SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LI-MING WU

Construction de l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 100-113

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__100_0>

CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR DE MALLIAVIN SUR L'ESPACE DE POISSON

Liming WU(*)

0. INTRODUCTION :

Pour résoudre le problème de la régularité des diffusions avec sauts, Bichteler-Gravereaux - Jacod ont introduit dans [1] un opérateur de Malliavin formel sur l'espace de Poisson. Avec cet opérateur, ils ont généralisé les travaux de Bismut ([2]) qui utilisait le calcul des variations stochastique.

Rappelons que l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Wiener est le générateur du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans cet article, nous essayons de construire l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Poisson de la même manière :

Soit (X,μ) l'espace de Poisson sur (E,λ), soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe symétrique de diffusion dans $L^2(E,\lambda)$. On définit le semi-groupe de Wiener-Poisson $(P_t)_{t \geq 0}$ associé à $(T_t)_{t \geq 0}$ par :

$$\forall \phi \in L^2(X,\mu), \quad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}^{(n)}(f_n) \quad \text{est sa décomposition}$$

suivant les chaos de Poisson, où $f_n \in L^2(E^n,\lambda^n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{L^2(\lambda^n)} < +\infty$

$$(0.1) \qquad P_t\phi \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}^{(n)} (T_t^{\otimes n} f_n)$$

où $T_t^{\otimes n} = \underbrace{T_t \otimes \ldots \otimes T_t}_{n \text{ fois}}$ est le produit tensoriel.

Surgaîlis a démontré dans [10], [11] que (P_t) est un semi-groupe markovien. Nous démontrons dans le *théorème 2.2.1* que (P_t) est un semi-groupe symétrique de diffusion au sens de Stroock [9]. D'après [9], ce genre de semi-groupes permet justement de faire du calcul de Malliavin. Comme cas particulier, on montre à la fin de *§ 2.2* que l'opérateur de Malliavin formel introduit dans [1] est précisément le générateur d'un semi-groupe de Wiener-Poisson. L'idée d'utiliser le semi-groupe de W-P pour construire le calcul de Malliavin a été proposée par J. Jacod.

Dans un deuxième article, nous établirons l'inégalité de Sobolev pour le semi-groupe de W.P, correspondant à l'inégalité de Meyer sur l'espace de Wiener.

1. PRELIMINAIRES.

1.1. Espace de Poisson : Nous commençons par introduire l'espace de Poisson :

(*) *UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu - Tour 56 Couloir 56-66 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05*

Soient E un espace L.C.D., $\lambda(dz)$ une mesure de Radon, chargeant tous les ouverts de E, diffuse (i.e. $\lambda\{z\}) = 0$, $\forall z \in E$), sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$. L'espace de Poisson $(X,\mathcal{Q},\mu)$ sur $(E,\lambda(dz))$ est défini par :

$$X = \{x = \sum_k \delta_{z_k} \quad (\text{somme dénombrable})/z_k \in E$$

$$\mathcal{Q}^o = \sigma\{p(A) : \begin{array}{l} x \to x(A) \\ X \to N \cup \{+\infty\} \end{array} \Big| \; A \in \mathcal{B}(E)\}$$

et μ est une mesure de probabilité sur $(X,\mathcal{Q}^o)$ telle que

(i) $\mu(p(A) = k) = e^{-\lambda(A)} \dfrac{\lambda(A)^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots$ où $A \in \mathcal{B}(E)$

(ii) pour tout $A,B \in \mathcal{B}(E)$ avec $A \cap B = \emptyset$, $p(A)$ et $p(B)$ sont μ-indépendantes.

Finalement, $\mathcal{Q}$ est la tribu complétée de $\mathcal{Q}^o$ par μ.

Dans la définition ci-dessus, la mesure de probabilité μ est déterminée uniquement par les propriétés (i) et (ii).

Sur l'espace de Poisson, $p(x,\cdot) = x(\cdot)$ est une mesure aléatoire de Poisson, de moyenne $\lambda(dz)$.

Nous désignons par $\tilde{p}$ la mesure aléatoire de Poisson compensée $(\tilde{p} = p-\lambda)$.

<u>Remarque</u> : D'après [6], on a :

$$\begin{cases} \mu(\{x \in X/x \text{ est une mesure de Padon}\}) = 1 \\ \mu(\{x \in X/\exists z \in E \quad \text{t.q. : } x(\{z\}) > 1\}) = 0 \end{cases}$$

1.2. *<u>Intégrale stochastique multiple de Poisson</u> (en abrégé : i.s.m.p.) :*

A chaque $f \in L^2(E^n,\lambda^n)$, on peut associer l'i.s.m.p. $\tilde{p}^{(n)}(f)$ vérifiant :

(1.2.1) $\tilde{p}^{(n)}(f) = \tilde{p}^{(n)}(\text{sym } f) \in L^2(X,\mu)$

(1.2.2) $<\tilde{p}^{(n)}(f), \tilde{p}^{(n)}(g)>_{L^2(X,\mu)} = n! <\text{sym } f, \text{sym } g>_{L^2(E^n,\lambda^n)}$

(1.2.3) $<\tilde{p}^{(n)}(f), \tilde{p}^{(m)}(g)>_\mu = 0$ si $n \neq m$

où $\text{sym } f(z_1,\ldots,z_n) = \dfrac{1}{n!} \sum_\sigma f(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})$ est la symétrisation de f.

<u>Convention</u> : $L^2(E^o,\lambda^o) \triangleq \{c \in \mathbb{R}\}$ et $\tilde{p}^{(o)}(c) \triangleq c$.

Remarquons aussi que pour $f \in L^1 \cap L^2(E^n,\lambda^n)$:

(1.2.4) $\tilde{p}^{(n)}(f)(x) = \displaystyle\int_{E^n_*} f(z_1,\ldots,z_n)(x-\lambda)(dz_1)\ldots(x-\lambda)dz_n)$

où $E_*^n = \{(z_1,\dots,z_n) \in E^n / z_i \neq z_j \quad (i \neq j)\}$ et le côté droit de *(1.2.4)* est une intégrale de Stieltjes, qui est bien définie pour μ-presque tout $x \in X$.
Pour les résultats ci-dessus, on peut consulter [3], [7].
Nous définissons le $n^{\text{ième}}$ chaos C_n sur l'espace de Poisson par :

$$C_n = \{\tilde{p}^{(n)}(f)/f \in L^2(E^n,\lambda^n)\}.$$

Posons :

$$L^2_{\text{sym}}(E^n,\lambda^n) = \{f \in L^2(E^n,\lambda^n)/f = \text{sym } f\}$$

$$\|f\|_{\text{sym}} = n! \quad \|f\|_{L^2(E^n,\lambda^n)}.$$

$(L^2_{\text{sym}}(E^n,\lambda^n), \|\cdot\|_{\text{sym}})$ est un espace de Hilbert, et l'i.s.m.p $\tilde{p}^{(n)}(\cdot)$ est une isométrie de $L^2_{\text{sym}}(E^n,\lambda^n)$ sur le $n^{\text{ième}}$ chaos de Poisson C_n d'après *(1.2.2)*. C_n est donc un espace de Hilbert.

Il est bien connu (cf : [3]) que

$$(1.2.5) \qquad L^2(X,\mu) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{+}} C_n$$

où $\oplus$ est le symbole de somme directe hilbertienne.

Par suite $L^2(X,\mu)$ est isométrique à l'espace de Fock sur $L^2(E,\lambda)$, c'est-à-dire : $\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\text{sym}}(E^n,\lambda^n)$.

Il y a donc deux interprétations probabilistes très différentes de l'espace de Fock (qui est une notion fondamentale dans la théorie des champs quantiques) :

- une sur l'espace de Wiener (voir par exemple : [5], [8] et [ ])
- l'autre sur l'espace de Poisson (travaux de Surgaïlis [10], [11]).

Meyer [4] et Ruiz de Chavez [7], considèrent simultanément les deux interprétations.

Nous présentons maintenant un résultat qui nous servira beaucoup.

__*Lemme 1.2.1*__ :

(i) *si* $f \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(E,\lambda)$, *alors* $\tilde{p}(f) \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(X,\mu)$;
si $f_n \to f$ *dans* $L^p(E,\lambda)$ *pour tout* $2 \leq p < +\infty$, *alors* $\tilde{p}(f_n) \to \tilde{p}(f)$ *dans* $L^p(X,\mu)$ *pour tout* $1 \leq p < +\infty$.

(ii) *pour tout* f_i $(i = 1,\dots,n) \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(E,\lambda)$, *nous avons :*

(1.2.6) $\tilde{p}^{(n)}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = F(p(g_1,\ldots,p(g_n))$ μ *p.s.*

où F *est un polynôme, de degré* $\leq n$, *et* $g_j (j = 1,\ldots,m)$ *appartient à l'algèbre engendrée par* $\{f_1,\ldots,f_n\}$; $p(g) \stackrel{\Delta}{=} \int_E g(z)\, p(dz)$.

Inversement, pour tous $g_1,\ldots,g_m \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(E,\lambda)$ et tout polynôme F à n variables, de degré n, on a :

$$(1.2.7) \qquad F(p(g_1),\ldots,p(g_m)) = \sum_{n=1}^{n} \tilde{p}^{(k)}(f_{k1} \otimes \ldots \otimes f_{kk}) + C$$

où $f_{k,\ell}$, $k = 1,\ldots,n$; $\ell = 1,\ldots,\ell$ appartiennent à l'algèbre engendrée par $\{g_1,\ldots,g_n\}$, $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Démonstration :

(i) Il est bien connu que

$$(1.2.8) \quad C'_p \, \|\sqrt{p(f^2)}\|_p \leq \|\tilde{p}(f)\|_p \leq C_p \, \|\sqrt{p(f^2)}\|_p, \quad \forall f \in L^2(E,\lambda)$$

où C_p, C'_p sont des constantes positives dépendant seulement de p, $1 < p < +\infty$.

On établit maintenant (i) par récurrence en p : $1 \leq p < +\infty$;

- pour $1 \leq p \leq 2$, (i) est évident d'après *(1.2.2)*
- pour $2^n \leq p \leq 2^{n+1}$, grâce à *(1.2.8)*, nous pouvons nous ramener au cas où $2^{n-1} \leq p \leq 2^n$.

(ii) Bien que l'assertion soit longue à écrire, sa preuve est simple et peut-être établie à partir de *(1.2.4)*.

Pour les détails, voir Ruiz de Chavez [7].

Remarque : Rappelons que les v.a. d'un chaos sur l'espace de Wiener appartiennent à tout L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$; ce n'est plus vrai sur l'espace de Poisson. C'est une différence importante.

2. *LE SEMI-GROUPE ET LE PROCESSUS DE WIENER-POISSON.*

Pour résoudre le problème de la régularité des diffusions avec sauts, Bichteler-Gravereaux-Jacod ([1]) ont introduit un opérateur de Malliavin formel sur l'espace de Poisson. Dans cette section, nous allons démontrer que cet opérateur de Malliavin peut être considéré comme le générateur infinitésimal de notre semi-groupe de Wiener-Poisson.

2.1. Nous commençons par introduire le semi-groupe de Wiener-Poisson.

Soit $(T_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe symétrique markovien dans $L^2(E,\lambda)$, nous désignons par A son générateur, par $D_p(A)$ le domaine de A dans $L^p(E,\lambda)$ (ceci a un sens, parce que (T_t) est un semi-groupe de contractions dans $L^p(E,\lambda)$ pour tout $1 \leqq p \leqq +\infty$).

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(i) (T_t) est fellerien et admet une réalisation canonique continue $(z^t)_{t \geqq 0}$ à valeurs dans E.

(ii) il existe une algèbre $\mathfrak{D} \subseteq \bigcap_{1 \leq p < +\infty} D_p(A) \cap C_b(E)$, stable par A, dense dans $D_p(A)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{D_p(A)} = \|f\|_p + \|Af\|_p,$$

et dense également dans $C_b(E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

__*Définition*__ : Le semi-groupe de Wiener-Poisson $(P(T_t))_{t \geqq 0}$ sur $L^2(X,\mu)$ est défini par :

$$\textit{(2.1.1)} \qquad P(T_t)\phi = E\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}^{(n)}\left(T_t^{\otimes n} f_n\right)$$

où $T_t^{\otimes n} = \underbrace{T_t \otimes \ldots \otimes T_t}_{n \text{ fois}}$

$\forall \phi \in L^2(X,\mu)$, qui se représente, d'après *(1.2.5)*, comme :

$$\phi = E\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}^{(n)}(f_n)$$

avec $\quad f_n \in L^2_{sym}(E^n,\lambda^n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n! \, \|f_n\|_{L^2(E^n,\lambda^n)} < +\infty.$

Comme T_t est une contraction dans $L^2(E,\lambda)$, $T_t^{\otimes n}$ est une contraction dans $L^2(E^n,\lambda^n)$, d'après *(1.2.2)*, $P(T_t)\phi$ est bien défini par *(2.1.1)*, et $P(T_t)$ est une contraction dans $L^2(X,\mu)$.

Il est évident que $(P(T_t))_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe symétrique dans $L^2(X,\mu)$. Surgaïlis ([10]) a démontré que $P(T_t)$ est aussi markovien.

Suivant Surgaïlis [11], nous donnons ici la construction d'un processus de Markov $(X_t)_{t \geqq 0}$ à valeurs dans l'espace de Poisson X, de semi-groupe $(P(T_t))_{t \geqq 0}$, de loi initiale ν (une mesure de probabilité sur $(X,\mathcal{A})$) :

Sur un espace de probabilité $(W,\underline{\underline{W}}_t,P)$, est définie une famille des processus de Markov $\{(w_t(z))_{t\geq 0}, z \in E\}$, indépendants entre eux, où $(w_t(z))_{t\geq 0}$ est un processus de Markov à valeurs dans E, continu, de semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$, partant de $z(\in E)$.
Posons

$$(2.1.2)\quad \begin{cases} (\Omega,\mathcal{F}_t),P_\nu) = (W,(\underline{\underline{W}}_t),P) \times (X,\mathcal{A},\nu) \quad \text{et} \quad \omega = (w,x) \in \Omega : \\ X_t(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{z\in \operatorname{supp}(x)} \delta_{W_t(z)}. \end{cases}$$

Nous notons en particulier : $P_x \overset{\Delta}{=} P_{\delta_x}$, remarquons aussi :

$$(2.1.3)\qquad P_\nu = \int_X P_x\, \nu(dx).$$

Le processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé le processus de Wiener-Poisson, il admet μ comme mesure invariante.

Avant d'étudier le semi-groupe de W-P, nous faisons quelques remarques sur le système $(T_t,A,\mathcal{D})$ introduit au début de ce paragraphe.

Soit $(z^t)_{t\geq 0}$ la réalisation canonique continue de $(T_t)_{t\geq 0}$, pour tout $f \in \mathcal{D}$, le processus

$$(2.1.4)\qquad M_f^t \overset{\Delta}{=} f(z^t) - \int_0^t Af(z^s)ds$$

est une martingale continue.

L'opérateur carré du champ $\Gamma^A(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, définie par :

$$\Gamma^A(f,g) = \frac{1}{2}\; A(f,g) - f\cdot Ag - g\cdot Af .$$

Une simple application de la formule d'Itô donne :

$$(.2.1.6)\qquad \langle M_f,M_g\rangle_t = 2\int_0^t \Gamma^A(f,g)(z^s)ds$$

$$(2.1.7)\qquad A\, u(f_1,\dots,f_n) = \sum_{i=1}^n u_i(f_1,\dots,f_n)\, Af_i + \sum_{i,j=1}^n u_{ij}(\;)\cdot\Gamma^A(f_i,f_j)$$

où $f,g, f_i(i = 1,\dots,) \in \mathcal{D}$; u est un polynôme sans terme constant ; $u_i = \frac{\partial u}{\partial y_i}$; $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_i\, \partial y_j}$; ces notations seront utilisées dans la suite sans autre indication.

2.2. Nous désignons désormais par $(P_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Wiener-Poisson $(P(T_t)_{t\geq 0}$ associé à $(T_t)_{t\geq 0}$.

Nous désignons par L le générateur du semi-groupe de W-P, par $D_p(L)$ le domaine de L dans $L^p(X,\mu)$, domaine que l'on munit de la norme

$$\|\phi\|_{D_p(L)} = \|\phi\|_{L^p(X,\mu)} + \|L\phi\|_{L^p(X,\mu)} .$$

Nous établissons maintenant le résultat principal de cet article, qui permet de faire du calcul de Malliavin sur l'espace de Poisson.

Théorème 2.2.1 : *Considérons l'ensemble des fonctions-test* $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} \stackrel{\Delta}{=} \{\phi : X \to \mathbb{R}/\phi = F(p(f_1),\dots,p(f_n)),\ \text{où } F \text{ un polynôme}$$
$$f_i \in \mathcal{D},\ i = 1,\dots n\}.$$

Nous avons :

(*i*) $\mathcal{R} \subseteq \bigcap_{1\le p<+\infty} D_p(L)$, *dense dans* $D_p(L)$ *pour tout* $1 \le p < +\infty$ *et*

$\forall\ \phi = F(p(f_1),\dots,p(f_n)) \in \mathcal{R}$,

$$(2.2.1)\qquad L\phi = \sum_{i=1}^{n} F_i(p(f_1),\dots,p(f_n))p(A(f_i) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(p(f_1),\dots,p(f_n))\, p(\Gamma^A(f_i,f_j))$$

(*ii*) $\forall \phi_1,\dots,\phi_n \in \mathcal{R}$, *et* F *polynôme à* n *variables,*

$$(2.2.2)\qquad LF(\phi_1,\dots,\phi_n) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\phi_1,\dots,\phi_n)L\phi_i + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(\phi_1,\dots,\phi_n)\Gamma(\phi_i,\phi_j)$$

où $\Gamma(\cdot,\cdot)$ *est l'opérateur carré du champ associé à* L, *défini par :*

$$(2.2.3)\qquad \Gamma(\phi,\psi) = \frac{1}{2}\,[L(\phi,\psi) - \phi L\psi - \psi L\phi].$$

Démonstration :

(i) Remarquons tout d'abord que le *lemme 1.2.1* entraîne $\mathcal{R} \subseteq \bigcap_{1\le p<+\infty} L^p(X,\mu)$.

Pour démontrer que $\mathcal{R} \subseteq \bigcap_{1\le p<+\infty} D_p(L)$, nous commençons par considérer la fonction la plus simple : $\phi = p(f)$ où $f \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} t^{-1}(P_t\, p(f) - \tilde{p}(f)) &= t^{-1}(P_t\, \tilde{p}(f) - \tilde{p}(f)) \quad (P_t \text{ est markovien})\\ &= t^{-1}(\tilde{p}(T_t f) - \tilde{p}(f))\\ &= p(t^{-1}[T_t f - f]) \quad (\lambda \text{ est invariante pour } T_t)\\ &\to p(Af) \qquad (t \to 0_+) \end{aligned}$$

dans $L^p(X,\mu)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$, d'après le *lemme 1.2.1* ; par suite :

$$(2.2.4)\qquad p(f) \in \bigcap_{1\le p<+\infty} D_p(L) \quad \text{et} \quad Lp(f) = p(Af).$$

La deuxième chose que nous allons établir est : pour tout $f,g \in \mathcal{D}$, on a :

$$(2.2.5)\quad \begin{cases} p(f)\, p(g) \in \bigcap_{1\leq p<+\infty} D_p(L) \quad \text{et} \\ L(p(f)\, p(g)) = p(Af)p(g) + p(g)\, p(Af) + 2p(\Gamma^A(f,g)) \quad \text{autrement dit} \\ \Gamma(p(f),p(g)) = p(\Gamma^A(f,g)). \end{cases}$$

Pour ceci, nous calculons d'abord d'après *(1.2.4)* :

$$\tilde{p}(f)\, \tilde{p}(g) = \int_{E^2} f(z_1)g(z_2)\tilde{p}(dz_1)\tilde{p}(dz_2)$$

$$(2.2.6)\qquad = \int_{[z_1\neq z_2]} f(z_1)g(z_2)\tilde{p}(dz_1)\tilde{p}(dz_2) + \int_{[z_1=z_2]} f(z_1)g(z_2)\tilde{p}(dz_1)\tilde{p}(dz_2)$$

$$\stackrel{\mu\text{-p.s.}}{=} \tilde{p}^{(2)}(f\otimes g) + p(fg)$$

par suite :

$$t^{-1}[P_t(\tilde{p}(f)p(g)) - \tilde{p}(f)\cdot\tilde{p}(g)]$$

$$= t^{-1}[P_t\, \tilde{p}^{(2)}(f\otimes g) - \tilde{p}^{(2)}(f\otimes g)] + t^{-1}[P_t\, p(f\cdot g) - p(fg)]$$

$$\xrightarrow[(t\to 0)]{L^p(X,\mu)} \tilde{p}^{(2)}(Af\otimes g + f\otimes Ag) + p(A(f\cdot g))$$

pour tout $1 \leq p < +\infty$ d'après le *lemme 1.2.1*.

Finalement, *(2.2.5)* est une conséquence directe du résultat ci-dessus et de *(2.2.4)*, *(2.2.6)*.

Maintenant, nous allons démontrer :

$$(2.2.7)\quad \begin{cases} \text{pour } \mu\text{-p.s. } x \in X, \text{ le processus } M^t_{p(f)} = X_t(f) - \int_0^t X_s(Af)ds \text{ est} \\ \text{une } P_x\text{-martingale continue, où } (X_t)_{t\geq 0} \text{ est le processus de Wiener-} \\ \text{Poisson sur } (\Omega,(\mathcal{F}_t),P_x) \text{ (voir } (2.1.2)). \end{cases}$$

Pour démontrer ceci, posons :

$$N_1 = \{x \in X/\exists z \in E : x(\{z\}) > 1\}$$

$$N_2 = \{x \in X/\exists n \in \mathbb{N} : x(T_n f^2) \vee x(\int_0^n T_s(Af)^2\, ds = +\infty\}.$$

Il est facile de vérifier que $\mu(N_1 \cup N_2) = 0$.

Pour tout $x \in (N_1 \cup N_2)^c$, sous la loi P_x, nous avons d'après *(2.1.2)* :

$$M^t_{p(f)} = \sum_k [f(w_t(z_k)) - \int_0^t Af(w_s(z_k))ds].$$

Puisque $f, Af \in C_b(E)$ d'après notre hypothèse, les processus :

$$M_k^t \triangleq f(w_t(z_k)) - \int_0^t Af(w_s(z_k))ds$$

sont des P_x-martingales continues, indépendantes entre elles $(z_i \neq z_j)$.

Un calcul direct va nous donner :

$$\sum_k E^{P_x} |M_k^n|^2 < +\infty.$$

Il résulte finalement de l'inégalité de Doob que

$$M_{p(f)}^t = \sum_k M_k^t$$

est une P_x-martingale continue. *(2.2.7)* est établie.

Puisque $P_\mu = \int_X (dx) P_x$, $(M_{p(f)}^t)_{t \geq 0}$ est une P_μ-martingale continue.
D'après la formule d'Itô et *(2.2.5)* :

$$\langle M_{p(f)}, M_{p(g)} \rangle_t = 2 \int_0^t X_s(\Gamma^A(f,g))ds.$$

Tout est maintenant prêt pour établir *(2.2.5)*.

Soit $\phi = F(p(f_1),\dots,p(f_n)) \in \mathcal{R}$, sur $(\Omega, \mathcal{F}_t), P_\mu)$, nous appliquons la formule d'Itô à

$$\phi(X_t) - \phi(X_o) = F(X_t(f),\dots,X_t(f_n)) - F(X_o(f_1),\dots,X_o(f_n))$$

et obtenons :

$$(2.2.8) \qquad \phi(X_t) - \phi(X_o) = \sum_{i=1}^n \int_0^t F_i(X_s(f_1),\dots,X_s(f_n))dM_{p(f_i)}^t$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t F_i(X_s(f_1),\dots,X_s(Af_i)ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_0^t F_{ij}(X_s(f_1),\dots,X_s(\Gamma^A(f_i,f_j))ds$$

Le premier terme du côté droit de *(2.2.8)*, noté M_ϕ^t, est une vraie martingale, puisque $\langle M_\phi, M_\phi \rangle_t \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(P_\mu)$.

Il résulte donc de *(2.2.8)* que :

$$t^{-1}(P_t\phi - \phi)(X_o) = E^{P_\mu}[t^{-1}(\phi(X_t) - \phi(X_o))/X_o]$$

converge dans $L^p(P_\mu)$ vers

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(X_o(f_1),\dots,X_o(f_n))\, X_o(Af_i) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(X_o(f_1),\dots,X_o(f_n))\cdot X_o(\Gamma^A(f_i,f_j))$$

lorsque t tend vers 0, pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Puisque la loi de X_o est μ (sous P_μ), ceci signifie :

$$\phi \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} D_p(L) \quad \text{et} \quad L\phi \quad \text{est donné par } (2.2.1).$$

Il reste à démontrer que $\mathcal{R}$ est dense dans $D_p(L)$ $(1 \leq p < +\infty)$; pour cela il suffit de prouver que $\mathcal{R}$ est dense dans $D_2(L)$. Remarquons :

$$(2.2.9) \qquad \mathcal{R} = \{\sum_{k=0}^{n} \tilde{p}^{(n)}(f_{k1} \otimes \dots \otimes f_{kk})/f_{k\ell} \in \mathcal{D}\}$$

Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $D_2(A)$, l'espace vectoriel engendré par $\{f_1 \otimes \dots \otimes f_n : f_i \in \mathcal{D}\}$ est dense dans $D_2(A_n)$, où A_n est le générateur de $(T_t^{\otimes n})_{t \geq 0}$. D'après l'égalité *(1.2.2)*, l'ensemble qui figure du côté droit de (2.2.9) est par conséquent dense dans $D_2(L)$.

(ii) La formule *(2.2.2)* est une conséquence directe de la formule *(2.2.1)*. □

<u>*Corollaire*</u> : *Pour* $\phi = F(p(f_1),\dots,p(f_n)) \in \mathcal{R}$, $\psi = G(p(g_1),\dots,p(g_m)) \in \mathcal{R}$:

$$(2.2.10) \qquad \Gamma(\phi,\psi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_i(p(f_1),\dots,p(f_n))G_j(p(g_1),\dots,p(g_m))\cdot p(\Gamma^A(f_i,g_j))$$

C'est une conséquence directe de *(2.2.1)*.

<u>Remarque</u> : Le théorème ci-dessus dit que le semi-groupe de Wiener-Poisson $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe symétrique de diffusion au sens de Stroock [9], où il est montré que, ce genre de semi-groupes permet de faire du calcul de Malliavin.

Nous présentons un exemple :

soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, de frontière $\partial\Theta$ suffisamment lisse, muni de la mesure de Lebesgue dz ; soit

$$\rho : \Theta \to (0,+\infty)$$

une fonction C^∞ telle que la diffusion de générateur $\rho\Delta + \nabla\rho\cdot\nabla$ n'atteigne jamais $\partial\Theta$. Nous posons :

$$(E,\lambda) = ([0,T] \times \Theta\ ,\ dt \times dz)$$

$$\mathcal{D} = \left\{ f(t,z) : [0,T] \times \Theta \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in C_o([0,T] \times \Theta) \\ \forall t \in [0,T] \text{ fixé} : f(t,\cdot) \in C^\infty(\Theta) \\ D_z^r f \in C_o([0,T] \times \Theta) \end{array} \right\}$$

(T_t) le semi-groupe de la diffusion de générateur

$$(2.2.11) \qquad Af = \rho\cdot\Delta_z f + \nabla\rho\cdot\nabla_z f \qquad \forall f \in \mathfrak{D}\ .$$

Le système $(T_t, A, \mathfrak{D})$ ainsi donné vérifie les hypothèses faites dans *§ 2.1*
Remarquons aussi que :

$$\Gamma^A(f,g) = \rho\ \nabla_z f\cdot\nabla_z g.$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace de Poisson sur $(E,\lambda) = ([0,T]\times\Theta, dt\times dz)$, et soit $(P_t, L, \mathcal{R})$ le système associé à $(T_t, \mathfrak{D}, A)$. Alors, d'après le *théorème 2.2.1* , nous avons :

$$\forall\phi = F(p(f_1),\dots,p(f_n)) \in \mathcal{R}\ , \quad \psi = G(p(g_1),\dots,p(g_m)) \in \mathcal{R}$$

$$(2.2.12) \qquad \begin{aligned} L\phi &= \sum_{i=1}^{n} F_i(p(f_1),\dots,p(f_n))\cdot p(\rho\ \Delta_z f_i + \nabla_z f_i\cdot\nabla\rho) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(p(f_1),\dots,p(f_n))\ p(\rho\ \nabla_z f_i\cdot\nabla_z f_j) \end{aligned}$$

$$(2.2.13) \qquad \Gamma(\phi,\psi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F_i(p(f_1),\dots,p(f_n))\cdot G_j(p(g_1),\dots,p(g_m))\ p(\rho\ \nabla_z f_i\cdot\nabla_z g_j).$$

$L\phi$, donné par *(2.2.12)*, est précisément l'opérateur de Malliavin formel sur l'espace de Poisson, introduit par Bichteler-Gravereaux-Jacod [1].

Nous ne présentons pas ici les applications de l'opérateur de Malliavin L aux diffusions avec sauts. Le lecteur qui s'intéresse au problème de la régularité des diffusions avec sauts peut consulter par exemple [1], [2] et les références de ces articles.

2.3. Nous terminons cet article en présentant un résultat auxiliaire concernant les propriétés du processus de W-P $(X_t)_{t\geq 0}$.

<u>*Proposition 2.3.1*</u> :

(i) Posons $X' = \{x \quad X/x$ *est une mesure de Radon} ; alors :* $N \overset{\Delta}{=} X \setminus X'$ *est un ensemble* μ*-polaire.*

(ii) Pour $\phi : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}^0$*-mesurable, bornée,* $(R_\lambda\phi(X_t))_{t\geq 0}$ *est un processus* P_ν*-p.s. continu, où* (X_t) *est le processus de Wiener-Poisson, et* γ *est une loi initiale arbitraire, et* R_λ *est la résolvante de* $(P_t)_{t\geq 0}$.

<u>Démonstration</u> :

(i) Soit $(K_n)_{n=1,2,\dots}$ une suite de compacts dans E telle que :

$$K_n \subseteq K_{n+1}\ , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = E.$$

Nous posons

$N_n = \{x \in X / x(K_n) = +\infty\}$; $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \in N_n\}$; $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in X - X'\}$

Nous avons : $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ $(N_n \subseteq N_{n+1})$, $\tau_n \downarrow \tau$.

Pour démontrer que N est μ-polaire, i.e. $P(\tau < +\infty) = 0$, il nous suffit de prouver : $P_\mu(\tau_n < +\infty) = 0$, $\forall n = 1,2,\ldots.$

Ceci se traduit par :

(2.3.1) $P_x(\tau_n < +\infty) = 0$ pour μ-presque tout $x \in X$.

Choisissons une fonction $f \in C_0(E)$ telle que

$$f_\varepsilon \geq 0 \quad \text{et} \quad f_\varepsilon = 1+\varepsilon \quad \text{sur } K_n, \quad \text{où } \varepsilon > 0.$$

Puisque $\mathfrak{D}$ est dense dans $C_b(E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, il existe une fonction $\tilde{f} \in \mathfrak{D}$ telle que :

$$\sup_{z \in K_n} |\tilde{f}(z) - f_\varepsilon(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $f = \tilde{f}^2 \in \mathfrak{D}$, alors $f \geq 1_{K_n}$

Par suite, pour établir *(2.3.1)*, il nous suffit de montrer :

(2.3.2) pour μ-p.s. $\forall x \in X$: $P_x(\sup_{0 \leq t \leq T} x_t(f) < +\infty) = 1$ $(\forall T > 0)$

<u>Remarquons</u> : De l'égalité $x_t(f) = M^t_{p(f)} + \int_0^t x_s(Af)ds$ on déduit :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} x_t(f) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |M^t_{p(f)}| + \int_0^t x_s(|Af|)ds$$

et
$$E_{P_\mu} \int_0^T x_s(|Af|)ds = T \cdot \lambda(|Af|) < +\infty.$$

D'autre part, nous avons indiqué dans la démonstration du *théorème 2.2.1* que $(M^t_{p(f)})_{t \geq 0}$ est une P_x-martingale continue pour μ-p.s. $x \in X$. Par suite, le lemme maximal entraîne :

$$P_x(\sup_{0 \leq t \leq T} |M^t_{p(f)}| < +\infty) = 1 \qquad \text{pour } \mu\text{-p.s. } x \in X.$$

(2.3.2) est établie.

(ii) Puisque $P_\nu = \int_X \nu(dx) P_x$, il nous suffit de considérer le processus de W-P $(X_t)_{t \geq 0}$ partant de $x = \sum_k \delta_{z_k} \in X$ arbitraire.

Nous considérons deux cas :

<u>Premier cas</u> : $x(E) = +\infty$

Soient $\bar{\Omega} = (E^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}_+}$, $Y_t = (z_0^t, z_1^t, \ldots)$ l'application coordonnée d'indice t

sur $\overline{\Omega}$, et $P^{(z_k)_{k=0,1,2,\dots}}$ la loi unique sur $\overline{\Omega}$ telle que :

$$\begin{cases} (z_k^t)_{t \geq 0},\ k = 0,1,2,\dots \quad \text{sont indépendants.} \\ \text{pour chaque } k = 0,1,2,\dots,\ (z_k^t)_{t \geq 0} \text{ est un processus de Markov fort,} \\ \text{continu, de semi-groupe } (T_t)_{t \geq 0}, \text{ partant de } z_k. \end{cases}$$

Remarquons que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov fort, continu pour la topologie produit sur $E^{\mathbb{N}}$, semi-groupe $T_t^{\otimes \mathbb{N}}$.

Considérons l'application suivante :

$$\sigma : E^{\mathbb{N}} \to X$$

$$y = (z_0, z_1, \dots) \to \sum_k \delta_{z_k} \quad \text{qui est } \mathcal{B}(E^{\mathbb{N}})/\mathcal{O}\!\iota^o\text{-mesurable.}$$

Remarquons le fait suivant :

(*) Sous la loi $P^{(z_k)}$, le processus $(\sigma(Y_t))$ est le processus de W-P partant de $x = \sum_k \delta_{z_k}$.

A chaque fonction $\mathcal{O}\!\iota^o$-mesurable $\phi : X \to \mathbb{R}$, nous associons une fonction $\tilde{\phi} : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{\phi}(y) = \phi(\sigma(y))$$

qui est $\mathcal{B}(E^{\mathbb{N}})$-mesurable, d'après la mesurabilité de σ.

Nous désignons par $\tilde{R}_\lambda$ la résolvante de $T_t^{\otimes \mathbb{N}}$; d'après (*) ci-dessus, nous avons, pour tout $y \in E^{\mathbb{N}}$:

$$T_t^{\otimes \mathbb{N}} \tilde{\phi}(y) = P_t\, \phi(\sigma(y)) \ ; \qquad R_\lambda \tilde{\phi}(y) = R_\lambda \tilde{\phi}(\ (y)).$$

D'après un résultat de [12] (p. 89), $(\tilde{R}_\lambda \tilde{\phi}(Y_t))_{t \geq 0}$ est un processus continu sous la loi $P^{(z_k)}$. Par conséquent, $\tilde{R}_\lambda \tilde{\phi}(\ (Y_t)) = R_\lambda \tilde{\phi}(Y_t)$ est continu sous la loi $P^{(z_k)}$, mais $(\sigma(y_t))_{t \geq 0}$ est le processus de W-P partant de $x = \sum_k \delta_{z_k}$, le résultat est établi.

<u>Deuxième cas</u> : $x(E) = n < +\infty$

C'est encore plus simple. On peut démontrer le résultat de la même manière en remplaçant $\overline{\Omega}$ par $(E^n)^{\mathbb{R}_+}$ et en remarquant que $(T_t^{\otimes n})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Markov droit.

<u>Remarque</u> :

(i) X-X' est un ensemble μ-polaire, mais nous ne savons pas si le processus de

W-P $(X_t)_{t \geq 0}$ partant de $x \in X'$ arbitraire quitte ou non X'. Cette difficulté nous empêche de travailler dans l'espace X', qui peut-être muni de la topologie de convergence vague des mesures de Radon.

(ii) On peut démontrer de la même manière la propriété de Markov forte du processus de W-P $(X_t)_{t \geq 0}$.

REFERENCES :

[1] K. BICHTELER, J.B. GRAVEREAUX, J. JACOD : Malliavin Calculus for processes with jumps. A paraître

[2] J.M. BISMUT : Calcul des variations stochastique et processus de sauts. Z. für. Wahr. 56, 469-505, 1981.

[3] K. ITÔ : Spectral type of shifts transformations of differential process with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), p.

[4] P.A. MEYER : Elements de probabilités quantiques. Exposés I à V, Sém. de Proba. XX, Lecture Notes in Math. 1204, Springer 1986.

[5] E. NELSON : The free Markoff field. J. Funct. Anal. 1

[6] J. NEVEU : Processus Ponctuels. Ecole d'Eté de Saint-Flour VI-1976, Lecture Notes in Math. 598, Springer 1977.

[7] J. RUIZ de CHAVEZ : Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson. Sém. de Proba. XIX, Lecture Notes in Math. 1123, Springer 1983/1984.

[8] B. SIMON : The $P(\phi)_2$ Euclidean Quantum Field Theory. Princeton University Press (1974).

[9] D. STROOCK : The Malliavin Calculus, a Functional Analytic Approch. J. Funct. Anal. 44, 1981, p. 212-258.

[10] D. SURGAÏLIS : On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semi-groups. Probability and Math. Stat. 3, 1984, 217-239.

[11] D. SURGAÏLIS : On Poisson Multiple stochastic integrals and associated equilibrium Markov processes.
In : Theory and Appl. of Random Fields, Lect. Notes in Control and Inform. Sci. 49, 1983, 233-248 (Bangalore).

[12] P.A. MEYER : Processus de Markov. Lecture Notes in Math. 26, Springer 1967.

Ce travail, dirigé par J. Jacod, n'aurait jamais été accompli sans ses critiques et ses encouragements.

Je remercie D. Bakry, M. Emery et J.A. Jen pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux.