MARC YOR

Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 532-542

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__532_0>

PRECISIONS SUR L'EXISTENCE ET LA CONTINUITE DES TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^2$

Marc YOR

Introduction

Soit $(B_t\ ;\ t \geq 0)$ mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d (d = 2$ ou $3)$.

L'étude de la mesure aléatoire, définie pour $t \in \mathbb{R}_+$, par :

$$\mu_{t,\omega} : A \in (\mathbb{R}^d) \to \mu_{t,\omega}(A) = \int_0^t ds \int_s^t du\, f\big((B_u - B_s)(\omega)\big)$$

a été menée récemment par plusieurs auteurs (Rosen [5], [6], [7] ; Dynkin [1] ; Le Gall [3] ; Yor [9], [10]).

En particulier, à la suite des études générales de Geman-Horowitz-Rosen [2], J. Rosen [5] montre, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'existence d'une densité $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^d)$ de μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue, ainsi que l'existence d'une version bicontinue de $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ t \geq 0)$.

On a donc, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, borélienne, et tout $t \geq 0$:

$$(0.a) \qquad \int_0^t ds \int_s^t du\, f(B_u - B_s) = \int dy\, f(y)\, \alpha(y\ ;\ t)$$

L'outil principal de Rosen est la transformation de Fourier (cf : [5], [7]), bien que quelquefois, il utilise la méthode maintenant classique qui a servi pour la construction des temps locaux du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ (cf : Meyer [4]). Cependant, même dans ce cas, les estimations faites par Rosen s'appuient encore fortement sur la transformation de Fourier.

Le but de cette Note est de présenter l'existence et la continuité de α dans le cas $d = 2$ de façon aussi simple que possible en suivant strictement la méthode unidimensionnelle, et, en particulier, d'améliorer les résultats de continuité sur α déjà obtenus par J. Rosen ([5], [7]).

Le résultat de continuité obtenu ici est le suivant :

THEOREME : Le processus $\left(\tilde{\alpha}(y\ ;\ s) = \pi\alpha(y\ ;\ s) - s \log \frac{1}{|y|}\ ;\ y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ s \geq 0\right)$ *admet un prolongement continu à tout* $(y,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$.

Ce prolongement, que l'on note encore $\tilde{\alpha}$, *vérifie : pour tout* $t > 0$,

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{1}{\delta (\log \frac{1}{\delta})^{7/2}} \sup_{\substack{s \leq t \\ |x-y| \leq \delta}} |\tilde{\alpha}(x\ ;\ s) - \tilde{\alpha}(y\ ;\ s)| < \infty \qquad p.s.$$

1. Existence de α

(1.1) Nous reprenons, en la simplifiant au maximum, l'approche déjà développée en [9].

Soit $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et $\varepsilon > 0$. On a, d'après Itô :

$$\log(\varepsilon + |B_t - B_s - y|) - \log(\varepsilon + |y|)$$

$$= \int_s^t \frac{d_u(|B_u - B_s - y|)}{\varepsilon + |B_u - B_s - y|} - \frac{1}{2}\int_s^t \frac{du}{(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2}$$

$$= \int_s^t \left(dB_u \, ; \, \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|}\right) \frac{1}{\varepsilon + |B_u - B_s - y|} + \frac{1}{2}\int_s^t du \frac{\varepsilon}{|B_u - B_s - y| \, (\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2} ,$$

soit, en intégrant les deux membres de l'égalité ci-dessus par rapport à (ds) sur $[0,t]$:

$$\int_0^t ds\{\log(\varepsilon + |B_t - B_s - y|) - \log(\varepsilon + |y|)\}$$

$$(1.a) \qquad = \int_0^t \left(dB_u \, ; \, \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \frac{1}{(\varepsilon + |B_u - B_s - y|)}\right) + A_t^{(\varepsilon)} ,$$

où
$$A_t^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_s^t du \frac{\varepsilon}{|B_u - B_s - y| \, (\varepsilon + |B_u - B_s - y|)^2}$$

Pour parvenir à *(1.a)*, on a interverti l'intégrale stochastique en (dB_u), et l'intégrale en (ds) ; ceci ne présente aucune difficulté, l'intégrand étant borné.

Faisons maintenant tendre ε vers 0 en *(1.a)* :

- l'intégrale en (ds) converge p.s. et dans L^p vers :

$$\int_0^t ds \, \{\log|B_t - B_s - y| - \log|y|\}$$

- l'intégrale en (dB_u) converge dans tous les L^p vers :

$$\int_0^t \left(dB_u \, ; \, \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}\right) ,$$

ceci étant d'ailleurs valable pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ (y compris $y = 0$).
Pour démontrer précisément cette dernière convergence, on utilise principalement le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et le fait que, pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, et tout $u > 0$, la variable $\int_0^u \frac{ds}{|B_s - y|}$ appartient à tous les L^p (voir [9] pour plus

de détails).

En conséquence, le processus croissant $A_t^{(\varepsilon)}$ converge dans L^p, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un processus croissant que l'on note $\pi\alpha(y\ ;\ t)$.

On a donc obtenu la formule :

$$(1.b)\qquad \int_0^t ds\ \{\log |B_t-B_s-y| - \log |y|\} = \int_0^t (dB_u\ ;\ \int_0^u ds\ \frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^2}) + \pi\alpha(y;t).$$

Remarquons ensuite que l'on déduit aisément de cette formule l'existence d'une version de α mesurable en (y, ω, t).

(1.2) Nous identifions maintenant α comme densité d'occupation, c'est-à-dire que α satisfait la formule *(0.a)*, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, on associe à toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ son potentiel logarithmique :

$$L_f(x) = \int (\log |x-y|)\ f(y)\ dy$$

La fonction L_f est encore de classe C^∞, et on a, en particulier : $\Delta(L_f) = 2\pi f$.

En conséquence, on obtient, par application de la formule d'Itô :

$$(1.c)\quad \int_0^t ds\{L_f(B_t-B_s) - L_f(0)\} = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds(\nabla L_f)(B_u-B_s)\right) + \pi\int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u-B_s).$$

D'autre part, on a, par intégration à partir de la formule *(1.b)* :

$$(1.d)\quad \int_0^t ds\{L_f(B_t-B_s)-L_f(0)\} = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds(\nabla L_f)(B_u-B_s)\right) + \pi\int dy\ f(y)\ \alpha(y\ ;\ t).$$

La formule *(0.a)* : $\displaystyle\int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u-B_s) = \int dy\ f(y)\ \alpha(y\ ;\ t)$

découle alors immédiatement de la comparaison des formules *(1.c)* et *(1.d)*.

2. Etude de la continuite de α.

Ainsi que cela est annoncé dans l'Introduction ci-dessus, l'objet de ce second paragraphe est de déduire de la formule *(1.b)* l'existence d'une version bicontinue de $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\},\ t \geq 0)$, et d'améliorer le résultat de continuité sur $(\alpha(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ obtenu par Rosen [5].

Dans tout ce paragraphe, on notera, pour $R > 0$, $D_R = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < R\}$.

Remarquons qu'il suffit, à l'aide de la continuité des trajectoires du mouvement Brownien, de démontrer le théorème pour le processus $\tilde{\alpha}$ restreint à $D_R \times \mathbb{R}_+$, pour tout $R > 0$.

(2.1) Nous montrons tout d'abord l'existence d'une version bicontinue de la famille de martingales : $X_t(y) = \int_0^t \left(dB_u \; ; \; S_0^u(y)\right)$,

où $$S_0^u(y) \equiv \int_0^u ds \; \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2} \; .$$

Nous utilisons pour cela un ensemble d'arguments plus ou moins classiques, présentés dans les sous paragraphes (2.2), (2.3) et (2.4) ci-dessous. L'application proprement dite de ces arguments sera faite en (2.5).

(2.2) Lemme de Garsia : *Soient* p *et* Ψ *deux fonctions strictement croissantes sur* $[0,\infty[$, *telles que* $p(0)=\Psi(0)=0$, et $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$. *Soit* $R > 0$, *et* $f : D_{2R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :*

$$\int_{D_R \times D_R} dx \, dy \; \Psi\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{p(|x-y|)}\right) \leq \Gamma < \infty$$

Alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq 8 \int_0^{2|x-y|} \Psi^{-1}\left(c\frac{\Gamma}{u^4}\right) p(du) \qquad (x,y \in D_R)$$

où c *est une constante universelle.*

(Voir, par exemple, Stroock-Varadhan [8], p. 60, pour cet énoncé).

(2.3) Une conséquence de l'inégalité exponentielle.

Rappelons tout d'abord que, si $(M_t, \, t \geq 0)$ est une martingale locale continue, nulle en 0, et que l'on note $M_t^* = \sup_{s\leq t} |M_s|$ et $(\langle M\rangle_t)$ le processus croissant de M, l'inégalité exponentielle suivante (dite aussi : inégalité de Bernstein) est satisfaite :

pour tout $t \geq 0$, $P(M_t^* \geq x \; ; \; \langle M\rangle_t^{1/2} \leq y) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}\right)$

La proposition suivante est alors une conséquence des inégalités obtenues en [11]

Proposition 1 : *Soient* p *et* q *tels que :* $p,q \in \,]1,\infty[$, *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ *une famille de martingales telle qu'il existe* $\mu > 0$ *pour lequel :*

$$\sup_{i \in I} E[\exp(\mu \langle M_i\rangle_\infty^{q-1})] < \infty$$

Alors, il existe $\gamma > 0$, *ne dépendant que de* μ *et* p, *tel que :*

$$\sup_{i \in I} E[\exp(\gamma (M_i^*)_\infty^{2/p}] < \infty$$

Nous appliquerons cette proposition uniquement dans le cas : $q = 3/2$, $p = 3$, ce qui donne : $q - 1 = 1/2$; $2/p = 2/3$.

(2.4) Une estimation de la mesure d'occupation pour le mouvement brownien plan

On suppose données, dans ce sous-paragraphe, un couple de fonctions de Young conjuguées φ et ψ (la fonction ψ introduite ici n'a, a priori, rien à voir avec la fonction Ψ du lemme (2.2)).

On note $g_t(y) = 1 + \log^+ \frac{t}{|y|^2}$ $(y \neq 0)$;

pour toute fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, et tout $R > 0$, on pose : $h^R(x) = h(x)1_{(|x| < R)}$.

On peut maintenant énoncer la :

Proposition 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *et toute fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, *à support dans* D_R,

on a :
$$E\left[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^n\right] \leq C^n\ n!\ \|f\|_\varphi^n \|g_t^{2R}\|_\psi^n ,$$

où C *désigne une constante universelle.*

Démonstration : Nous ne la ferons que pour $n = 2$, le cas général étant obtenu de la même manière, par application répétée de la propriété de Markov. On a :

$$E\left[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^2\right] = 2E\left[\int_0^t ds\ f(B_s) \int_s^t du\ f(B_u)\right]$$
$$= 2\ E\left[\int_0^t ds\ f(B_s) \int_{|y| \leq 2R} dy\ f(B_s + y)\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t/|y|^2} \frac{du}{u} \exp(-\frac{1}{2u})\right]$$

L'intégrale en (du) est majorée par $C\ g_t(y)$, et on a donc, par application de l'inégalité de Hölder généralisée :

$$E\left[\left(\int_0^t ds\ f(B_s)\right)^2\right] \leq 2\ E\left[\int_0^t ds\ f(B_s)\right] C\ \|f\|_\varphi \|g_t^{2R}\|_\psi$$
$$\leq 2\ C^2\ \|f\|_\varphi^2\ \|g_t^{2R}\|_\psi^2 \quad \square$$

Remarquons maintenant que, si $\psi_k(x) = \int_0^t \exp(u^k)du$ $(x \geq 0)$,

on a : $\|g_t^{2R}\|_{\psi_k} < \infty$ si, et seulement si : $k \leq 1$.

Dans la suite, on prendra donc $k = 1$; la fonction φ_1, conjuguée de ψ_1, est :

$$\varphi_1(u) = \int_0^u dx\ \log(1 + x) .$$

Nous aurons besoin dans la suite d'estimer $\|f\|_{\varphi_1}$, pour $f = f^R_{x,y}$, avec :

$$f^R_{x,y}(\xi) = \frac{1}{|\xi-x|\,|\xi-y|}\,1_{(|\xi| \leq R)}\ , \text{ et } |x|,|y| \leq \frac{R}{2}\ .$$

Remarquons pour cela que l'on a, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, borélienne, et toute fonction de Young φ, l'estimation grossière :

$$\|f\|_\varphi \leq \sup\{1\ ;\ \int dx\ \varphi\big(f(x)\big)\} \leq 1 + \int dx\ \varphi\big(f(x)\big)\ .$$

Il s'agit donc d'évaluer :

$$\int_{|\xi| \leq R} d\xi\ \frac{1}{|\xi-x|\,|\xi-y|}\ \log\Big(1 + \frac{1}{|\xi-x|\,|\xi-y|}\Big)\ .$$

Cette intégrale est majorée, lorsque $|x|,\ |y| \leq \frac{R}{2}$, par :

$$\int_{|\xi| \leq \frac{3R}{2}} d\xi\ \frac{1}{|\xi|\,|\xi-\theta|}\ \log\Big(1 + \frac{1}{|\xi|\,|\xi-\theta|}\Big),\ \text{où}\ \ \theta = (x-y)\ .$$

$$= \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\,|\eta-1|}\ \log\Big(1 + \frac{1}{|\theta|^2\,|\eta|\,|\eta-1|}\Big)$$

$$\leq \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\,|\eta-1|}\ \Big\{\log\Big(1 + \frac{1}{|\theta|^2}\Big) + \log\Big(1 + \frac{1}{|\eta|\,|\eta-1|}\Big)\Big\}$$

(à l'aide de l'inégalité : $1 + ab \leq (1+a)(1+b)$)

$$\leq C + \log\Big(1 + \frac{1}{|\theta|^2}\Big)\ .\ \int_{|\eta| \leq \frac{3R}{2|\theta|}} d\eta\ \frac{1}{|\eta|\,|\eta-1|} = O\Big(\big(\log\frac{1}{|\theta|}\big)^2\Big)\quad (\theta \to 0)\ .$$

Résumons ces remarques par l'énoncé suivant :

<u>Proposition 3</u> : *Soient* x,y *et* R *tels que :* $|x|,\ |y| \leq \frac{R}{2}$

Posons : $f^R_{x,y}(\xi) = \frac{1}{|\xi-x|\,|\xi-y|}\,1_{(|\xi| \leq R)}$. *On a alors :*

$$\|f^R_{x,y}\|_{\varphi_1} \leq \frac{1}{h(|x-y|)}\ ,$$ *avec* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *fonction croissante continue,*

et $\frac{1}{h(r)} = O\Big(\big(\log\frac{1}{r}\big)^2\Big)\quad (r \to 0)$.

(2.5) Nous supposons ici : $|x|,\ |y| \leq R$ et on veut appliquer la *proposition 1* à

$$M_{x,y}(t) = \frac{1}{|x-y|}\Big(X_t(x) - X_t(y)\Big)$$

Pour simplifier les notations, on écrira seulement M pour $M_{x,y}$.

Remarquons que l'on a (avec les notations de (2.1)) :

$$\langle M\rangle_t = \frac{1}{|x-y|^2}\int_0^t du\ |S_0^u(y) - S_0^u(x)|^2 .$$

Or, on peut écrire : $$S_0^u(y) = \int_0^u ds \frac{1}{\overline{B_u - B_s} - y}$$

(si $\xi = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$, on note : $\overline{\xi} = a - ib$),

et donc :

$$|S_0^u(y) - S_0^u(x)| \le |x-y| \int_0^u \frac{ds}{|B_u-B_s-y|\ |B_u-B_s-x|} ,$$

ce qui entraîne, après avoir décomposé (ds) en : $ds\ 1_{(|B_u-B_s|\le 2R)} + ds\ 1_{(|B_u-B_s|>2R)}$:

$$|S_0^u(y) - S_0^u(x)| \le |x-y| \int_0^u ds\ \{f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s) + \frac{1}{R^2}\} ,$$

avec $$f_{x,y}^{2R}(\xi) = \frac{1}{|\xi-y|\ |\xi-x|}\ 1_{(|\xi|\le 2R)} .$$

On a donc : $$\langle M\rangle_t \le \frac{t}{R^4} + \int_0^t du\left(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s)\right)^2 ,$$

d'où l'on déduit :

$$E[\exp(\mu \langle M\rangle_t^{1/2})] \le \exp(\mu \frac{\sqrt{t}}{R^2})\ E[\exp \mu \left(\int_0^t du(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s))^2\right)^{1/2}] .$$

On obtient ensuite, en développant la fonction exponentielle en série :

$$\text{(2.a)}\qquad E[\exp(\mu\langle M\rangle_t^{1/2})] \le \exp(\frac{\mu\sqrt{t}}{R^2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} E[\left(\int_0^t du(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}] .$$

• <u>Pour tout $n \ge 2$</u>, on majore l'expression $E[\left(\int_0^t du(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}]$

par : $$t^{n/2}\ E[\left(\frac{1}{t}\int_0^t du(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s))^2\right)^{n/2}]$$

$$\le t^{n/2}\ E[\frac{1}{t}\int_0^t du\left(\int_0^u ds\ f_{x,y}^{2R}(B_u-B_s)\right)^n]$$

$$=t^{\frac{n}{2}-1}\int_0^t du\, E\Big[\Big(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s)\Big)^n\Big] \le t^{n/2}\, E\Big[\Big(\int_0^t ds\, f^{2R}_{x,y}(B_s)\Big)^n\Big] \le t^{n/2}\, \|f^{2R}_{x,y}\|^n_{\varphi_1}\, \|g^{2R}\|^n_{\psi_1}\, C^n n!$$

avec les notations de la *proposition 2* ci-dessus.

. Pour $n = 1$, on majore l'expression : $E\Big[\Big(\int_0^t du\Big(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s)\Big)^2\Big)^{1/2}\Big]$

à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par :

$$E\Big[\int_0^t du\Big(\int_0^u ds\, f^{2R}_{x,y}(B_u-B_s)\Big)^2\Big]^{1/2} \le \sqrt{t}\, E\Big[\Big(\int_0^t ds\, f^{2R}_{x,y}(B_s)\Big)^2\Big]^{1/2}$$

$$\le \sqrt{2}\cdot\sqrt{t}\, C\, \|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1}\, \|g^{2R}\|_{\psi_1} ,$$

toujours d'après la *proposition 2*.

Finalement, on obtient, en reportant ces inégalités en *(2.a)* :

$$E[\exp \mu\langle M\rangle_t^{1/2}] \le \exp\Big(\mu \frac{\sqrt{t}}{R^2}\Big)\cdot\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n t^{n/2}\big(\|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1}\, \|g^{2R}\|_{\psi_1}\, C\big)^n .$$

$$\le \frac{2\exp\big(\mu \frac{\sqrt{t}}{R^2}\big)}{1-\mu\sqrt{t}\, \|f^{2R}_{x,y}\|_{\varphi_1}\, \|g^{2R}\|_{\psi_1} C} ,$$

et donc, en utilisant les notations de la *proposition 3*, et en changeant μ en $\mu\, h(|x-y|)$:

$$\sup_{|x|,|y|\le R} E[\exp(\mu\, h(|x-y|)\, \langle M\rangle_t^{1/2})] < \infty ,$$

pour μ suffisamment petit (dépendant de R et t seulement).
On déduit alors de la *proposition 1* que :

$$\sup_{|x|,|y|\le R} E\Big[\exp \nu \Big(h(|x-y|)\, M^*_t\Big)^{2/3}\Big] < \infty$$

pour ν suffisamment petit.

On remarque maintenant, à l'aide du lemme de Kolmogorov classique, des majorations $\frac{x^n}{n!} < \exp(x)$, pour tout n , et de l'inégalité ci-dessus, qu'il existe une version continue de $(X_t(x)\ ;\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^2)$.

On peut maintenant appliquer le *lemme de Garsia* (2.2), avec $\Psi(r) = \exp(\lambda r^{2/3})-1$ pour λ suffisamment petit, et $p(r) = r(\log \frac{1}{r})^2$, ce qui va nous permettre de préciser le module de continuité de $X_t(\cdot)$.

En effet, pour une constante $\lambda > 0$, ne dépendant que de R et t, la variable

$$\Gamma \equiv \int_{D_R \times D_R} dx\, dy\, [\exp \lambda\left(\frac{\sup_{s\leq t} |X_s(x) - X_s(y)|}{p(|x-y|)}\right)^{2/3} - 1]$$

est intégrable, et donc finie p.s.

On en déduit, d'après le *lemme de Garsia* :

$$\sup_{\substack{s\leq t \\ x,y \in D_{R/2}}} |X_s(x) - X_s(y)| \leq C_{R,t} \int_0^{2|x-y|} \left(\log(1 + \frac{c\Gamma}{u^4})\right)^{3/2} p(du)$$

où $C_{R,t}$ est une constante ne dépendant que de R et t.

Cette dernière inégalité entraîne, pour le processus $(X_s(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^2,\ s \geq 0)$, le résultat énoncé dans le théorème, lorsque l'on remplace $\tilde{\alpha}$ par X.

(2.6) Pour terminer l'étude de la continuité de $(\tilde{\alpha}(y\ ;\ t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0)$ il nous reste, en vertu de la formule *(1.b)*, à préciser le module de continuité de l'expression : $L_t(z) = \int_0^t ds \log |B_s - z| \quad (z \in \mathbb{C})$.

Soient $y, z \in \mathbb{C}$. Posons $m(u) = |uy + (1-u)z - B_s| \quad (u \in [0,1])$

On a :

$$\log|y-B_s| - \log|z-B_s| = \int_0^1 du\, \frac{1}{m(u)}\, \frac{m'(u)\cdot m(u)}{m(u)},$$

d'où l'on déduit :

$$\sup_{s\leq t} |L_s(y) - L_s(z)| \leq \int_0^t ds \int_0^1 du\, \frac{|y-z|}{|uy + (1-u)z - B_s|}$$

Posons maintenant $\Psi(x) = \exp(x^2) - 1 \quad (x \geq 0)$.

Rappelons que, si $\xi \in \mathbb{C}$, il existe un mouvement brownien réel $(\beta_t(\xi)\ ;\ t \geq 0)$ tel que :

$$|B_t - \xi| = |\xi| + \beta_t(\xi) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|}$$

On déduit de cette identité que l'on a, pour tout $t > 0$, fixé :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{C}} \left\| \int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|} \right\|_\Psi < \infty$$

En conséquence, on a :

$$\sup_{\substack{y,z \in \mathbb{C} \\ y \neq z}} \left\| \sup_{s \leq t} \frac{|L_s(y) - L_s(z)|}{|y - z|} \right\|_\psi \leq \sup_{y,z \in \mathbb{C}} \int_0^1 du \left\| \int_0^t \frac{ds}{|uy + (1-u)z - B_s|} \right\|_\psi$$

$$\leq \sup_{\xi \in \mathbb{C}} \left\| \int_0^t \frac{ds}{|B_s - \xi|} \right\| < \infty$$

Finalement, on déduit du lemme de Garsia que pour tous R et t fixés, il existe $\delta > 0$ et une variable $C(\omega) > 0$ tels que :

pour $y,z \in D_R$, et $|y-z| < \delta$, $\sup_{s \leq t} |L_s(y) - L_s(z)| \leq C_\omega |y-z| (\log \frac{1}{|y-z|})^{1/2}$

(2.7) En rassemblant les résultats obtenus en (2.5) et (2.6), on a complètement démontré le théorème.

Nota Bene : Dans l'article de Garsia intitulé :

Continuity properties of Gaussian processes with multidimensional time parameter (Sixth Berkeley Symposium ; vol II (1970)) une version du lemme (2.2) est démontrée sous l'hypothèse supplémentaire : Ψ est convexe. Cette hypothèse n'est pas nécessaire ; voir Stroock - Varadhan [8], ou même : Garsia - Rodemich - Rumsey (Indiana Math. Journal, 20, 565-578 (1970)). Elle permet cependant à Garsia des simplications importantes de la démonstration d'origine.
En tout cas, l'application du lemme (2.2) à $\Psi(r) = \exp(\lambda r^{2/3}) - 1$ est bien licite.

REFERENCES

[1] E.B. Dynkin : Self-intersection local times, occupation fields and stochastic integrals. Preprint (1985).

[2] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba 12, 86-107, 1984.

[3] J.F. Le Gall : Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Maths 1123. Springer (1985).

[4] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probas X. Lect. Notes in Maths 511. Springer (1976).

[5] J. Rosen : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Comm. in Math. Physics. 88, 327-338 (1983).

[6] J. Rosen : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Ann. of Prob. To appear.

[7] J. Rosen : A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. This volume.

[8] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan : Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag (1979).

[9] M. Yor : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Maths. 1123. Springer (1985).

[10] M. Yor : Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Dans ce volume.

[11] M. Yor : Burkholder-Gundy type inequalities for Brownian motion, and non-moderate increasing functions. To appear.

Je remercie vivement J.F. Le Gall dont la stimulation est pour beaucoup dans l'existence de ce travail.