SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YVES LE JAN

Temps local et superchamp

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 176-190
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__176_0>

TEMPS LOCAL ET SUPERCHAMP

Y. LE JAN(*)

L'objet de ce travail est de tenter de clarifier les relations qui apparaissent entre les temps locaux des processus de Markov symétriques, certains champs gaussiens markoviens, et les méthodes de supersymétrie. (On pourra notamment consulter [D], [S], [L], [CK] et [MS]).

Je tiens à remercier A.S. Sznitman pour de nombreuses discussions auxquelles ce travail doit beaucoup.

1° - Formes différentielles sur un espace de Hilbert :

Soit H un espace réel. Notons $\Lambda^n H$ la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure de H, complétée pour la norme hilbertienne ainsi définie :

$\|u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_n\|^2 = \det(\langle u_i, u_j\rangle \ i,j \leq n)$.

Notons ΛH la somme algébrique $\bigoplus_0^\infty \Lambda^n H$ (non complétée)

Notons $u \to u^*$ l'isomorphisme entre H et son dual H^* Nous conviendrons de poser $(u^*)^* = u$.

On étend $*$ à $\Lambda^n H$ en posant $(u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_n)^* = u_n^* \wedge \ldots \wedge u_1^*$ et à $(\Lambda^n H)^*$ en posant $(u_1^* \wedge \ldots \wedge u_n^*)^* = u_n \wedge \ldots \wedge u_1$. Notons $\mathcal{F}$ le produit tensoriel algébrique $\Lambda H \otimes \Lambda H^*$. On a les isomorphismes à image dense

$$(1) \qquad \mathcal{F} \hookrightarrow \overline{\Lambda H} \otimes (\overline{\Lambda H})^* \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\overline{\Lambda H})$$

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

(où $\mathcal{L}^1(K)$ désigne les opérateurs à trace sur K).

Définissons une forme linéaire τ sur $\mathfrak{F}$ en posant :

$$\tau(u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_n \otimes v_m^* \ldots \wedge v_1^*) = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

$$= \det(\langle u_i, v_j \rangle) \qquad \text{si } m = n$$

τ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathfrak{F} = \mathcal{L}^1(\Lambda\bar{H})$ qui est un espace de Banach séparable.

En effet, si j (j^*) est l'opérateur borné sur $\overline{\Lambda H}$ ($\overline{\Lambda H^*}$), tel que

$$j(a) = (-1)^{n(n-1)/2}\, a \quad \text{si } a \in \Lambda^n H(\Lambda^n H^*).$$

On vérifie que $\tau(a \otimes b^*) = \mathrm{Tr}_{\overline{\Lambda H}}(a \otimes j^*(b^*)) = \langle a,b \rangle$

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathfrak{F}$, $\tau(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha o j)$ (on utilise ici l'isomorphisme (1)).

Ainsi $|\tau(\alpha)| \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}^1(\overline{\Lambda H})} \|j\| \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}^1(\overline{\Lambda H})}$.

On peut munir $\mathfrak{F}$ d'une structure d'algèbre de Grassman (cf. [B]) involutive en posant :

i) $\quad a \otimes b^* \wedge a' \otimes (b')^* = (-1)^{nm}\, (a \wedge a') \otimes (b' \wedge b)^*$

si $a' \in \Lambda^n H$ et $b \in \Lambda^m H$.

ii) $\quad (a \otimes b^*)^* = b \otimes a^*$.

En particulier compte tenu de l'identification naturelle $a = a \otimes 1$ et $b^* = 1 \otimes b^*$, on a $a \otimes b^* = a \wedge b^*$.

- si u et $v \in H$, on a $u \wedge v^* = -v^* \wedge u$.

- la vérification de l'associativité est laissée au lecteur (elle procède de l'associativité du produit extérieur).

- vérifions l'identité $(\alpha \wedge \beta)^* = \beta^* \wedge \alpha^*$ dans le cas où α et β sont de la forme $a \otimes (b)^*$ et $a' \otimes (b')^*$, avec $a' \in \Lambda^n H$ et $b \in \Lambda^m H$.

$$\alpha \wedge \beta = (a \otimes b^*) \wedge (a' \otimes (b')^*) = (-1)^{mn}\; a \wedge a' \otimes (b' \wedge b)^*$$

$$\beta^* \wedge \alpha^* = (b' \otimes (a')^*) \wedge (b \otimes a^*) = (-1)^{nm} (b' \wedge b) \otimes (a \wedge a')^* .$$

<u>*Lemme 1*</u> : $\forall u_1, u_2, \ldots, u_n,\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in H, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$

$$\det(\delta_{ij} + \zeta \langle u_i, v_j\rangle \ i,j \le n) = \tau\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta^k}{k!} \left(\sum_1^n u_i \wedge v_i\right)^{\wedge k}\right)$$

$$= \tau\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \left(\sum_1^n u_i \wedge v_i^*\right)^{\wedge k}\right).$$

En effet, d'après les définitions de τ et de Λ, le deuxième terme égale

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \zeta^k \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} \det(\langle u_{i_\alpha}, v_{i_\beta}\rangle \alpha, \beta \le k).$$

La première égalité se trouve ainsi ramenée à un résultat d'algèbre linéaire élémentaire.

La deuxième s'obtient en remarquant que tous les termes de degrés supérieur à n de l'"exponentielle" sont nuls.

Soient ϕ_u et ψ_v deux copies indépendantes du champ gaussien canonique indexé par H, définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$E(\phi_u\ \psi_v) = E(\psi_u\ \psi_v) = \langle u,v\rangle .$$

Notons Λ l'espace de Banach $L^1_{\mathfrak{F}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tout élément de Λ se réprésente comme une classe de fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathfrak{F}$:

$$\forall \phi(\omega) \in \Lambda, \quad \|\phi\|_\Lambda = \int_\Omega \|\phi(\omega)\|_{\mathfrak{F}} \mathbb{P}(d\omega).$$

De plus, $|\mathbb{E}(\tau(\phi(\omega)))| \le \mathbb{E}(|\tau(\phi(\omega))|) \le \mathbb{E}(\|\phi(\omega)\|_{\mathfrak{F}})$

et donc $\mathbb{E}(\tau(\phi(\omega))) \le \|\phi\|_\Lambda$.

En dimension finie, si e_i est une base orthonormée de H et si à tout élément $\psi = \Sigma\, F_{I,J}(\phi_i,\psi_i)\ e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \wedge e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_m}$ à coefficients C^∞ bornés on associe la forme différentielle sur $(\mathbb{R}^n)^2$:

$$\tilde{\psi} = \Sigma\, F_{I,J}(q_i p_i)\ \frac{dq_{i_1}}{\sqrt{\pi}} \wedge \ldots \wedge \frac{dq_{i_n}}{\sqrt{\pi}} \wedge \frac{dp_{j_1}}{\sqrt{\pi}} \wedge \ldots \wedge \frac{dp_{j_m}}{\sqrt{\pi}}\ ,$$

$$E(\tau(\psi)) = \int \tilde{\psi}\ e^{-\Sigma(q_i^2/2 + p_i^2/2)}\ \exp_\wedge(e^{+\Sigma\, dq_i \wedge dp_i/\pi})$$

(la série $\exp_\wedge$ s'arrête évidemment à l'ordre n).

2° - Superchamp :

Pour tout $u \in H$ posons $Z_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi_u(\omega) + i\psi_u(\omega))$ et $\lambda_u(\omega) = |Z_u(\omega)|^2 - u \wedge u^*$. Nous dirons que λ_u est le "superchamp" associé à H. Pour tout système $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H$ et $\zeta \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\zeta) \geq 0$, notons $\exp_\wedge(-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i})$ l'élément $e^{-\zeta\,\Sigma|Z_{u_i}|^2} \sum_{m=0}^{n} \frac{\zeta^m}{m!}(\Sigma\, u_i \wedge u_i^*)^{\wedge m}$

$$= \sum_0^\infty \left(\frac{-\zeta}{m!}\right)^m (\Sigma\, \lambda_{u_i})^{\wedge m}\ .$$

On définit $F(\lambda_{u_1}, \ldots, \lambda_{u_n})$ pour $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par transformation de Fourier.

Lemme 2 : Pour tout polynôme trigonométrique ou fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $R(X_1, \ldots, X_n)$,

$$R(\lambda_{u_1}, \ldots, \lambda_{u_n}) = R(|Z_{u_1}|^2 \ldots |Z_{u_n}|^2)$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} (-1)^n \sum_{j_1 < j_2 \ldots < j_n} \frac{\partial}{\partial X_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial X_{j_p}} R(|Z_{u_1}|^2, \ldots, |Z_{u_n}|^2)$$

$$u_{j_1} \wedge u^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_p} \wedge u^*_{j_p}$$

Il suffit d'appliquer les règles de calcul dans l'algèbre de Grassmann et les définitions.

Proposition 1 : Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\zeta) \geq 0$,

- $\mathbb{E}(\tau \exp_\Lambda (-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i})) = 1$

- Pour tout $v_1,\dots,v_m, w_1,\dots,w_{m'} \in H$

$$\mathbb{E}(Z_{v_1} \dots Z_{v_m} \overline{Z}_{w_1} \dots \overline{Z}_{w_{m'}} \tau(\exp_\Lambda (-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i})))$$

$$= \delta_{m'}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \prod_{i=1}^m C(v_i, w_{\sigma(i)}), \text{ où } C(a,b) = \langle a, [I + \zeta \sum_1^n u_i \otimes u_i^*]^{-1} b\rangle$$

Démonstration : On se ramène immédiatement au cas où H est de dimension finie. En effet, $\forall H' \subset H$, avec $u_i \in H'$ pour tout i, on vérifie aisément que $C_H(a,b) = C_{H'}(a,b)$ dès que a et $b \in B'$.

Par ailleurs $\tau_H(\exp (-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i})) = \tau_{H'}(\exp_\Lambda (-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i})$. Il suffit donc de prendre H' de dimension finie, avec $v_j, w_j, u_i \in H'$. La proposition résulte alors d'un calcul élémentaire d'intégrale gaussienne et du lemme 1 pourvu qu'on ait :

$$\det_{\mathcal{L}(H')}(I + \zeta \sum u_i \otimes u_i^*) = \det(M) \quad \text{où } M = \delta_i^j + \zeta \langle u_i, u_j\rangle.$$

Or il est clair que le premier déterminant égal $\det_{\mathcal{L}(V)}(I + \zeta \sum u_i \otimes u_i^*)$

où V est l'espace engendré par les u_i. D'autre part, M est la matrice de $I + \zeta \sum u_i \otimes u_i^*$ dans la base u_i.

Corollaire 1 : - $\mathbb{E}(\tau(\lambda_{u_1}(\omega) \wedge \dots \wedge \lambda_{u_n}(\omega))) = 0$

- $\mathbb{E}(Z_v(\omega)\, \overline{Z}_w(\omega) \quad \tau(\lambda_{u_1}(\omega)) \wedge \dots \wedge \lambda_{u_n}(\omega))$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \langle v, u_{\sigma(1)}\rangle \langle u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}\rangle \dots \langle u_{\sigma(n)}, w\rangle.$$

Plus généralement $\mathbb{E}(Z_{v_1} \dots Z_{v_m} \overline{Z}_{w_1} \dots \overline{Z}_{w_{m'}} \tau(\lambda_{u_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{u_n})$

$$= \delta_{mm'} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \tau\in\mathcal{S}_m}} \sum_{j_1+j_2\dots j_m=m} \langle v_1,u_{\sigma(1)}\rangle \langle u_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)}\rangle\dots\langle u_{\sigma(j_1)},w_{\tau(1)}\rangle$$

$$\times \langle v_2,u_{\sigma(j_1+1)}\rangle\dots\langle u_{\sigma j_1+j_2},w_{\sigma(2)}\rangle\dots \langle v_n,u_{\sigma(j_1+j_2\dots+j_{m-1}+1)}\rangle\dots\langle u_{\sigma(n)},w_{\tau(n)}\rangle .$$

On obtient ce résultat en remplaçant u_i par $\sqrt{\alpha_i}\, u_i$, $\alpha_i > 0$ et donc λ_{u_i} par $\alpha_i \lambda_{u_i}$, puis en exprimant la dérivée $n^{\text{ième}}$.

$\dfrac{\partial^n}{\partial\alpha_1\dots\partial\alpha_m}$ des deux membres des identités de la proposition en $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(0\dots0)$

(Notons que pour $\|\alpha\|$ assez petit, $C(a,b)$ s'exprime par la série

$$\langle a,b\rangle + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{n\ge i_1\ge 1 \\ \vdots \\ n\ge i_m\ge 1}} \zeta^m \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_m} \langle a,u_{i_1}\rangle \langle u_{i_1},u_{i_2}\rangle\dots\langle u_{i_m},b\rangle)$$

Proposition 1 bis : $\quad -\mathbb{E}(\tau(v_1 \wedge v_2\dots\wedge v_m \wedge w_{m'}^* \dots\wedge w_2^* \wedge w_1^* \exp_\Lambda (-\zeta \sum_1^n \lambda_{u_i}))$

$$= \delta_{m'}^{m} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} C(v_i,w_{\sigma(i)}).$$

Démonstration : Le cas $m \neq m'$ est évident. Si $m = m'$, choisissons H' de dimension finie, contenant les vecteurs u_i, v_j, w_j.

D'après les résultats précédents (démonstration de la proposition 1) et un calcul d'intégrale gaussienne élémentaire :

$$\forall\alpha_1,\dots\alpha_n > 0,\ E(\tau(\exp_\Lambda(\Sigma\, \alpha_j\, v_j \wedge w_j^* - \zeta \sum_i \lambda_{u_i})$$

$$= \frac{\det(I + \sum_1^n \alpha_j\, v_j \otimes w_j^* + \zeta\, \Sigma u_i \otimes u_i^*)}{\det(I + \zeta \sum_1^n u_i \otimes u_i^*)}$$

$$= \det(I + \Sigma\, \alpha_j\, Lv_j \otimes (w_j)^* \quad \text{où } L = (I + \zeta \sum_1^n u_i \otimes u_i^*)^{-1}.$$

En écrivant la matrice de cette transformation dans la base L_{v_j}, on obtient : $E(\tau(\exp_\Lambda (+\Sigma \alpha_j\, v_j \wedge w_j^* - \Sigma\lambda_{u_j})) = \det(\delta_{ij} + \alpha_j\, C(v_i,w_j))$.

On obtient le résultat cherché en prenant la dérivée $n^{\text{ième}}$ $\dfrac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n}$

des deux membres en $(\alpha_1\ldots\alpha_n) = (0,0,\ldots,0)$.

On obtient de la même façon un :

Corollaire 1 bis :

$$\mathbb{E}(\tau(v \wedge w^* \wedge \lambda_{u_i}(\omega)\ldots\wedge \lambda_{u_n}(\omega)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \langle v,u_{\sigma(1)}\rangle \langle u_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\rangle\ldots\langle u_{\sigma(n)},w\rangle$$

$$\mathbb{E}(\tau(v_1 \wedge\ldots\wedge v_m \wedge w_n^* \ldots\wedge w_1^* \wedge \lambda_{u_1} \ldots\wedge \lambda_{u_n})) =$$

$$\delta_m^{m'} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_m\\ \tau\in\mathcal{S}_n}} \varepsilon(\tau) \sum_{j_1+\ldots+j_m=n} \langle v_1,u_{\sigma(1)}\rangle\langle u_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)}\rangle\ldots\langle u_{\sigma(j_1)},w_{\tau(1)}\rangle$$
$$\langle v_2,u_{\sigma(j_1+1)}\rangle\ldots\langle u_{\sigma(n)},w_{\tau(n)}\rangle.$$

3° - Le temps local jusqu'en ζ

Considérons, à titre d'exemple, le cas où H est l'espace de Dirichlet du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$, tué à un temps exponentiel de paramètre $\alpha > 0$, noté ζ.

$\varepsilon(f) = \frac{1}{2}\int(f'(x))^2\,dx + \alpha\int f^2(x)dx = \varepsilon(f)$ définit le carré de la norme.

La fonction de Green associée est $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\sqrt{\alpha}\,|x-y|}$.

C'est une fonction de covariance et H est l'espace auto-reproduisant associé : Notons k_x la fonction $y \to g(x,y)$ qui appartient bien sûr à H.

Notons $Z_{k_x} = Z_x \qquad \lambda_{k_x} = \lambda_x$.

Z_x est alors un processus d'Ornstein Uhlenbeck complexe.

Notons $\mathbb{P}_{a,b}$ la loi du processus issu de a associé au semi-groupe de noyau $Q_t(x,y) = \frac{k_b(y)}{k_b(x)} P_t\ (x,y)$, où $P_t(x,y)$ est le noyau du semi-groupe du processus initial :

$$e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}.$$

Ce processus se trouve être identique au mouvement brownien issu de a, tué à un temps exponentiel de paramètre α et "conditionné à mourir en b".

Posons $\tilde{\mathbb{E}}_{a,b} = g(a,b)\ \mathbb{E}_{a,b}$. Pour le processus ainsi construit, notons

$L_x(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\zeta \chi_{[x,x+\varepsilon[}(X_0(\omega))ds$ le temps local de $x \in \mathbb{R}$.

On a $\quad g(a,b) = \mathbb{E}_a(L_b)$.

Le deuxième exemple est fourni par l'espace de Dirichlet étendu (cf. [F]) associé au mouvement brownien sur $\mathbb{R}^+$ tué au temps d'atteinte de 0. H est la complétion de l'espace $C_K^1(\mathbb{R}^+ - \{0\})$ pour la norme $\|f\|_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f'\|_2$.

La fonction de Green associée est $g(x,y) = 2\, x \wedge y$.

H est l'espace auto-reproduisant associé. Z_x est alors un mouvement brownien (multiplié par un facteur $\sqrt{2}$).

On peut reprendre la construction précédente pour Q_t et $\mathbb{P}_{a,b}$. Notons toutefois que le "h processus" de loi $\mathbb{P}_{a,b}$ n'est pas obtenu par conditionnement du point de mort du processus initial (ce dernier meurt toujours en 0).

Plus généralement, on peut considérer le cas où H est l'espace auto-reproduisant associé à la fonction de Green d'un processus de Markov transient m-symétrique défini sur un espace l.c.d. E dont les points sont d'énergie finie. H est aussi l'espace Dirichlet étendu associé (cf. [F]).

Nous nous plaçerons dorénavant dans cette situation générale.

Proposition 2 : $\forall x_1,\dots,x_n \in E$ et pour tout polynôme, polynôme trigonométrique au fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $R(X_1,\dots,X_n)$,

$$\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(R(L_{x_1},\dots,L_{x_n})) = \mathbb{E}(Z_a\, \overline{Z}_b\, \tau(R(\lambda_{x_1},\dots,\lambda_{x_n}))).$$

Plus généralement, $\forall a_1,b_1\dots a_m,b_m \in E$, $\mathbb{E}(Z_{a_1}\, \overline{Z}_{a_1}\dots Z_{a_m}\, \overline{Z}_{a_m}\, \tau(R(\lambda_{x_1}\dots\lambda_{x_n})))$

$$= \sum_{\tau\in\mathcal{S}_m} \int R(\sum_{j=1}^m L_{x_1}(\omega_j),\dots,\sum_{j=1}^m L_{x_n}(\omega_j)\ \tilde{\mathbb{P}}_{a_1\, b_{\tau(1)}}(d\omega_1)\dots\tilde{\mathbb{P}}_{a_m\, b_{\tau(m)}}(d\omega_m).$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition 1 et le corollaire 1.

Par exemple, $\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(L_{x_1}\, L_{x_2}) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(\int_0^\zeta \delta^\varepsilon_{x_1}(X_s) \int_s^\zeta \delta^\varepsilon(X_u)du\, ds)$

$$+\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(\int_0^\zeta \delta^\varepsilon_{x_2}(X_s)\int_s^\zeta \delta^\varepsilon_{x_1}(X_u)ds\, du)$$

$$= g(a,x_1)\, g(x_1,x_2)\, g(x_2,b) + g(a,x_2)\, g(x_1,x_2)\, g(x,b).$$

Corollaire 2 : Pour tout polynôme, polynôme trigonométrique, ou fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $R(X_1,X_2\dots X_n)$:

$$\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(R(L_{x_1}\dots L_{x_n}) = \mathbb{E}(Z_a\, \overline{Z}_b[R(|Z_{x_1}|^2,\dots,|Z_{x_n}|^2)$$

$$+\sum_{p=1}^n \sum_{j_1<j_2\dots j_p} \frac{\partial}{\partial X_{j_1}}\dots\frac{\partial}{\partial X_{j_p}} R(|Z_{x_1}|^2,\dots,|Z_{x_n}|^2)(-1)^n$$

$$\det(g(x_{j_\alpha},x_{j_\beta})\ \alpha,\beta\leq p)])$$

Il suffit d'appliquer la proposition précédente et le lemme 2, puis d'expliciter τ.

Remarques :

1) Le corollaire 2 permet de calculer la densité de la loi de $L_{x_1},\dots,L_{x_n}$ par intégration par partie, à partir de la loi des $|Z_{x_i}|^2$.

2) On obtient de même une proposition 2 bis à partir de la proposition

1 bis et du corollaire 1 bis. En particulier

$$\mathbb{E}(k_a \wedge k_b^* \wedge \lambda_{x_1} \ldots \wedge \lambda_{x_n}) = \tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(L_{x_1} L_{x_2} \ldots L_{x_n}^{\cdot}).$$

On en déduit un corollaire 2 bis :

$$\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(R(L_{x_1}, L_{x_2} \ldots L_{x_n}) = g(a,b)\mathbb{E}(R(|Z_{x_i}|^2)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (g(a,b)\ g(x_i\ x_i) - g(a,x_i)\ g(x_i,b))\ \frac{\partial}{\partial Y_i} R(|Z_{x_1}|^2, \ldots |Z_{x_n}|^2) + \ldots)$$

4° - Le temps local jusqu'à un temps fixe :

Prenons pour simplifier le cas où $E = \{x_1 \ldots x_n\}$ est fini et où m est la mesure de comptage sur E.

Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a,b \in E$, on a :

$$\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(\phi(\zeta)\ F(L_x)) = \mathbb{E}(\tau(k_a \wedge k_b^*\ \phi(\lambda)\ F(\lambda_x)))$$

où $L_x = (L_{x_1} \ldots L_{x_n})$, $\zeta = \Sigma L_{x_i}$, $\lambda = \Sigma \lambda_{x_i}$, $\lambda_x = (\lambda_{x_1} \ldots \lambda_{x_n})$.

Par ailleurs, $\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(\phi(\zeta)\ F(L_x)) = \int_0^\infty \phi(u)\ \tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(F(L_x) 1_{\{\zeta \in du\}})$.

$$\text{Or } \tilde{\mathbb{P}}_{a,b}(\zeta \in du) = -\, d\,\tilde{\mathbb{E}}_{a;b}(\zeta \geq u) = -g(a,b)\ dQ_u\ 1(a)$$

$$= -\ dP_u(k_b)(a) = -d \int_u^\infty P_s(a,b) = P_u(a,b)du$$

$$= \mathbb{P}_a(X_u = b)du.$$

Plus généralement :

Lemme 3 : $\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(F(L_x)\ 1_{\{\zeta \in du\}}) = \mathbb{E}_a(F(L_x^u)\ 1_{\{X_u = b\}})du$

$$= \mathbb{E}_a(F(L_x^u) | X_u = b)\ P_u(a,b)du$$

avec $L_x^u = (L_x^u, i = 1\ldots n)$ et $L_{x_i}^u = \int_0^u 1_{x_i}(X_s)ds$.

Il suffit de considérer le cas où $F(L_x) = e^{-\Sigma v_i L_{x_i}}$ avec $v_i \geq 0$, et d'identifier les termes du développement en série des deux membres, qui se trouvent être égaux à $P_u^V(a,b)du$. (P_u^V est le semi-groupe de générateur $A-V$ si A est le générateur de P_u).

Le premier terme donne $P_u(a,b)du$ dans les deux membres ; le deuxième

$-\tilde{\mathbb{E}}_{a,b}(\int_0^u V(X_t)\, \tilde{\mathbb{P}}_{X_t,b}(\zeta + t \in du))$ dans le premier membre, et

$\mathbb{E}_a(\int_0^u V(X_t)dt\ 1_{\{X_u = b\}})du$ dans le deuxième membre.

Ces deux expressions sont égales à $\sum_{y \in E} \int_0^u P_t(a,y)V(y)\, P_{u-t}(y,b)du$ etc...

On en déduit l'identité fondamentale suivante :

$$\mathbb{E}_a(F(L_x^t)|X_t = b)\ P_t(a,b) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}(\tau(k_a \wedge k_b^* F(\lambda_x)\delta^\varepsilon(\lambda))$$

où δ^ε est une approximation de l'unité dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$.

Ces formules s'étendent sans difficulté au cas général envisagé dans le paragraphe précédent, pourvu que la mesure de dualité m soit d'énergie finie

$q = \int k_x \wedge k_x^*\, m(dx)$ définit bien un opérateur à trace positif et

$\|q\|_{\mathcal{L}^1(H)} = \int g(x,x)\, m(dx)$.

Il en est de même des puissances $q^{\tilde{\wedge} n}$ associées aux opérateurs $j \circ q^{\wedge n}$ (où $\tilde{\wedge}$ désigne le produit tensoriel des opérateurs). De plus,

$\|q^{\wedge n}\|_{\mathcal{L}^1(H)} = \|q^{\tilde{\wedge} n}\|_{\mathcal{L}^1(H)} \leq \|q\|^n_{\mathcal{L}^1(H)}$. On peut donc définir

$\lambda = \int |Z_x|^2 m(dx) - q \in \Lambda$ et montrer que les expressions considérées ont bien un sens dans Λ .

Une formule de ce type est donnée dans [L]. Il en procède une dérivation formelle d'asymptotique du type "grandes déviations" pour des fonctionnelles du temps local. Ces résultats nous paraissent encore difficiles à établir rigoureusement. On va par contre en déduire un calcul de la loi de L_x^t dans un cas particulièrement simple.

Notons tout d'abord que dans le cas où l'on considère un processus récurrent symétrique, les résultats précédents s'appliquent au processus tué à un temps exponentiel de paramètre $\alpha > 0$ (dont la loi est notée $\mathbb{P}_{\cdot}^{(\alpha)}$). On obtient :

$$P_t(a,b)\, \mathbb{E}_a(F(L_{x_i}^t | X_t = b) = \tilde{\mathbb{E}}_{a,b}^{(\alpha)}(F(L_x) | \zeta = u)\ P_t(a,b)$$

$$= e^{\alpha t} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^{(\alpha)}(\tau^{(\alpha)}(k_a^{(\alpha)} \wedge k_b^{(\alpha)}\ \delta^{\varepsilon}(\lambda^{(\alpha)}) F(\lambda_x^{(\alpha)}))$$

où $\lambda^{(\alpha)}$, $\tau^{(\alpha)}$ désigne le super champ, la trace etc... associés au noyau potentiel $g^{\alpha}(a,b)$ du processus tué.

A titre d'exemple, nous allons calculer la loi de L_x^t dans le cas du processus défini sur $E = \{0,1\}$ de générateur $Af(x) = f(y) - f(x)$.

On a $\quad g^{\alpha}(0,0) = g^{\alpha}(1,1) = \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+2)}$, $g^{\alpha}(0,1) = g^{\alpha}(1,0) = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$

$$P_t(0,1) = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2t}), P_t(0,0) = P_t(1,1) = \tfrac{1}{2}\ (1 + e^{-2t}).$$

Le champ gaussien complexe associé à g a pour loi

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\ (\alpha(\alpha+2))^{-1}\ e^{-|Z_0 - Z_1|^2 - \alpha(|Z_0|^2 + |Z_1|^2)}\ d\phi_0\, d\phi_1\, d\psi_0\, d\psi_1 .$$

On a, $\quad E_0(F(L_0^t) 1_{\{X_t = 1\}}) = e^{\alpha t} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^{(\alpha)}(\tau(k_0^{(\alpha)} \wedge k_1^{*(\alpha)}\ F(\lambda_0^{(\alpha)}, \delta_t^{\varepsilon}(\lambda_0^{(\alpha)} + \lambda_1^{(\alpha)})))$

pour $\quad F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$= e^{\alpha t} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_{\alpha}(0,1)\ \mathbb{E}^{(\alpha)}(F(|Z_0|^2)\ \delta_t^{\varepsilon}(|Z_0|^2 + |Z_1|^2))$$

d'après le corollaire 2 bis

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int F(|Z_o|^2)\ \delta_t^\varepsilon(|Z_o|^2 + |Z_1|^2)\ e^{-|Z_o-Z_1|^2-\alpha(|Z_o|^2+|Z_1|^2-t)}$$

$$d\phi_o\ d\phi_1\ d\psi_o\ d\psi_1 .$$

Posons $Z_o = \rho e_i^\theta$ $Z_1 = (u + iv)e^{i\theta}$. L'expression précédente s'écrit alors :

$$\frac{4}{2\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \iiint F(\rho^2)\delta_t^\varepsilon(\rho^2+u^2+v^2)e^{-(\rho-u)^2-v^2-\alpha(u^2+\rho^2+v^2-t)}\ 1_{\{\rho\geq 0\}}\rho d\rho\ du\ dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{u^2+v^2\leq t} e^{-(\sqrt{(t-u^2-v^2)}-u)^2-v^2}\ F(t-u^2-v^2)du\ dv \qquad (1)$$

Posons $u = \sqrt{a}\cos\theta$ $v = \sqrt{a}\ \sin\theta$

$$= e^{-t}\ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{a}\ \sqrt{t-a}\ \cos\theta}\ F(t-a)da\ d\theta$$

$$= e^{-t} \int_0^t I_o\ (2\sqrt{a}\ \sqrt{t-a})\ F(t-a)da$$

$$= e^{-t} \int_0^t I_o(2\sqrt{a}\ \sqrt{t-a})\ F(a)da \quad \text{noté dans la suite } I_t(F).$$

<u>Vérification</u> : La transformée de Laplace en t de la densité s'écrit $e^{-(p+1)a}\ (p+1)^{-1}\ e^{a/p+1}$. La double transformée de Laplace en (t,a) s'écrit donc $\frac{1}{p^2+2p+(p+1)q}$. Elle coïncide bien avec la valeur en 0 de la solution

de $(-A + p + q\varepsilon_o)\psi = \varepsilon_1$, soit $E_o(\int_0^\infty e^{-pt}\ e^{-qL_t^o}\ \varepsilon_1(X_t)dt)$.

De la même façon, $E_o(F(L_o^t)\ 1_{(X_t=0)}) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{\alpha t}\ \mathbb{E}^{(\alpha)}(\tau(k_o\wedge k_o^*)F(\lambda_o)\delta_t^\varepsilon(\lambda_o+\lambda_1)))$

$$= e^{\ t}(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} g_\alpha(0,0)\ \mathbb{E}^{(\alpha)}(F(|Z_o|^2)\delta_t^\varepsilon(|Z_o|^2 + |Z_1|^2))$$

$$- (g_\alpha(0,0)\, g_\alpha(1,1) - g_\alpha(0,1)^2)\, \mathbb{E}^{(\alpha)}(F(|Z_o|^2)\delta_t^{\varepsilon'}(|Z_o|^2 + |Z_1|^2)))$$

d'après le corollaire 2 bis.

$$= (1+\alpha)I_t(F) + \frac{e^{\alpha t}}{(2\alpha+\alpha^2} \frac{d}{dt} E(F(|Z_o|^2)\ \delta_t^{\varepsilon}(|Z_o|^2 + |Z_1|^2))$$

$$= (1+\alpha)\ I_t(F) + e^{\alpha t}\frac{d}{dt}\ (e^{-\alpha t}\ I_t(F)) = I_t(F) + \frac{d}{dt} I_t(F)$$

$$= e^{-t}\frac{d}{dt}\int_0^t I_o(2\sqrt{t-a}\ \sqrt{a})\ F(a)da$$

$$= F(t)\ e^{-t} + \int_0^t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t-a}}\ I_o'(2\sqrt{t-a}\ \sqrt{a})\ F(a)da.$$

On est satisfait de constater que $P_o(L_o^t = t) = e^{-t}$!

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE :

[B] F.A. BEREZIN : The method of second quantization. Academic Press, New-York (1966).

[F] M. FUKUSHIMA : Dirichlet forms and Markov Processes. North Holland 1980.

[D] E.B. DYNKIN : Gaussian and Non gaussian Random fields associated with Markov processes. J.F.A. 55, 344-376, 1984.

[S] P. SHEPPARD : On the Ray Knight property of local times. J. London Math. Soc. 31, 377-384 (1985).

[L] J.M. LUTTINGER : The asymptotic evaluation of a class of path integrals. Preprint. (non rigoureux. Il constitue cependant une de nos principales sources cf. début du chapitre 4).

[*C.K*] *M. CAMPANINO & A. KLEIN* : A supersymmetric Transfer Matrix and differentiability of the density of states in the one dimensional Anderson model. Preprint.
(Les mêmes résultats ont été étudiés par des méthodes utilisant précisément les temps locaux dans) :

[*M.S*] *P. MARCH & A.S.SZNITMAN* : Some connections between excursion theory and the discrete random schrödinger equation with applications to analycity and smoothness properties of the density of states in one dimension. (A paraître).