

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

Temps locaux et intégration stochastique pour les processus de Dirichlet

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 191-205

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__191_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEMPS LOCAUX ET INTEGRATION STOCHASTIQUE
POUR LES PROCESSUS DE DIRICHLET

Jean BERTOIN^(*)

0. INTRODUCTION.

Föllmer ([3]) montre que l'on peut définir une intégrale stochastique

$\int_0^\cdot f(X_t) dX_t$ pour f de classe C^1 et X processus de Dirichlet, qui n'est pas une semi-martingale, mais somme d'une martingale et d'un processus à variation quadratique nulle, et il obtient une formule d'Itô.

Une question naturelle se pose : peut-on étendre cette intégration pour les processus de Dirichlet à une classe plus grande de fonctions f , en vue d'obtenir une formule de Tanaka ? L'existence des temps locaux pour les processus de Dirichlet qui en découlerait, serait-elle même intéressante (Geman - Horowitz [4]).

Dans le § 1, on montre l'équivalence de l'existence de la densité d'occupation dans $L^2(\mathbb{R})$ avec l'extension par continuité de l'intégration de Föllmer à f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, et on en déduit une formule de Tanaka presque sûre.

Dans le § 2, en calculant la variation quadratique de $(f(X), X)$ par rapport à une certaine suite de subdivision d'arrêt, on s'aperçoit qu'une condition (M.D.2), portant sur le nombre de montées et de descentes de X entre a et b nous donne l'existence d'une densité $\ell^a(X)$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times da)$ de la mesure d'occupation par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} (L.T.2.). Cette condition nous amène à étendre la notion de processus de Dirichlet forts en X -processus de Dirichlet, que nous étudions.

Dans le § 3, on prouve que l'hypothèse (M.D.2) nous permet de voir l'extension de l'intégration stochastique à $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ comme limite de sommes de Riemann, cette méthode nous donnant également, comme Bouleau - Yor ([2]) une extension de la formule d'Itô.

1. TEMPS LOCAL SANS PROBABILITES.

Föllmer ([3]) établit le résultat suivant :

Si τ_n est une suite de subdivisions de $[0,1]$ dont le pas tend vers zéro, si $X : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, telle que la suite de mesures

(*) 19, avenue de Choisy - 75013 PARIS

$\sum_{\tau_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \delta_{t_i}$ converge étroitement, vers une mesure que l'on note $d\langle X \rangle_t$

quand n tend vers l'infini (δ_{t_i} désigne la masse de Dirac en t_i), alors la

suite $\sum_{\tau_n} f'(X_{t_i}) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ converge pour toute f de classe C^2 vers une

quantité que l'on note $\int_0^1 f'(X_s) dX_s$, et on a la formule d'Itô :

$$f(X_1) = f(X_0) + \int_0^1 f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Sous ces hypothèses, on a alors la :

Proposition 1.1 : L'intégrale de Föllmer, $\int_0^1 g(X_s) dX_s$ définie pour toute g de classe C^1 se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ si et seulement si la mesure d'occupation $\mu : \mu(h) = \int_0^1 h(X_s) d\langle X \rangle_s$ admet une densité $\ell_1^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Preuve : a) Si μ admet une densité $\ell_1^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ l'application

$$g' \rightarrow \int_0^1 g'(X_s) dX_s = g(X_1) - g(X_0) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g''(a) \ell_1^a(X) da$$

est alors une forme linéaire continue pour la norme de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, et comme l'espace des fonctions de classe C^1 est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, l'intégrale de Föllmer se prolonge donc à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

b) Réciproquement si $g \rightarrow \int_0^1 g(X_s) dX_s$ est un prolongement de l'intégrale de Föllmer à $g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, considérons $\phi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(f) = 2[F(X_1) - F(X_0) - \int_0^1 F'(X_s) dX_s]$$

où $F' = f$. ϕ est alors une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$ et il existe $\ell_1^a(X) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour toute f de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \ell_1^a(X) da.$$

Or pour toute f continue, $\phi(f) = \int_0^1 f(X_s) d\langle X \rangle_s$ par la formule d'Itô, de sorte que $\ell_1^a(X)$ est bien la densité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si μ admet une densité $\ell_1^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout $t \leq 1$, la mesure $\mu_t : \mu_t(h) = \int_0^t h(X_s) d\langle X \rangle_s$ est encore absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et admet une densité $\ell_t^a(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Geman - Horowitz ([4]) montrent que l'on peut choisir une version $(\ell_t^a; a \in \mathbb{R}; t \in [0,1])$ telle que pour tout a , $t \rightarrow \ell_t^a$ est une fonction croissante en t , qui ne croît que sur $\{t : X_t = a\}$.

A ce ℓ_t^a correspond une formule de Tanaka :

Proposition 1.2 : Sous les hypothèses précédentes, si g est une fonction réglée positive, à support compact, $\int_{-\infty}^{\infty} g(a) da = 1$ et si $G_n(x) = n \int_{-\infty}^x g(na) da$, alors, pour tout t et presque tout b , $\int_0^t G_n(X_s - b) dX_s$ converge vers une quantité que l'on note $\int_0^t 1_{X_s > b} dX_s$ et l'on a :

$$(X_t - b)^+ - (X_0 - b)^+ = \int_0^t 1_{X_s > b} dX_s + \frac{1}{2} \ell_t^b(X).$$

Preuve : On montre la proposition pour $g = 1_{]-1/2, 1/2[}$: grâce à un théorème de Lebesgue, pour presque tout b dans \mathbb{R} :

$$\frac{1}{2} \ell_t^b(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \ell_t^a(X) da = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 1_{[b-\varepsilon, b+\varepsilon]}(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Pour tout n , grâce à l'extension de l'intégrale de Föllmer

$$\hat{G}_n(X_t - b) - \hat{G}_n(X_0 - b) = \int_0^t G_n(X_s - b) dX_s + \frac{n}{2} \int_0^t g(n(X_s - b)) d\langle X \rangle_s$$

où \hat{G}_n est la primitive de G_n nulle en $-\infty$.

En faisant tendre n vers l'infini, $\hat{G}_n(X_t - b)$ tend vers $(X_t - b)^+$ et $\frac{n}{2} \int_0^t g(n(X_s - b)) d\langle X \rangle_s$ converge vers $\frac{1}{2} \ell_t^b(X)$.

On a la proposition pour $g =]-1/2, 1/2[$, on en déduit la proposition pour g en escalier, à support compact, et par approximation uniforme, on étend à g réglée

Remarque : Il existe des X telles que μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si K désigne l'ensemble triadique de Cantor, et X_t la racine carrée de la distance de t à K . On prend pour τ_n la n -ième subdivision triadique. Il est facile de voir que la suite de mesures $\sum_{\tau_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \delta_{t_i}$ a une masse qui tend vers 1. On peut donc extraire une sous-suite étroitement convergente, et on remarque que la mesure limite est de masse 1 et portée par K . X est alors nulle d' $\langle X \rangle_s$ presque sûrement, et donc μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

II. NOMBRE DE MONTEES ET DE DESCENTES ET TEMPS LOCAL.

a) Une condition suffisante d'existence des densités d'occupation :

On considère $(\Omega, \mathcal{H}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. On se donne $(X_t; 0 \leq t \leq 1)$ un processus continu, nul en zéro, adapté et borné. On note τ_n la subdivision d'arrêt $\tau_n = (T_0^n, \dots, T_k^n, \dots)$:

$$T_0^n \equiv 0$$

$$T_{k+1}^n = \inf\{t > T_k^n : |X_t - X_{T_k^n}| = 2^{-n}\} \wedge 1.$$

On suppose que $X = M + A$ où M est une martingale continue de carré intégrable, et A un processus continu nul en zéro tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[Q_{\tau_n}(A)] = 0$$

$$\text{avec } Q_{\tau_n}(A) = \sum_{T_i^n \in \tau_n} (A_{T_{i+1}^n} - A_{T_i^n})^2.$$

On pose $\ell_n^a(X) = 2^{-n}$ fois la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de X (*) entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1) \cdot 2^{-n}$ si $k \cdot 2^{-n} \leq a < (k+1) \cdot 2^{-n}$. On a alors le :

(*) On ne se contente pas du nombre de montées entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1) \cdot 2^{-n}$ pour des raisons qui seront expliquées dans § 3.

Théorème 2.1 : Si la suite $(\ell_n^*(X) : n \in \mathbb{N})$ est équiintégrable dans $L^1(d\mathbb{P} \times da)$ alors :

1°) Elle converge faiblement dans $L^1(d\mathbb{P} \times da)$, on note $\ell^*(X)$ cette limite.

2°) Il existe Λ ensemble de probabilité 1 tel que :

Pour tout ω dans Λ et pour toute g borélienne bornée;

$$\int_0^1 g(X_s) d\langle X \rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \ell^a(X) da(\omega).$$

Preuve : Si $\ell_n^a(X)$ est équiintégrable, on peut extraire une sous-suite $p(n)$ telle que pour toute fonction g de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(a) \ell_n^a(X) da \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma(L^1(\mathbb{P}), L^\infty(\mathbb{P}))} \int_{-\infty}^{\infty} g'(a) \ell^a(X) da.$$

Or nous savons (théorème 2.4 de [1]) que pour toute g de classe C^1 , $Q_{\tau_n}(g(X), X)$

converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\int_0^1 g'(X_s) d\langle X \rangle_s$ où

$$\begin{aligned} Q_{\tau_n}(g(X), X) &= \sum_{T_k^n \in \tau_n} [g(X_{T_{k+1}^n}) - g(X_{T_k^n})] (X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n}) \\ &= \sum_{T_{k+1}^n < 1} [g(X_{T_{k+1}^n}) - g(X_{T_k^n})] (X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n}) + O(2^{-n}) \end{aligned}$$

où $O(2^{-n})$ représente la contribution du dernier terme dans $Q_{\tau_n}(g(X), X)$.

Donc $Q_{\tau_n}(g(X), X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [g((k+1)2^{-n}) - g(k \cdot 2^{-n})] \ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(X) + O(2^{-n})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g'(a) \ell_n^a(X) da + O(2^{-n}).$$

Par conséquent, pour toute g de classe C^1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(a) \ell^a(X) da = \int_0^1 g'(X_s) d\langle X \rangle_s \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Il existe donc Λ de probabilité 1 tel que, pour tout q rationnel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iq a} \ell^a(X) da = \int_0^1 e^{iq X_s} d\langle X \rangle_s \quad \text{pour tout } \omega \in \Lambda,$$

ce qui prouve que la mesure d'occupation pour la trajectoire $X(\omega)$ a une densité $\ell^a(X)(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue da .

Il en découle que $\ell^a(X)$, la limite de $\ell_{n(p)}^a(X)$ ne dépend pas de la suite extraite, et donc, que $\ell_n^a(X)$ converge faiblement vers $\ell^a(X)$.

b) Une extension des processus de Dirichlet : Le théorème 2.1 nous conduit à donner les :

Définition 2.2 : Soit X processus continu, adapté, nul en zéro. Si S est une subdivision de $\mathbb{R} : S = \{a_n : n \in \mathbb{Z} ; a_{-\infty} = -\infty ; a_0 = 0 ; a_{+\infty} = +\infty \text{ et } a_{n-1} < a_n\}$.

On note $\tau(X, S)$ la subdivision d'arrêt $(T_0, T_k, \dots) : T_0 \equiv 0$ et

$$T_{k+1} = \inf\{t > T_k : X_t \in S \text{ et } X_t \neq X_{T_k}\} \wedge 1.$$

(C'est le premier temps d'atteinte après T_k de l'antécédent ou du suivant dans S du point où l'on est en T_k).

Définition 2.3 : On dit que Y est un X -processus de Dirichlet si $Y = M + A$ avec M martingale continue de carré intégrable, et A processus continu, nul en zéro, Y processus borné et

$$\lim_{|S| \rightarrow 0} \mathbb{E}[Q_{\tau(X, S)}(A)] = 0.$$

Comme dans [1], on peut montrer que, pour X fixé : D_X , l'ensemble des X -processus de Dirichlet, est un espace de Banach pour la norme

$$\|Y\|_X = \|Y^*\|_{\infty} + \sup_S \mathbb{E}[Q_{\tau(X, S)}(Y)]^{1/2}.$$

Si f est une fonction de classe C^1 , et si X est un X -processus de Dirichlet, $f(X)$ est un X -processus de Dirichlet dont la partie martingale est :

$$\int_0^\cdot f'(X_s) dM_s \quad (\text{si } X = M + A).$$

Définition 2.4 : Si S est une subdivision de \mathbb{R} , et si $a_i \leq a < a_{i+1}$, on note $\ell_S^a(X)$ $(a_{i+1} - a_i)$ fois le nombre de montées et de descentes de X entre a_i et a_{i+1} . On dit que X vérifie (M.D.2) si $\sup_S \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\ell_S^a(X)^2] da < \infty$.

Le théorème 2.1 devient alors sous les hypothèses restreintes :

Théorème 2.5 : Soit X un X -processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2). Alors X vérifie (L.T.2) : Il existe $\ell^a(X) \in L^2(d\mathbb{P} \times da)$, densité d'occupation pour X . De plus $\ell_S^a(X)$ converge dans $\sigma(L^1(d\mathbb{P} \times da))$, quand le pas de S tend vers zéro, vers $\ell^a(X)$.

c) Exemples et propriétés générales :

La propriété (M.D.2) se vérifie facilement pour les semi-martingales réelles et certaines transformées de semi-martingales grâce au :

Lemme 2.6 : Soit $X = M + V$ semi-martingale réelle, continue, nulle en zéro, avec $\mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2] < \infty$. Soit $a < b$ deux réels et $m_a^b(X)$ $(b-a)$ fois le nombre de montées de X de a à b . Alors :

$$\mathbb{E}[(m_a^b(X))^2] \leq 8 \mathbb{E}[M_1^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2].$$

Preuve : Soit $T_0 = 0$, $T_{2n+1} = \inf\{t > T_{2n} : X_t = b\} \wedge 1$

$$T_{2n+2} = \inf\{t > T_{2n+1} : X_t = a\} \wedge 1 \quad \text{et} \quad \Omega_n = \{T_n < 1\}.$$

$$(X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}}) 1_{\Omega_{2n+1}} = (b-a) 1_{\Omega_{2n+1}}$$

$$= (X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}}) 1_{\Omega_{2n}} - (X_{T_{2n+1}} - X_{T_{2n}}) 1_{\Omega_{2n} \setminus \Omega_{2n+1}}.$$

Les ensembles $\Omega_{2n} \setminus \Omega_{2n+1}$ étant deux à deux disjoints

$$m_a^b(X) \leq \int_0^1 P_{n_s} dX_s + (X_1 - a)^-$$

où P_n est le processus prévisible indicatrice de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]T_{2n}, T_{2n+1}]$ et donc

$$\mathbb{E}[(\int_0^1 p_{n_s} dX_s)^2] \leq 2 \mathbb{E}[M_1^2] + (\int_0^1 |dV_s|)^2.$$

Remarque : On vient de voir que toutes les semi-martingales continues (à un changement équivalent de probabilité et à une localisation près) vérifient les hypothèses de 2.5.

Proposition 2.7 : Si $X = M + V$ vérifie les hypothèses du lemme 2.6, et si f est une fonction réelle monotone par morceaux, admettant presque sûrement une dérivée f' dans $L^3(\mathbb{R})$, alors $f(X)$ vérifie (M.D.2).

Preuve : On se ramène au cas f croissante.

Soit $S = \{a_n : n \in \mathbb{Z}, a_0 = 0 \text{ et } a_{n-1} < a_n\}$. Pour $a_i \leq a < a_{i+1}$, on a :

$$\ell_{f(S)}^{f(a_i)}(f(X)) = 2 \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} m_{a_i}^{a_{i+1}}(X) + O(|S|)$$

et

$$\sum_{a_i \in S} \left[\ell_{f(S)}^{f(a_i)}(f(X)) \right]^2 [f(a_{i+1}) - f(a_i)] =$$

$$4 \sum_{a_i \in S} \left[\frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} \right]^3 [m_{a_i}^{a_{i+1}}(X)]^2 (a_{i+1} - a_i) + O(|S|)$$

et donc $4 \int_{-\infty}^{\infty} f'^3(a) da \cdot 8 \mathbb{E}[M_1^2] + (\int_0^1 |dV_s|)^2 + O(|S|)$ majore l'espérance du premier terme.

On a également :

Proposition 2.8 : Soit $X = M + A$ vérifiant les conditions du lemme 2.6. Alors, pour toute f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, $f(X)$ est un X -processus de Dirichlet dont la partie martingale est $\int_0^\cdot f'(X_s) dM_s$.

Preuve : Pour toute subdivision S de \mathbb{R} et toute g de classe C^2

$$\begin{aligned} Q_{\tau(X,S)}(g(X)) &= \sum_{T_i \in \tau(X,S)} (g(X_{T_{i+1}}) - g(X_{T_i}))^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} g'(a)^2 \ell_S^a(X) da \end{aligned}$$

et grâce au lemme 2.6 $\mathbb{E}[Q_\tau(X, S) (g(X))] \leq C(X) \int_{\mathbb{R}} g'(a)^2 da$ où $C(X)$ est une constante indépendante de S .

On peut approcher toute fonction f de $H^1(\mathbb{R})$ par une suite f_n de fonctions de classe C^2 , et comme D_X est un espace de Banach pour $\|\cdot\|_X$, $f_n(X)$ converge dans D_X vers $f(X)$.

Remarques : 1°) En particulier, si $X = M + V$ vérifie les conditions de 2.6 alors pour toute fonction f monotone par morceaux, admettant presque sûrement une dérivée f' dans $L^3(\mathbb{R})$, $Y \equiv f(X)$ est un X -processus de Dirichlet, donc un Y -processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) et donc (T.L.2). On peut étendre ceci par localisation à $f' \in L^3_{loc}(\mathbb{R})$.

2°) De même, on montre que si X est un X -processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) alors :

i) Pour toute f admettant une dérivée f' dans $L^4(\mathbb{R})$, $f(X) \in D_X$.

ii) Pour toute f lipschitzienne, monotone par morceaux, $f(X)$ est un $f(X)$ -processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2).

Dans ces deux cas la partie martingale est $\int_0^\cdot f'(X_s) dM_s$.

3°) Enfin, de façon analogue, on montre que si $X = M + V$ est une semi-martingale dans \mathbb{R}^d avec : $\mathbb{E}[\|M_1\|^2 + (\int_0^1 |dV_s|)^2] < \infty$, et f fonction lipschitzienne de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} telle que pour tout a réel, $f^{-1}(]-\infty, a])$ est convexe (respectivement concave) alors $f(X)$ est un $f(X)$ -processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2).

c) Cas du mouvement Brownien réel :

Si B est un mouvement Brownien réel, on a une réciproque de 2.8 :

Proposition 2.9 : Soit f fonction réelle telle que $f(B)$ soit un B -processus de Dirichlet local. Alors f admet presque partout une dérivée f' dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

Preuve : Si il existe T_p suite croissante de temps d'arrêt, $T_p \uparrow 1$ p.s. et

$f(B^{T_p})$ est un B -processus de Dirichlet, alors pour tout p entier

$$Q_{\tau_n}(f(B^T_P)) = \sum_k [f(k+1) \cdot 2^{-n} - f(k \cdot 2^{-n})]^2 2^n \ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(B^T_P)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_n f(a))^2 \ell_n^a(B^T_P) da$$

$$\text{où } \nabla_n f(a) = \frac{f(k+1)2^{-n} - f(k \cdot 2^{-n})}{2^{-n}} \quad \text{si } k \cdot 2^{-n} \leq a < (k+1) \cdot 2^{-n}.$$

Or il est facile de voir que pour tout $A > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ et p_0 tels que

$$E[\ell_n^a(B^{T_{p_0}})] > \varepsilon \quad \text{si } |a| < A \quad \& \quad n \geq p_0.$$

De sorte que $\nabla_n f(a)$ est borné dans $L^2([-A, A])$.

Comme dans [1] on en déduit que $\nabla_n f(a)$ converge faiblement dans $L^2([-A, A])$ vers f' qui est presque partout la dérivée de f .

Corollaire 2.10 : Il existe des B-processus de Dirichlet qui ne vérifient pas (M.D.2).

Preuve : Soit $f(x) = |x|^{0,6}$ $g(x) = |x|^{0,8}$, $X = f(B_\cdot)$ est alors un B-processus de Dirichlet local. Si X vérifiait (M.D.2) localement grâce à la remarque qui suit 2.8, $g(X)$ serait un B-processus de Dirichlet local, donc $(g \circ f)(x) = |x|^{0,48}$ serait dans $\mathcal{H}_{loc}^1(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas.

III. INTEGRATION STOCHASTIQUE POUR LES PROCESSUS DE DIRICHLET VERIFIANT (M.D.2).

a) Formule d'Itô - Tanaka : Soit X un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2). Grâce au théorème 2.5, X vérifie (T.L.2), et donc, grâce à 1.1 l'intégration de Föllmer s'étend pour presque toutes les trajectoires à toute f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. On va voir directement ici comment on peut définir $\int_0^1 f(X_s) dX_s$ comme limite des sommes de Riemann pour f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 : Soit X un X-processus de Dirichlet qui vérifie (M.D.2) et f admettant une dérivée f' dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. Alors si on pose :

$$I_n(f'(X)) \stackrel{(def)}{=} \sum_{T_{i+1} < 1; T_i \in \tau_n} f'(X_{T_i})(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) \quad \text{où } \tau_n = \tau(X, S_n)$$

et S_n est la n -ième subdivision dyadique, $I_n(f'(X))$ converge quand n tend

vers $+\infty$ dans $L^1(\mathbb{P})$ vers ce que l'on note $\int_0^1 f'(X_s) dX_s$ et on a la formule d'Itô - Tanaka :

$$f(X_1) - f(X_0) = \int_0^1 f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(a) \ell^a(X) da.$$

Preuve : Si l'on note $m_k^n(X)$, 2^{-n} fois le nombre de montées de X entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1)2^{-n}$, et $d_k^n(X)$, 2^{-n} fois le nombre de descentes de X entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1)2^{-n}$, alors :

$$I_n(f'(X)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(k \cdot 2^{-n}) (m_k^n(X) - d_k^n(X))$$

$$\text{or } m_k^n(X) = \frac{1}{2} \{ \ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(X) + 2^{-n} 1_{(X_0 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1) \cdot 2^{-n} < X_1)} - 2^{-n} 1_{(X_1 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1) \cdot 2^{-n} < X_0)} \}$$

(Les deux derniers termes correcteurs expriment le fait qu'il y a une montée de plus que de descentes entre $k \cdot 2^{-n}$ et $(k+1) \cdot 2^{-n}$ si $X_0 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1) \cdot 2^{-n} < X_1$) et de même

$$d_k^n(X) = \frac{1}{2} \left[\ell_n^{(k-1)2^{-n}}(X) + 2^{-n} 1_{(X_1 < (k-1) \cdot 2^{-n} < k \cdot 2^{-n} \leq X_0)} - 2^{-n} 1_{(X_0 < (k-1) \cdot 2^{-n} < k \cdot 2^{-n} \leq X_1)} \right].$$

Par la transformation d'Abel

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(k \cdot 2^{-n}) (\ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(X) - \ell_n^{(k-1) \cdot 2^{-n}}(X)) \\ &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} [f'((k+1)2^{-n}) - f'(k \cdot 2^{-n})] \ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f''(a) \ell_n^a(X) da. \end{aligned}$$

Lemme : $\int_{-\infty}^{\infty} f''(a) \ell_n^a(X) da$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $\int_{-\infty}^{\infty} f''(a) \ell^a(X) da$.

Preuve : A priori, la convergence a lieu seulement faiblement dans $L^1(\mathbb{P})$. Or, si f_p est une suite de fonctions de classe C^2 telles que f'_p converge dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ vers f' :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (f'' - f_p'')(a) \ell_n^a(X) da \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f'' - f_p'')^2(a) (da) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell_n^a(X)^2 da \right).$$

Or pour tout p , $Q_{\tau_n} (f'(X), X)$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers

$$\int_0^1 f_p''(X_s) d\langle X \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f_p''(a) \ell^a(X) da,$$

puisque $f'(X)$ est un X -processus de Dirichlet, dont la partie martingale est

$$\int_0^\bullet f_p''(X_s) dM_s \quad (\text{si } M \text{ est la partie martingale de } X).$$

Grâce à l'inégalité précédente, la convergence est uniforme en p , et on en déduit le lemme.

Comme d'autre part

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(k 2^{-n}) \cdot 2^{-n} (1_{X_0 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1) 2^{-n} < X_s} - 1_{X_1 \leq k 2^{-n} < (k+2) 2^{-n} < X_0})$$

converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers $f(X_1) - f(X_0)$, $I_n(f'(X))$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers

ce que l'on note $\int_0^1 f'(X_s) dX_s$ et l'on a :

$$f(X_1) - f(X_0) = \int_0^1 f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(a) \ell^a(X) da.$$

b) Une extension de la formule d'Itô :

Bouleau et Yor ([2]) prouvent que l'application définie sur les fonctions en

$$\text{escalier } f(t) = \sum_{i=1}^n f_i 1_{[a_i, a_{i+1}]}(t) \text{ qui à } f \text{ associe } \sum_{i=1}^n f_i (L^{a_{i+1}}(X) - L^{a_i}(X))$$

(où $L^a(X)$ est le temps local en a d'une semi-martingale X) se prolonge de façon unique en une mesure vectorielle sur la tribu borélienne, on note

$\int f(a) d_a L^a(X)$ l'intégrale de f par rapport à cette mesure, alors

$$F(X_1) = F(X_0) + \int_0^1 f(X_t) dX_t - \frac{1}{2} \int f(a) d_a L^a(X).$$

Le calcul du a) peut être repris quand X est une martingale de carré intégrable,

pour donner une autre approche de $\int f(a) d_a L^a(X)$ et étendre cette intégrale à f dans $L^2(\mathbb{R})$:

Si f est dans $L^2(\mathbb{R})$, posons $f_n(t) = 2^n \int_{k \cdot 2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(u) du$ pour $k \cdot 2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}$.
 Comme $f_n(a)$ converge vers $f(a)$ pour presque tout a , $f_n(X_s)$ converge vers $f(X_s)$ d. $\langle X \rangle_s$ presque sûrement. Si M_f désigne la fonction maximale de Hardy associée à f , M_f est dans $L^2(\mathbb{R})$, et par convergence dominée $\int_0^1 f_n(X_s) dX_s$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $\int_0^1 f(X_s) dX_s$.

Enfin on a toujours la convergence de

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(k \cdot 2^{-n}) 2^{-n} (1_{X_0 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1)2^{-n} < X_1} - 1_{X_1 \leq k \cdot 2^{-n} < (k+1)2^{-n} < X_0})$$

vers $F(X_1) - F(X_0)$.

En conséquence $\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(k \cdot 2^{-n}) (\ell_n^{k \cdot 2^{-n}}(X) - \ell_n^{(k-1)2^{-n}}(X))$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$

$$\text{vers } \int_0^1 f(X_s) dX_s - F(X_1) + F(X_0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) d_a \ell^a(X).$$

Appendice : Pour conclure, nous donnons un exemple d'utilisation des temps locaux inspiré par le *théorème 6.3* de Geman - Horowitz [4] :

Proposition : Soit $X = M + A$ un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) qui vérifie (T.L.2). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$

- Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, b)$ est de classe C^1 , et $\sup_{a,b} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| < \infty$.

Alors $Y_t = \int_0^t f(X_s, X_s) d\langle X \rangle_s$ est un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) dont la partie martingale est

$$\int_0^\cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, b) \ell_s^b(X) db \right) dM_s = \int_0^\cdot \left(\int_0^\delta \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, X_u) d\langle X \rangle_u \right) dM_s.$$

Preuve : Au paragraphe I on a introduit la famille de processus croissants $s \rightarrow \ell_s^b(X)$.

Remarquons, avant de poursuivre, que $\ell_t^a(X) \equiv 0$ si $|a| \geq \sup_b \|X_s\|_{L^\infty}$,

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_t, b) \ell_t^b(X) db.$$

Or pour b fixé, d'après [1] (*théorème 2.4*) $f(X_t, b)$ est un processus de Dirichlet fort (respectivement faible), dont la partie martingale est :

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, b) dM_s.$$

De même que dans [1], il est aisé de voir que $f(X_t, b) \ell_t^b(X)$ est somme d'un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) et d'un processus de sauts à variations bornées (qui provient des sauts éventuels du processus croissant $\ell_t^b(X)$).

Par un théorème de Fubini stochastique (voir par exemple le *lemme 4.1* du chapitre 3 de Ikeda - Watanabe [5]), on voit que Y_t est somme d'un processus de Dirichlet fort (respectivement faible) et d'un processus à variations bornées qui peut contenir des sauts. Il suffit de voir que Y est continue pour que le processus à variations bornées soit à variation quadratique nulle. Or

$$|Y_{t'} - Y_t| \leq \int_t^{t'} |f(X_{t'}, X_s)| d\langle X \rangle_s + \int_0^t d\langle X \rangle_s \int_{X_t}^{X_{t'}} da \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, X_s) \right|$$

et la continuité de Y résulte de celle de X .

REMERCIEMENT : Je remercie M. Yor pour ses conseils et son aide à la rédaction de cet article.

REFERENCES :

- [1] J. BERTOIN : "Les processus de Dirichlet en tant qu'es-
pace de Banach". Stochastics - 1986.

- [2] N. BOULEAU & M. YOR : "Sur la variation quadratique des temps
locaux de certaines semi-martingales".
C.R.A.S. Paris, t. 292 (2 Mars 1981),
Série I, p. 491-494.

- [3] H. FÖLLMER : "Calcul d'Itô sans probabilités". Séminaire
de Probabilités XV, p. 143, L.N. 850, 1981.

- [4] D. GEMAN & H. HOROWITZ : "Occupation Densities". Annals of Probabi-
lity 1980, vol. 8, n° 1, p. 1-67.

- [5] N. IKEDA & S. WATANABE : "Stochastic Differential Equations and
Diffusion Processes". North Holland 1981,
p. 116.