \quad \frac{1}{n\sqrt{\log n}} D_{k-1}^{(n)}(|f^{(k)}|; t) \xrightarrow{(P)} 0.$$

En effet, la fonction $h_R(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{dy}{|y-x|}$ est majorée par $\frac{C}{|x|}$ et on est donc ramené à montrer :

$$\frac{1}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} \frac{dv}{|B_v|} \left(\int_0^\infty ds \mathbf{1}_{|B_{s+v} - B_v| \leq R} \right)^{k-2} \xrightarrow{(P)} 0.$$

Or, l'espérance de cette variable est majorée par :

$$\frac{C}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} E\left(\frac{1}{|B_v|}\right) = \frac{C}{n\sqrt{\log n}} \int_0^{n^2 t} \frac{dv}{\sqrt{v}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L'assertion (3.g) est démontrée.

(ii) On a donc, d'après (2.a) et (3.g), par récurrence :

$$(3.h) \quad \frac{1}{\sqrt{\log n}} \sup_{s \leq t} |n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k; s) - nsf_1| - \sum_{j=2}^k \int_0^s (dB_v; D_{j-1}^{(n)}(\phi_j, v)) \xrightarrow{(P)} 0$$

Pour étudier la convergence des intégrales stochastiques qui figurent en (3.h), considérons tout d'abord :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^t (dB_V ; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k, v)).$$

Rappelons que (voir le paragraphe (2.1)), si l'on pose $\theta_Y(\xi) = \frac{y-\xi}{2\pi|y-\xi|^3}$, on a :

$$\phi_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = \int dy \theta_Y(x_{k-1}) g^1(x_1) \dots g^{k-2}(x_{k-2}) g^{k-1}(y).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^t (dB_V ; D_{k-1}^{(n)}(\phi_k, v)) \\ (3.i) \quad & = \int dy g^{k-1}(y) \int_0^t (dB_V ; \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du \theta_Y(n(B_V - B_u)) D_{k-2}^{(n)}[g^1 \otimes g^2 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u]). \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à étudier, pour y et v fixés, le comportement asymptotique de :

$$(3.j) \quad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du \theta_Y(n(B_V - B_u)) D_{k-2}^{(n)}[g^1 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u].$$

Or, on a, par définition :

$$\begin{aligned} & D_{k-2}^{(n)}[g^1 \otimes \dots \otimes g^{k-2}; u] \\ & = n^{2(k-2)} \int_0^u du_{k-2} \int_0^{u_{k-2}} \dots \int_0^{u_2} du_1 g^1(n(B_{u_2} - B_{u_1})) \dots g^{k-2}(n(B_u - B_{u_{k-2}})). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables : $u_i = v - u_i^!$, et en retournant le mouvement brownien au temps v , on obtient l'égalité en loi de l'expression (3.j) avec :

$$(3.j') \quad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^v du_{k-1} \theta_Y(nB_{u_{k-1}}) \int_{u_{k-1}}^v du_{k-2} g^{k-2}_{(n)}(B_{u_{k-2}} - B_{u_{k-1}}) \dots \int_{u_2}^v du_1 g^1_{(n)}(B_{u_1} - B_{u_2})$$

où l'on a noté : $g^i_{(n)}(x) = n^2 g^i(nx)$.

Exprimons la dernière intégrale qui figure en (3.j'), soit : $\int_{u_2}^v du_1 g^1_{(n)}(B_{u_1} - B_{u_2})$,

à l'aide de la formule d'Itô ; il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{u_2}^v du_1 g^1_{(n)}(B_{u_1} - B_{u_2}) \\ (3.k) \quad & = -Ug^1(n(B_V - B_{u_2})) + Ug^1(0) + n \int_{u_2}^v (dB_{u_1} ; \nabla(Ug^1)[n(B_{u_1} - B_{u_2})]) \end{aligned}$$

où $Ug(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dy}{|x-y|} g(y)$.

A l'aide de l'identité (3.k), on peut écrire l'expression (3.j') sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (3.h) \quad & \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \, \theta_y(nB_u) \left[\int_u^V du_{k-2} g_{(n)}^{k-2}(B_{u_{k-2}} - B_u) \right] \times \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \left[\int_{u_3}^V du_2 g_{(n)}^2(B_{u_2} - B_{u_3}) \right] \times \left. \vphantom{\int_0^V} \right\} (k-3) \text{ termes} \\
 & \underbrace{\left[-Ug^1(n(B_V - B_{u_2})) \right]}_{(1)} + \underbrace{Ug^1(0)}_{(2)} + n \underbrace{\int_{u_2}^V (dB_{u_1} ; \nabla(Ug^1)(n(B_{u_1} - B_{u_2})))}_{(3)}
 \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire l'expression (3.h) sous forme de la somme de 3 termes, I, II, III, correspondant respectivement aux expressions (1), (2), (3).

Nous conjecturons que les termes I et III convergent en probabilité vers 0.

Ainsi, si l'on admet cette conjecture, l'étude du comportement asymptotique de l'expression (3.h) se ramène, par itération, à celle de :

$$(3.k) \quad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \, \theta_y(nB_u) \left(\prod_{i=1}^{k-2} Ug^i(0) \right)$$

étude qui a été menée en détail en [11].

A l'aide de (3.i), l'intégrale stochastique :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^S (dB_V ; \sum_{j=2}^k D_{j-1}^{(n)}(\phi_j, v))$$

qui figure en (3.h) peut donc être remplacée par :

$$(3.l) \quad \sum_{j=1}^{k-1} \int dy \, g^j(y) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} Ug^i(0) \int_0^S (dB_V ; \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \, \theta_y(n(B_V - B_u))).$$

Il nous reste maintenant à utiliser le résultat obtenu pour $d = 3$, $k = 2$ (cf. [11]), résultat que nous avons, par ailleurs, présenté en (1.d).

Finalement, sous réserve de la validité de notre conjecture, et des opérations de réduction faites à sa suite, le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$(B_t ; \frac{1}{\sqrt{\log n}} [n^{2k-1} I_k^{(n)}(f_k, t) - nt f_1] ; t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(B_t ; c(f_k)2\beta_t ; t \geq 0)$$

où $(\beta_t ; t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel indépendant de $(B_t ; t \geq 0)$ et

$$c(f_k) = \int_{(\mathbb{R}^3)^{k-1}} dy_1 \dots dy_{k-1} m(y_1, \dots, y_{k-1}) f_k(y_1, \dots, y_{k-1})$$

avec :

$$m(y_1, \dots, y_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\prod_{i \neq j} |y_i|}.$$

(iii) Pour étayer notre conjecture, nous montrons qu'elle est effectivement vérifiée pour $k = 3$.

Le terme de type (I), resp : (III), qui figure dans le développement de (3.i) est :

$$(3.m) \quad \int_0^t (dB_V ; X_V^n), \text{ resp : } \int_0^t (dB_V ; Y_V^n),$$

où :

$$X_V^n = \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \nabla(Ug^2)(nB_u) Ug^1(n(B_V - B_u))$$

$$Y_V^n = \frac{n^3}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \nabla(Ug^2)(nB_u) \int_u^V (dB_s, \nabla(Ug^1)(n(B_s - B_u))).$$

Nous allons étudier les quantités $\|X_V^n\|_2$ et $\|Y_V^n\|_2$.

On a :

$$\|X_V^n\|_2 \leq \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \|\nabla(Ug^2)(nB_u)\|_2 \|(Ug^1)(n(B_V - B_u))\|_2$$

$$\|Y_V^n\|_2 \leq \frac{n^3}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \|\nabla(Ug^2)(nB_u)\|_2 \|M_{V-u}^n\|_2,$$

$$\text{où } M_t^n = \int_0^t (dB_s ; \nabla(Ug^1)(nB_s)).$$

Nous prouverons plus loin les estimations suivantes, valables pour tout s :

$$(3.n) \quad \|\nabla(Ug^2)(nB_s)\|_2 \leq \frac{C}{1+(n^2 s)^{2/3}}$$

$$(3.o) \quad \|(Ug^1)(nB_s)\|_2 \leq \frac{C}{1+ns^{1/2}}$$

$$(3.p) \quad \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \|M_t^n\|_2 \leq C\sqrt{t}$$

la constante C dépendant seulement de g^1 et g^2 .

A l'aide de (3.n) et (3.o), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|X_V^n\|_2 &\leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V du \frac{1}{[1+(n^2 u)^{2/3}]^{1/2}} \frac{1}{[1+n(v-u)^{1/2}]^{1/2}} \\
&\leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \int_0^V \frac{du}{1+(n^2 u)^{2/3} n(v-u)^{1/2}} \\
&\leq C^2 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \frac{1}{n^{7/3} v^{1/6}} \int_0^1 \frac{du}{u^{2/3} (1-u)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale stochastique, en (3.m), dans laquelle figure (X_V^n) converge donc dans L^2 vers 0.

A l'aide de (3.n) et (3.p), on obtient :

$$\|Y_V^n\|_2 \leq C^2 \sqrt{t} \cdot n \int_0^V du \frac{1}{1+(n^2 u)^{2/3}} \leq \frac{C^2 \sqrt{t}}{n^{1/3}} \int_0^V du / u^{2/3} ;$$

l'intégrale stochastique, en (3.m), dans laquelle figure Y_V^n converge donc dans L^2 vers 0.

Démontrons maintenant les estimations (3.n), (3.o) et (3.p).

Notons N une variable gaussienne, centrée, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de covariance la matrice identité.

(3.n) découle de :

$$|\nabla(Ug^2)(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2} \quad \text{et} \quad E\left[\frac{1}{(1+a|N|^2)^2}\right] \leq c\left(\frac{1}{1+a}\right)^{4/3}$$

(3.o) découle de :

$$|Ug^1(x)| \leq \frac{C}{1+|x|} \quad \text{et} \quad E\left[\frac{1}{(1+a|N|)^2}\right] \leq c\left(\frac{1}{1+a}\right).$$

Enfin, (3.p) découle de ce que, d'après [11], $\langle \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} M^n \rangle_t$ converge dans L^2 vers un multiple de t .

4. ETUDE POUR $d = 1$.

(4.1) Pour cette dimension, il est plus intéressant de considérer $f : \mathbb{R}_+^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$, borélienne, bornée, à support compact, et de modifier la définition de $I_k^{(n)}(f;t)$ en :

$$I_k^{(n)}(f;t) = \int_{[0,t]^k} du_1 \dots du_k f(n(B_{u_2} - B_{u_1}), \dots, n(B_{u_k} - B_{u_{k-1}})).$$

Introduisons, de plus, la famille bicontinue des temps locaux $(\ell_t^x; x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ associés à B . On peut maintenant énoncer le

Théorème (4.1) : Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$, borélienne, bornée, à support compact, on a :

$$(4.a) \quad \begin{aligned} & n \{ n^{k-1} I_k^{(n)}(f;t) - (\int dy f(y)) \int dx (\ell_t^x)^k \} \\ & \quad \quad \quad (P) \Bigg|_{n \rightarrow \infty} \\ & (-2 \int dx (\ell_t^x)^{k-1}) \int dy_1 \dots dy_{k-1} f(y) \left(\sum_{p=1}^{k-1} y_p (k-p)p \right). \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord, pour amorcer la démonstration du théorème, que l'expression qui figure en (4.a) peut être réécrite - après un changement de variables élémentaires - sous la forme :

$$(4.b) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{k-1}} dy f(y) \Delta_n(y), \quad \text{où :} \\ & \Delta_n(y) = n \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ \ell_t^x \ell_t^{x + \frac{y_1}{n}} \dots \ell_t^{x + \frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{n}} - (\ell_t^x)^k \} \end{aligned}$$

(4.2) Pour étudier la convergence de Δ_n , nous utiliserons le

Lemme (4.2) : 1) Pour tout $t > 0$, le processus : $x \rightarrow \ell_t^x$ est une semi-martingale (par rapport à sa propre filtration), dont le crochet satisfait :

$$(4.c) \quad \langle \ell_t^\cdot \rangle_b - \langle \ell_t^\cdot \rangle_a = 4 \int_a^b du \ell_t^u \quad (a < b)$$

2) Pour tout $m \geq 1$, et $n \geq 0$, on a :

$$(4.d) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\ell_t^u)^n d_u (\ell_t^u)^m = -2mn \int_{-\infty}^{\infty} (\ell_t^u)^{n+m-1} du.$$

Démonstration : a) La partie 1) du lemme est due à Perkins [15] (voir aussi Jeulin [16] pour l'étude de $\ell_t^\bullet$ dans la filtration des excursions browniennes).

La formule (4.c) est également un cas particulier des résultats généraux de Bouleau-Yor [17].

b) Remarquons maintenant que, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , on a, pour $a < b$:

$$\phi(\ell_t^b) - \phi(\ell_t^a) = \int_a^b \phi'(\ell_t^u) d_u(\ell_t^u) + 2 \int_a^b \phi''(\ell_t^u) \ell_t^u du,$$

soit, en faisant tendre a vers $-\infty$, resp : b vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\ell_t^u) d_u(\ell_t^u) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(\ell_t^u) \ell_t^u du.$$

On en déduit, par classe monotone, que, pour toute fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, bornée, on a :

$$(4.e) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\ell_t} d\ell g(\ell) \right) d_u(\ell_t^u) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\ell_t^u) \ell_t^u du.$$

Cette formule est encore valable, par localisation, pour toute fonction $g : \mathbb{P}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La formule (4.d) découle alors de (4.e), lorsque l'on prend $g(x) = n(\varepsilon+x)^{n-1}$, que l'on fait tendre ε vers 0, et que l'on développe $d_u(\ell_t^u)^m$ à l'aide de la formule d'Itô.

(4.3) Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème (4.1).

Développons l'intégrand :

$$\Lambda(x,y) \equiv \ell_t^x \ell_t^{x+\frac{y_1}{n}} \dots \ell_t^{x+\frac{y_1+\dots+y_{k-1}}{n}} - (\ell_t^x)^k$$

qui figure dans la représentation de $\Delta_n(y)$ en (4.b), de la manière suivante :

si l'on note $S_p(y) = \frac{y_1+\dots+y_p}{n}$, on peut écrire :

$$\Lambda(x,y) = \sum_{p=0}^{k-2} \ell_t^x \dots \ell_t^{x+S_p(y)} \int_{x+S_p(y)}^{x+S_{p+1}(y)} d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)},$$

où $d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)}$ est la différentielle stochastique de la semimartingale

$$u \rightarrow (\ell_t^u)^{k-(p+1)}.$$

On en déduit, par un argument de type Fubini, qui ne présente pas de difficulté :

$$\Delta_n(y) \equiv n \int_{-\infty}^{\infty} dx \Lambda(x, y) = \sum_{p=0}^{k-2} \int_{-\infty}^{\infty} d_u(\ell_t^u)^{k-(p+1)} n \int_{u-S_{p+1}(y)}^{u-S_p(y)} dx \ell_t^x \dots \ell_t^{x+S_p(y)},$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Delta_n(y) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} \sum_{p=0}^{k-2} y_{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} d_u((\ell_t^u)^{k-(p+1)})(\ell_t^u)^{p+1} \\ &= -2 \sum_{p=0}^{k-2} y_{p+1} (k-(p+1))(p+1) \int_{-\infty}^{\infty} du (\ell_t^u)^{k-1}, \end{aligned}$$

cette dernière égalité résultant de la formule (4.d).

Le théorème (4.1) découle finalement de ce résultat, à l'aide d'un argument de convergence dominée. $\square$

REFERENCES :

- [1] E.B. DYNKIN : Polynomials of the occupation field and random fields. J. Funct. Anal. 58, 1, 1984, 20-52.
- [2] E.B. DYNKIN : Functionals associated with self-intersections of the planar Brownian motion. Sémin. Probas XX. Lect. Notes in Maths. 1204, Springer (1986).
- [3] Th. JEULIN : Semi-martingales et grossissement de filtrations. Lect. Notes in Maths. 833. Springer (1980).
- [4] Y. KASAHARA, S. KOTANI : On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Zeitschrift für Wahr., 49, 133-153, 1979.
- [5] J.F. LE GALL : Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sémin. Probas XIX, Lect. Notes in Math. 1123, Springer (1985).
- [6] P.A. MEYER : Probabilités et potentiels. Hermann (1966).
- [7] J. ROSEN : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Preprint (1984).
- [8] J. ROSEN : A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. Sémin. Probas XX. Lect. Notes in Maths. 1204, Springer (1986).
- [9] S. VARADHAN : Appendix to : "Euclidean Quantum field theory" by K. Symanzik, in : Local Quantum theory, R. Jost (ed.), Academic Press (1969).
- [10] M. YOR : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. Sémin. Probas XIX, L.N. in Maths. 1123, Springer (1985).

- [11] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour
les temps locaux d'intersection du mouvement
brownien dans $\mathbb{R}^3$. Sémin. Probas XIX, L.N. in
Maths 1123, Springer (1985).

- [12] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour
les temps locaux d'intersection du mouvement
brownien dans $\mathbb{R}^2$. A paraître (1987).

- [13] J. ROSEN and M. YOR : Penormalization results for some triple
integrals of two-dimensional Brownian motion.
To appear (1987).

- [14] H. TANAKA : Certain limit theorems concerning one-dimen-
sional diffusion processes. Mem. Fac. Sci.
Kyushu Univ. 12, 1-11 (1958).

- [15] E. PERKINS : Local time is a semi-martingale.
Z.f.W., 60, 79-118 (1982).

- [16] Th. JEULIN : Application de la théorie du grossissement
à l'étude des temps locaux browniens. Lect.
Notes in Maths. 1118. Springer (1985).

- [17] N. BOULEAU, M. YOR : Sur la variation quadratique des temps
locaux de certaines semi-martingales.
C.R.A.S. t. 292, Série I, 491-494 (1981).