

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANÇOIS CHARLOT

Sur la démonstration des formules en théorie discrète du potentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 612-613

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__612_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DEMONSTRATION DES FORMULES EN
THEORIE DISCRETE DU POTENTIEL
par F. Charlot

En théorie discrète du potentiel, on associe à un noyau N divers noyaux (noyau potentiel, noyaux de réduction, etc.), et on établit un certain nombre d'identités relatives à ces noyaux à l'aide de calculs plus ou moins aisés. Dans [1] Dellacherie et Meyer montrent que ces calculs se ramènent à des calculs sur des séries formelles à indéterminées non commutatives, ce qui permet d'opérer sans se soucier si les expressions manipulées ont réellement un sens. Mais, par ailleurs, beaucoup de ces identités ont, quand N est sousmarkovien, une interprétation probabiliste et une démonstration simple à l'aide de la propriété de Markov forte. Et le théorème que nous allons démontrer ici implique que deux séries formelles à coefficients positifs sont égales dès qu'elles fournissent les mêmes noyaux chaque fois qu'on remplace leurs indéterminées par des noyaux sousmarkoviens : ainsi, le calcul markovien permet tout aussi bien d'établir en toute généralité les identités envisagées, ce qui justifie une pratique heuristique bien établie.

Comme dans [1], on se contentera de considérer l'anneau $S(x,y,z)$ des séries formelles réelles à trois indéterminées non commutatives, et on désignera par $S^+(x,y,z)$ l'ensemble des séries à coefficients positifs. Pour $n \in \mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$, on appellera exposant d'ordre n toute partition de $\{1,\dots,n\}$ en trois parties A,B,C , deux d'entre elles pouvant être vides (les trois étant vides pour $n=0$) ; on devine sans peine ce qu'est l'exposant d'un monôme de degré n : par exemple, l'exposant de y^2xyz^3x est $\{3,8\}, \{1,2,4\}, \{5,6,7\}$.

THEOREME.- Deux éléments α et β de $S^+(x,y,z)$ sont égaux ssi il existe $\delta \in]0,1[$ tel que, pour tout exposant A,B,C , on ait

$$\alpha(T\delta_A, T\delta_B, T\delta_C) = \beta(T\delta_A, T\delta_B, T\delta_C)$$

où T est l'opérateur de translation sur $\mathbb{N}$ (i.e. $Tf(n)=f(n+1)$) et δ_A (resp ...) est l'opérateur de multiplication par $\delta 1_A$ (resp ...).

La nécessité est claire. La suffisance va résulter aisément du lemme suivant

LEMME.- Soient γ un monôme de degré n et de coefficient unité, δ un élément de $]0,1]$ et ϵ_0 la masse de Dirac en 0. Si A,B,C est un exposant d'ordre $m \leq n$, alors la mesure $\epsilon_0 \gamma(T\delta_A, T\delta_B, T\delta_C)$ est nulle si A,B,C est distinct de l'exposant de γ , et est égale à $\delta^n \epsilon_n$ si A,B,C est égal à l'exposant de γ .

D/ Soit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ l'exposant de γ : il n'y a qu'à suivre les n bonds d'une particule partant de 0 et se déplaçant suivant la stratégie $N_1, \dots, N_n$ où N_1 est le noyau $T\delta_H$, H étant égal à A,B,C resp. suivant que i appartient à $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ resp. .

On achève alors la démonstration du théorème par un raisonnement par récurrence : si α_n (resp β_n) désigne la somme des monômes de degré $\leq n$ de α (resp β), alors le lemme (et l'hypothèse faite sur α, β) permet de déduire $\alpha_n = \beta_n$ à partir de $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$.

COROLLAIRE.- Deux éléments α et β de $S^+(x,y,z)$ sont égaux ssi, pour tout espace mesurable $(E, \mathbb{E})$, on a $\alpha(M,N,P) = \beta(M,N,P)$ pour tout triplet M,N,P de noyaux sousmarkoviens (et même de norme < 1) sur $(E, \mathbb{E})$.

Ainsi, on peut par exemple obtenir des formules du type "entrée et sortie", qui mènent au principe du maximum (cf [2]), ou faire de la théorie de la R-récurrence (cf [3] et [4]), pour des noyaux positifs quelconques, avec des démonstrations probabilistes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiels III. Théorie discrète du Potentiel (Hermann, Paris 1983)
- [2] REVUZ (D.) : Markov Chains (North-Holland, Amsterdam 1975)
- [3] CELLIER (D.) : Méthode de fission pour l'étude de la récurrence des chaînes de Markov (Thèse de 3e cycle, Rouen 1980)
- [4] TWEEDIE (R.L.) : R-Theory for chains on a general state space (Ann. Prob. 2, 840-878, 1974)

François CHARLOT
Cité 5 Juillet
Bat. 17, App. 10
Dar El Beida
Alger