SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 447-464
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__447_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE APPROCHE ELEMENTAIRE DES THEOREMES DE DECOMPOSITION DE WILLIAMS.

J.F. LE GALL (*)

0. *Introduction.*

Les liens étroits qui unissent mouvement brownien réel et processus de Bessel de dimension trois ont été étudiés notamment par Itô-Mc Kean [5], Williams [22], [23] et Pitman [14]. L'existence de ces liens est partiellement expliquée par l'observation suivante due à Mc Kean [11] en suivant les idées de Doob [2] : le processus de Bessel de dimension trois peut être défini comme le mouvement brownien réel "conditionné à converger vers $+\infty$ avant de revenir en 0". Il se trouve que le processus ainsi obtenu est aussi la norme d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les deux théorèmes fondamentaux qui relient mouvement brownien réel et processus de Bessel de dimension trois sont les suivants ; $B = (B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel issu de 0 et $R = (R_t, t \geq 0)$ un processus de Bessel de dimension trois, également issu de 0.

(A) Théorème de retournement de Williams [22].

Si $T = \inf\{t \; ; \; B_t = 1\}$ et $L = \sup\{t \; ; \; R_t = 1\}$, les processus $(1-B_{T-t} \; ; \; 0 \leq t \leq T)$ et $(R_t \; ; \; 0 \leq t \leq L)$ ont même loi.

(B) Théorème de Pitman [14]. Si $S_t = \sup\{B_s \; ; \; s \leq t\}$ et $I_t = \inf\{R_s ; s \geq t\}$, les processus $(S_t, S_t - B_t \; ; \; t \geq 0)$ et $(I_t, R_t - I_t \; ; \; t \geq 0)$ ont même loi.

Le théorème de Pitman est souvent énoncé sous la forme un peu plus faible suivante : $(2S_t - B_t \; ; \; t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension trois issu de 0. Les théorèmes (A) et (B) sont très liés aux théorèmes de décomposition des trajectoires établis par Williams [22], [23] ainsi qu'à la décomposition de la mesure d'Itô des excursions due à Williams ([24], p. 98, voir aussi Rogers [18]). L'objet du présent travail est de donner une démonstration élémentaire de l'ensemble de ces résultats, qui permette aussi de bien comprendre le rôle joué par le

(*) *UNIVERSITE P. et M. CURIE - Laboratoire de Calcul des Probabilités*
4, Place Jussieu - F-75252 PARIS CEDEX 05 - FRANCE

processus de Bessel de dimension trois. Notre méthode repose sur une approximation des processus par des chaines de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La chaine de Markov associée au mouvement brownien réel est simplement le jeu de pile ou face standard. La chaine de Markov associée au processus de Bessel de dimension trois est décrite dans la partie 1 ; c'est celle qu'avait introduite Pitman [14] pour établir le théorème (B). Cependant notre méthode est assez différente de celle de Pitman : nous commençons par établir une représentation des trajectoires des deux chaines de Markov considérées au moyen d'un arbre infini ; ensuite on obtient aisément les théorèmes (A) et (B), ou plus exactement leurs analogues discrets, en comparant les structures des arbres associés respectivement au mouvement brownien réel et au processus de Bessel de dimension trois. Dans la partie 4 nous appliquons nos méthodes aux divers théorèmes de décomposition de Williams. Notre représentation "en arbre" est très liée aux fameux théorèmes de Ray et Knight [8], [17] concernant la structure des temps locaux du mouvement brownien réel. Le passage du discret au continu se fait ici au moyen de théorèmes limites généraux pour les processus de branchement avec immigration, établis par Kawazu et Watanabe [7]. Ces résultats sont développés dans la partie 5.

Les démonstrations originales des théorèmes de décomposition de Williams [23] reposent sur des calculs de lois explicites, qui ne facilitent guère une bonne compréhension intuitive des résultats. Une approche utilisant la théorie du grossissement de filtrations a été proposée par Jeulin [6], qui retrouve aussi le théorème de Pitman. Une autre approche de ces résultats, basée sur la théorie des excursions, se trouve dans le livre d'Ikeda et Watanabe [4] . Pitman et Rogers [15] ont donné une démonstration simple du théorème (B), à l'aide d'un critère général pour qu'une fonction d'un processus de Markov reste un processus de Markov. Le principal avantage de l'utilisation de processus discrets est que tous les conditionnements deviennent faciles. On obtient très aisément, sans aucun calcul, les analogues discrets des théorèmes (A) et (B) et des théorèmes de décomposition de Williams. L'inconvénient de cette approche est que, pour obtenir les versions "continues" de ces résultats, il est ensuite nécessaire de passer à la limite. Cependant, une fois établis les résultats généraux d'approximation (proposition 1.2), ces passages à la limite ne présentent aucune difficulté.

1. *Description des processus.*

Nous utiliserons l'espace canonique $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu produit. $X = (X_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ désigne le processus canonique. On note $(P_x \; ; \; x \in \mathbb{Z})$ la famille de probabilités sur Ω qui fait de X un jeu de pile ou face standard. Soit $(Q_x \; ; \; x \in \mathbb{N})$ l'unique famille de probabilités telle que (X_n, Q_x) soit une chaine de Markov avec probabilités de transition :

• $Q_0[X_1 = 1] = 1$

• si $x \geq 1$, $Q_x[X_1 = x+1] = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x}$; $Q_x[X_1 = x-1] = \frac{1}{2}\frac{x-1}{x}$.

Cette définition est motivée par le fait qu'on peut "plonger" une chaine de Markov de loi Q dans la trajectoire d'un processus de Bessel de dimension trois : voir la preuve de la proposition 1.2. Ceci explique aussi le résultat du lemme 1.1 ci-dessous.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$\sigma(x) = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n = x\}$$

$$\tau(x) = \inf\{n > 0 \ ; \ X_n = x\},$$

avec les conventions habituelles pour $\inf \emptyset$, $\sup \emptyset$.

Lemme 1.1 : *Pour tout* $x \geq 1$, $(1/X_{n\wedge\sigma(1)} \ ; \ n \geq 0)$ *est une* Q_x*-martingale.*

Le résultat du lemme découle d'un calcul immédiat. Le lemme entraîne en particulier :

$$Q_x[\sigma(1) < \infty] = \lim_{p\to\infty} Q_x[1/X_{\sigma(p)\wedge\sigma(1)}] = 1/x$$

et plus généralement, si $1 \leq b \leq x$,

$$Q_x[\sigma(b) < \infty] = b/x.$$

On en déduit aisément que : $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$, Q_x p.s.

Proposition 1.2 : *Pour* $n \geq 1$ *et* $t \geq 0$ *soit* $Y_t^n = n^{-1/2} X_{[nt]}$, *où* $[u]$ *désigne la partie entière de* u. *Alors :*

a) la suite des lois de $(Y_t^n \ ; \ t \geq 0)$ *sous* P_0 *converge vers la loi du mouvement brownien réel issu de* 0 *;*

b) la suite des lois de $(Y_t^n \ ; \ t \geq 0)$ *sous* Q_0 *converge vers la loi du processus de Bessel de dimension trois issu de* 0.

Preuve : L'assertion a) est un cas particulier du théorème d'invariance de Donsker (voir par exemple Billingsley [1]). Comme le remarque Pitman [14], l'assertion b) découle d'un résultat général de Lamperti [9] concernant l'approximation des diffusions par des chaines de Markov. On peut aussi procéder par plongement, de la manière suivante. On considère un processus de Bessel de dimension trois issu de 0,

i.e. un processus à valeurs positives $(R_t\ ;\ t \geq 0)$ solution de l'équation stochastique :

$$R_t = B_t + \int_0^t \frac{ds}{R_s},$$

où B est un mouvement brownien réel issu de 0.

Pour tout $n \geq 1$ on définit par récurrence :

$$T_o^{(n)} = 0$$

$$T_{p+1}^{(n)} = \inf\{t \geq T_p^{(n)}\ ;\ |R(t)-R(T_p^{(n)})| = n^{-1/2}\}.$$

Pour tout $p \geq 0$, soit $U_p^{(n)} = n^{1/2}\, R(T_p^{(n)})$.

On remarque que, pour tout $n \geq 1$, la loi de $U^{(n)}$ est Q_o, et que d'autre part

$$n^{-1/2}\, U_{[nt]}^{(n)} = R(T_{[nt]}^{(n)}).$$

Pour conclure il reste à remarquer que, à cause du fait que $\langle R\rangle_t = t$, on a

$$\lim_{n\to\infty} T_{[nt]}^{(n)} = t,$$

avec convergence en probabilité. Une manière simple d'obtenir ce résultat consiste à écrire, pour tout p,

$$(R(T_{p+1}^{(n)}\wedge t) - R(T_p^{(n)}\wedge t))^2 = 2\int_{T_p^{(n)}\wedge t}^{T_{p+1}^{(n)}\wedge t} (R(u) - R(T_p^{(n)}\wedge t))dR(u) + (T_{p+1}^{(n)}\wedge t - T_p^{(n)}\wedge t).$$

En sommant sur p, il vient :

$$n^{-1}|\{p\ ;\ T_p^{(n)} \leq t\}| = 2\int_0^t H^n(u)dR(u) + t + \varepsilon(n,t)$$

où H^n est un processus prévisible vérifiant $|H^n| \leq n^{-1/2}$, et $|\varepsilon(n,t)| \leq n^{-1}$.

Cela entraîne :

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}|\{p, T_p^{(n)} \leq t\}| = t,$$

d'où aisément le résultat voulu. □

2. Etude de la chaine de Markov (X_n, Q_x).

La proposition ci-dessous est à la base des résultats que nous obtiendrons dans la suite. Il s'agit évidemment d'un cas très particulier de la notion de h-processus, mais nous adoptons ici un point de vue élémentaire et nous donnerons donc une preuve complète.

Proposition 2.1 : *Soient* $p,q \in \mathbb{N}$ *avec* $p < q$. *La loi de* $(X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q))$ *sous* Q_p *coïncide avec celle de* $(X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q))$ *sous* P_p, *conditionnellement à* $\{\sigma(q) < \tau(0)\}$.

Preuve : Soit Q^* la loi de $(X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q)$ sous P_p conditionnellement à $\{\sigma(q) < \tau(0)\}$. Soient $n \geq 1$ et f,g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^n$. Alors,

$$Q^*[g(X_1,\ldots,X_n)\, f(X_{n+1})\, 1_{(n < \sigma(q))}]$$

$$= \frac{q}{p} P_p[g(X_1,\ldots,X_n)\, f(X_{n+1})\, 1_{(n < \sigma(q) < \tau(0))}]$$

$$= \frac{q}{p} P_p[g(X_1,\ldots,X_n)\, 1_{(n < \sigma(q))}\, 1_{(n < \tau(0))}$$

$$\times P_{X_n}[f(X_1)\, 1_{(\sigma(q) < \tau(0))}]]$$

$$= \frac{q}{p} P_p[g(X_1,\ldots,X_n)\, 1_{(n < \sigma(q))}\, 1_{(n < \tau(0))}$$

$$\times \frac{1}{2}\left(f(X_n + 1)\frac{X_n+1}{q} + f(X_n-1)\frac{X_n-1}{q}\right)]$$

$$= \frac{q}{p} P_p[g(X_1,\ldots,X_n)\, 1_{(n < \sigma(q) < \tau(0))}$$

$$\times \frac{1}{2}\left(f(X_n + 1)\frac{X_n+1}{X_n} + f(X_n - 1)\frac{X_n-1}{X_n}\right)]$$

$$= Q^*[g(X_1,\ldots,X_n)\, \frac{1}{2}\left(f(X_n + 1)\frac{X_n+1}{X_n} + f(X_n - 1)\frac{X_n-1}{X_n}\right) 1_{(n < \sigma(p))}]$$

ce qui montre que sous Q^* le processus canonique est une chaine de Markov avec les mêmes probabilités de transition que sous Q_p. □

On déduit de la proposition 2.1 deux corollaires très importants sur la structure des trajectoires de la chaine (X_n, Q_x).

Corollaire 2.2 : *Les lois sous* Q_0 *des processus* $(X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(p))$ *et* $(p - X_{\sigma(p)-n} \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(p)$ *coïncident.*

Preuve : Soient $m \geq 1$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ m variables de Bernoulli standard indépendantes. D'après la proposition 2.1 la loi sous Q_0 de $(X_n - X_{n-1} \; ; \; 1 \leq n \leq m)$ conditionnellement à $\{\sigma(p) = m\}$ est aussi la loi de $(Y_1, \ldots, Y_m)$ conditionnellement à :

$$\{0 < Y_1 + \ldots + Y_k < p, \text{ pour tout } 1 \leq k \leq m-1 \; ; \; Y_1 + \ldots + Y_m = p\}.$$

Pour des raisons de symétrie évidentes cette loi coïncide encore avec la loi de $(Y_m, \ldots, Y_1)$ conditionnellement au même évènement, qui n'est autre que la loi sous Q_0 de $(X_{m-n+1} - X_{m-n} \; ; \; 1 \leq n \leq m)$ conditionnellement à $\{\sigma(p) = m\}$. □

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, soit $\lambda(p) = \sup\{n \geq 0 \; ; \; X_n = p\}$.

Corollaire 2.3 : *Soit* $p \geq 0$. *La loi sous* Q_0 *de* $(X_{\lambda(p)+n} - p \; ; \; n \geq 0)$ *est* Q_0.

Preuve : Il suffit de traiter le cas $p = 1$. Pour tout $q \geq 2$ posons :

$$\lambda^q(1) = \sup\{n \leq \sigma(q) \; ; \; X_n = 1\}.$$

En utilisant deux fois le corollaire 2.2 on trouve que, sous Q_0,

$$(X_{\lambda^q(1)+n} - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q) - \lambda^q(1))$$

$$\overset{(d)}{=} (X_{\sigma(q-1)} - X_{\sigma(q-1)-n} \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q-1))$$

$$\overset{(d)}{=} (X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(q-1)),$$

d'où le résultat voulu en faisant tendre q vers ∞. □

Remarque : Soient R un processus de Bessel de dimension trois issu de 0, $r > 0$ et $T_r = \inf\{t \geq 0 \; ; \; R_t = r\}$, $L_r = \sup\{t \geq 0 \; ; \; R_t = r\}$. En utilisant la proposition 1.2 et les corollaires 2.2 et 2.3 on trouve que, d'une part les processus

$(R_t \; ; \; 0 \leq t \leq T_r)$ et $(r - R_{T_r - t} \; ; \; 0 \leq t \leq T_r)$ ont même loi, d'autre part le processus $(R_{L_r + t'} - r \; ; \; t \geq 0)$ a même loi que R.

Remarquons qu'il n'est pas immédiat de donner une preuve directe de ces deux résultats.

Avant d'énoncer la proposition suivante nous devons introduire la mesure d'excursion $\mathcal{M}$ de la marche aléatoire standard : $\mathcal{M}$ est par définition la loi sous P_0 de $(|X_n| \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(0))$ ($\mathcal{M}$ est une probabilité sur l'espace des trajectoires tuées après un temps fini).

<u>*Proposition 2.4*</u> : *Soient* $\tau_0, \tau_1, \ldots$ *les instants de passage successifs de* X *en* 1 :

$$\tau_0 = \sigma(1)$$

$$\tau_{p+1} = \inf\{n > \tau_p \; ; \; X_n = 1\}.$$

Soit $N = \sup\{p \; ; \; \tau_p < \infty\}$. *Alors, sous* Q_0;

a) N *suit une loi géométrique de paramètre* $\frac{1}{2}$,

b) conditionnellement à $\{N = k\}$, *les processus* $(X_{\tau_{i-1}+n} - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \tau_i - \tau_{i-1})$, *pour* $1 \leq i \leq k$, *sont indépendants de même loi* $\mathcal{M}$.

<u>Preuve</u> : L'assertion a) découle aisément du lemme 1.1 et de la propriété de Markov. Pour b), il suffit de montrer que la loi sous Q_1, conditionnellement à $\{\tau(1) < \infty\}$, de $(X_n - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(1))$ est $\mathcal{M}$. Soient $p \geq 2$ et F une fonction, définie sur l'espace des trajectoires tuées, dépendant d'un nombre fini de coordonnées :

$$Q_1[F(X_n - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(1)) \, 1_{(\tau(1) < \sigma(p))}]$$

$$= p \, P_1[F(X_n - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(1)) \, 1_{(\tau(1) < \sigma(p) < \tau(0))}]$$

$$= P_1[F(X_n - 1 \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(1)) \, 1_{(\tau(1) < \sigma(p))} \, 1_{(\tau(1) < \tau(0))}]$$

$$= 2 \, P_0[F(|X_n| \; ; \; 0 \leq n \leq \tau(0)) \, 1_{(\tau(0) < \sigma(p-1))}],$$

où pour la première égalité on a utilisé la proposition 1.2.
On obtient le résultat voulu en faisant tendre p vers l'infini. □

3. *Représentation des trajectoires à l'aide de la notion d'arbre.*

Nous nous proposons dans cette partie de représenter les trajectoires de X sous $\mathcal{M}$, Q_0 et P_0 par des arbres (aléatoires) dont nous décrirons la structure probabiliste. L'idée d'associer à l'excursion d'une marche aléatoire standard un processus de branchement se trouve dans l'article de Dwass [3], et est aussi implicite dans Kawazu et Watanabe [7]. Neveu [13] a remarqué qu'on peut établir une correspondance bijective, préservant la mesure, entre les trajectoires de X sous $\mathcal{M}$ et les arbres associés à un processus de Galton Watson géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ (voir [12] pour les liens entre arbres et processus de branchement). Cette correspondance est illustrée par la figure ci-dessous.

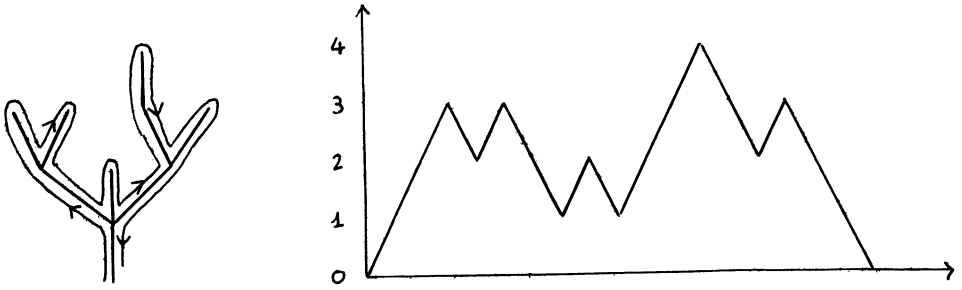

Figure 0

La structure probabiliste de l'arbre de la figure 0 est la suivante. L'arbre comprend d'abord un segment de base joignant deux points d'ordonnées respectives 0 et 1. Ce segment donne naissance à un nombre géométrique, de paramètre $\frac{1}{2}$, de segments joignant chacun des points d'ordonnées 1 et 2. Chacun de ces nouveaux segments donne naissance à un nombre géométrique, de paramètre $\frac{1}{2}$, de segments joignant des points d'ordonnées 2 et 3, et ainsi de suite (toutes les variables géométriques qui interviennent sont supposées indépendantes). Les coordonnées horizontales des points de l'arbre n'ont pas d'importance. On obtient la correspondance arbre-trajectoire en considérant l'ordonnée d'un point qui se déplace le long de l'arbre, en montant et descendant les branches. Le fait que cette correspondance préserve la mesure résulte de la remarque simple suivante : à cause des propriétés de la loi géométrique, la probabilité pour qu'étant arrivé en un point de l'arbre on se trouve face à une branche montante est toujours $\frac{1}{2}$, indépendamment du trajet

effectué auparavant.

En combinant le corollaire 2.3 et la proposition 2.4 on obtient la représentation des trajectoires de X sous Q_o suggérée par la figure 1 :

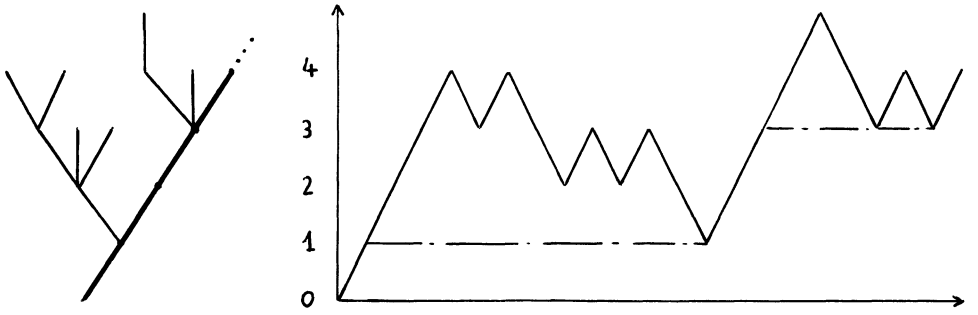

Figure 1

L'arbre de la figure 1 comprend un "tronc principal" commençant en un point d'ordonnée 0 et comportant des "noeuds" aux points d'ordonnées $1,2,\ldots$. Sur chacun de ces noeuds vient se greffer un nombre géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ de branches secondaires indépendantes qui ont chacune la loi de l'arbre de la figure 0. La correspondance arbre-trajectoire est la même que précédemment. Le tronc principal correspond sur la trajectoire aux instants de croissance de $\inf\{X_k \; ; \; k \geq n\}$.

On obtient aisément une représentation analogue pour les trajectoires de X sous P_o (voir la figure 2). L'idée est que le tronc principal correspond maintenant aux instants de croissance de $\sup\{X_k \; ; \; k \leq n\}$, et les branches secondaires aux excursions "sous le maximum". La structure probabiliste de l'arbre reste la même que pour Q_o, à ceci près que les branches secondaires viennent maintenant se greffer sous le tronc principal, <u>et aussi</u> qu'il peut se greffer des branches secondaires au niveau 0.

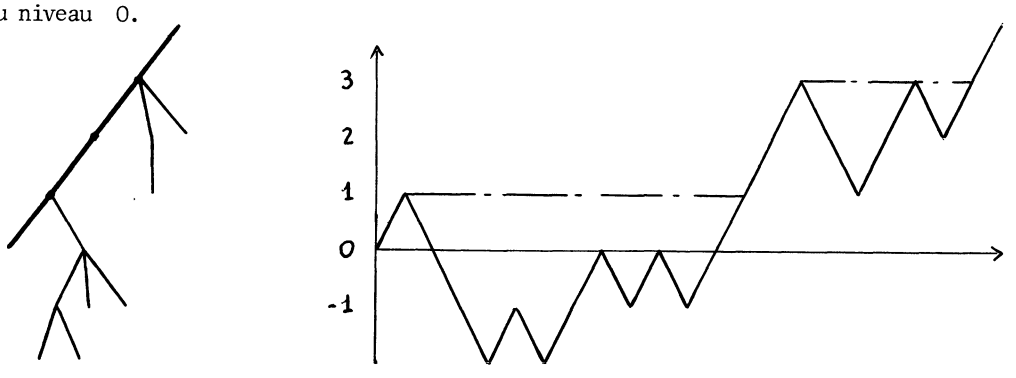

Figure 2

Il existe deux transformations simples qui font passer de l'arbre de la figure 1 à celui de la figure 2. D'une part on peut simplement faire une symétrie par rapport au tronc principal, en prenant alors garde au fait que l'arbre de la figure 1 ne possède pas de branches secondaires au niveau 0. D'autre part on peut d'abord tronquer l'arbre de la figure 1 au niveau d'un point du tronc principal, puis le retourner, ce qui a pour effet de faire passer les branches secondaires sous le tronc principal. Ces deux transformations conduisent aux analogues discrets des théorèmes (A) et (B) de l'introduction.

Théorème 3.1 : *Pour tout* $n \geq 0$ *soient* $S_n = \sup\{X_k \; ; \; k \leq n\}$ *et* $I_n = \inf\{X_k \; ; \; k \geq n\}$. *La loi de* $(X_n - I_n, I_n \; ; \; n \geq 0)$ *sous* Q_0 *coïncide avec celle de* $(S_n - X_n, S_n \; ; \; n \geq 0)$ *sous* P_0 *conditionnellement à* $\{X_1 = 1\}$.

Théorème 3.2 : *Soit* $p \geq 1$. *La loi de* $(p - X_{\lambda(p)-n} \; ; \; 0 \leq n \leq \lambda(p))$ *sous* Q_0 *coïncide avec celle de* $(X_n \; ; \; 0 \leq n \leq \sigma(p))$ *sous* P_0.

Remarques :

(i) Le conditionnement par rapport à $\{X_1 = 1\}$ disparaît dans la version continue du théorème 3.1.

(ii) La notion d'arbre n'est pas indispensable à notre approche des théorèmes 3.1 et 3.2. Cependant il nous semble qu'elle permet une meilleure compréhension intuitive de ces deux résultats. De plus le fait que ces arbres soient associés naturellement à des processus de branchement conduira dans la partie 5 à une interprétation simple des théorèmes de Ray-Knight.

4. *Théorèmes de décomposition de trajectoires.*

Nous commençons par un résultat de décomposition au minimum sous Q_p $(p \geq 1)$, qui est l'analogue discret d'un théorème de Williams [23].

Théorème 4.1 : *Soient* $m = \inf\{X_k \; ; \; k \geq 0\}$ *et* $\gamma = \inf\{k \; ; \; X_k = m\}$. *Alors, pour tout* $h \geq 1$, *sous* Q_h,

(*i*) *les processus* $(X_k \; ; \; 0 \leq k \leq \gamma)$ *et* $(X_{\gamma+k} - m+1 \; ; \; k \geq 0)$ *sont indépendants, le second ayant pour loi* Q_1 ;

(ii) m suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,h\}$ et conditionnellement à $\{m = j\}$, le processus $(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \gamma)$ a même loi que $(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \sigma(j))$ sous P_h.

Preuve : Soient $p > h$ et :

$$m_p = \inf\{X_k\ ;\ k \leq \sigma(p)\}$$

$$\gamma_p = \inf\{k \geq 0\ ;\ X_k = m_p\}.$$

Soient $j \in \{1,\dots,h\}$ et F,G deux fonctions, définies sur l'espace des trajectoires tuées, dépendant d'un nombre fini de coordonnées. On a :

$$Q_h[F(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \sigma(j))G(X_{\sigma(j)+k} - j+1\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p) - \sigma(j))\ 1_{(m_p=j)}]$$

$$= \frac{p}{h} P_h[F(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \sigma(j))$$

$$\times G(X_{\sigma(j)+k} - j+1\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p) - \sigma(j))1_{(m_p=j)}]$$

$$= \frac{p}{h} P_h[F(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \sigma(j))\ 1_{(\sigma(j) < \sigma(p))}]$$

$$\times P_j[G(X_k - j+1\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p))\ 1_{(\sigma(p) < \sigma(j-1))}]$$

$$= \frac{1}{h}\frac{p}{p-j+1} P_h[F(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \sigma(j))\ 1_{(\sigma(j) < \sigma(p))}]$$

$$\times Q_1[G(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p-j+1))],$$

où nous avons utilisé deux fois la proposition 1.2. On obtient le théorème en faisant tendre p vers l'infini. □

Corollaire 4.2 : Soient $p \geq 1$ et :

$$\eta = \sup\{k \leq \sigma(p)\ ;\ X_k = 0\}$$

$$m = \sup\{X_k\ ;\ k \leq \eta\}$$

$$\gamma = \inf\{k \geq 0\ ;\ X_k = m\}.$$

Alors, sous P_0,

(i) les processus $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \eta)$ *et* $(X_{\eta+k}\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p) - \eta)$ *sont indépendants, le second ayant la loi de* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p))$ *sous* Q_0 *;*

(ii) m *suit une loi uniforme sur* $\{0,\ldots,p-1\}$ *;*

(iii) conditionnellement à $\{m = j\}$ *les processus* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \gamma)$ *et* $(X_{\eta-k}\ ;\ 0 \leq k \leq \eta-\gamma)$ *sont indépendants, le premier a la loi de* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(j))$ *sous* P_0 *et le second la loi de* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(j+1)-1)$ *sous* P_0.

Preuve : En utilisant le théorème 3.2 pour "retourner le temps" en $\sigma(p)$ on est ramené à la preuve d'un résultat similaire concernant la loi de $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \lambda(p))$ sous Q_0. L'assertion (i) découle alors de la propriété de Markov au temps $\sigma(p)$ et du corollaire 2.2. Pour établir (ii) et (iii) on applique le théorème 4.1 qui permet de décomposer la trajectoire de $(X_n\ ;\ 0 \leq n \leq \lambda(p))$ sous Q_p. □

Des manipulations très semblables à celle de la preuve du théorème 4.1 conduisent aisément au résultat suivant, dont la preuve est laissée au lecteur.

Théorème 4.3 : Soit $m = \sup\{X_k\ ;\ k \geq 0\}$. *Alors* $\mathcal{M}\,[m \geq p] = \frac{1}{p}$. *De plus, sous* $\mathcal{M}$ *conditionnellement à* $\{m = p\}$, *les processus* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p))$ *et* $(X_{\tau(0)-k}\ ;\ 0 \leq k \leq \tau(0) - \sigma(p))$ *sont indépendants, le premier a la loi de* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p))$ *sous* Q_0 *et le second la loi de* $(X_k\ ;\ 0 \leq k \leq \sigma(p+1) - 1)$ *sous* Q_0.

Remarques :

(i) A l'aide de la proposition 1.2 on déduit des théorème 4.1 et corollaire 4.2 les deux résultats suivants dûs à Williams :

Théorème ([23] theorem 3.1) : Soient R *un processus de Bessel de dimension trois issu de* $a > 0$, *et* $I = \inf\{R_s\ ;\ s \geq 0\}$, $T = \inf\{s\ ;\ R_s = I\}$. *Alors,*

(i) les processus $(R_t, 0 \leq t \leq T)$ *et* $(R_{T+t} - I\ ;\ t \geq 0)$ *sont indépendants et le second est un processus de Bessel de dimension trois issu de* 0 *;*

(ii) I *suit une loi uniforme sur* $[0\ ;\ a]$ *et conditionnellement à* $\{I = b\}$, $(R_t, 0 \leq t \leq T)$ *est un mouvement brownien réel issu de* a *arrêté au*

premier instant où il atteint b.

<u>*Corollaire ([23] theorem 3.5)*</u> : *Soient* B *un mouvement brownien réel issu de* 0, *et* $T = \inf\{t \geq 0 \ ; \ B_t = 1\}$, $L = \sup\{s \leq T \ ; \ B_s = 0\}$, $M = \sup\{B_s \ ; \ 0 \leq s \leq L\}$ *et* $S = \inf\{s \geq 0 \ ; \ B_s = M\}$. *Alors,*

(i) les processus $(B_s \ ; \ 0 \leq s \leq L)$ *et* $(B_{L+s} \ ; \ 0 \leq s \leq T-L)$ *sont indépendants et le second est un processus de Bessel de dimension trois, issu de* 0, *arrêté au temps d'atteinte de* 1 ;

(ii) M *suit une loi uniforme sur* $[0 \ ; \ 1]$, *et, conditionnellement à* $\{M = m\}$, *les processus* $(B_s \ ; \ 0 \leq s \leq S)$ *et* $(B_{L-s} \ ; \ 0 \leq s \leq L-S)$ *sont deux mouvements browniens réels indépendants issus de* 0 *arrêtés au temps d'atteinte de* m.

Soulignons que le passage des résultats discrets aux résultats continus ne présente aucune difficulté. Esquissons le raisonnement qui permet ce passage, dans le cas du corollaire 4.2. En reprenant les notations de ce corollaire on définit quatre processus à temps continu, $U^{(p)}, V^{(p)}, W^{(p)}, B^{(p)}$, par :

$$U^{(p)}(t) = p^{-1/2} X_{[pt]} \qquad (0 \leq t \leq p^{-1}\gamma)$$

$$V^{(p)}(t) = p^{-1/2} X_{\eta-[pt]} \qquad (0 \leq t \leq p^{-1}(\eta-\gamma))$$

$$W^{(p)}(t) = p^{-1/2} X_{\eta+[pt]} \qquad (0 \leq t \leq p^{-1}(\sigma(p)-\eta))$$

$$B^{(p)}(t) = p^{-1/2} X_{[pt]} \qquad (0 \leq t \leq p^{-1}\sigma(p)).$$

$U^{(p)}, V^{(p)}, W^{(p)}$ représentent trois parties de la trajectoire de $B^{(p)}$. Appelons Φ l'application qui consiste à "recoller les morceaux" :

$$\Phi(U^{(p)}, V^{(p)}, W^{(p)}) = B^{(p)}.$$

Le corollaire 4.2 et la proposition 1.2 montrent la convergence en distribution de la suite des triplets $(U^{(p)}, V^{(p)}, W^{(p)})$ et permettent aussi d'identifier la loi du triplet limite $\Phi(U,V,W)$. D'autre part la proposition 1.2 entraîne que la suite $(B^{(p)})$ converge en distribution vers B mouvement brownien réel issu de 0 arrêté quand il atteint 1. La continuité de Φ montre alors que B a même loi que $\Phi(U,V,W)$, ce qui est le résultat recherché.

(ii) Le théorème 4.3 est l'analogue discret de la décomposition de la mesure d'Itô des excursions donnée par Williams [24] (voir Rogers [18] pour une preuve). Ici encore le passage de la version discrète à la version continue est facile, à condition de prendre garde au fait que la mesure d'Itô des excursions a une masse totale infinie, alors que $\mathcal{M}$ est une probabilité. Remarquons aussi que l'asymétrie de la décomposition du théorème 4.3 disparaît dans la version continue de ce résultat (la même remarque valait déjà pour le corollaire 4.2).

5. *Les théorèmes de Ray-Knight.*

Les descriptions des trajectoires obtenues dans la partie 3 à l'aide de la notion d'arbre sont, d'un certain point de vue, les analogues discrets des théorèmes de Ray-Knight [8], [17] sur la structure des temps locaux du mouvement brownien. Le but de cette partie est de décrire le passage des résultats discrets aux résultats continus, qui nécessite certains théorèmes limites pour les processus de branchement établis par Kawazu et Watanabe [7]. Comme le contenu de cette partie se trouve déjà, sous une forme un peu différente, dans l'article de Kawazu et Watanabe [7] (voir aussi Rogers [19]) nous ne détaillerons pas les arguments. Notre présentation est aussi très liée à l'approche donnée par Walsh [21] des théorèmes de Ray-Knight.

Nous rappelons d'abord qu'un processus à valeurs positives $(W_t\ ;\ t \geq 0)$ est le carré d'un processus de Bessel de dimension $\delta \geq 0$ si et seulement si W est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dW_t = 2\sqrt{W_t}\, dB_t + \delta\, dt,$$

où B désigne un mouvement brownien réel. Dans le cas où δ est un entier strictement positif, W a même loi que le carré de la norme d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^\delta$. Les liens entre processus de branchement et carrés de processus de Bessel sont mis en évidence par le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème 2.3 de [7].

Théorème 5.1 : Pour tout $m \geq 1$ soit $(Z_n^{(m)}\ ;\ n \geq 0)$ un processus de Galton Watson avec immigration, défini par récurrence par les relations :

$$Z_0^{(m)} = a_m \qquad (a_m \in \mathbb{N})$$

$$Z_{n+1}^{(m)} = \sum_{i=1}^{Z_n^{(m)}} \xi_{ni} + \eta_n$$

où les $(\xi_{ni}\ ;\ n,i \geq 0)$, $(\eta_n\ ;\ n \geq 0)$ *sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *les* ξ_{ni} *sont équidistribuées et de carré intégrable et les* η_n *sont équidistribués et intégrables. Supposons* $E[\xi_{ni}] = 1$, $var(\xi_{ni}) = c > 0$ *et* $E[\eta_n] = d \geq 0$. *Pour tout* $m \geq 1$, *soit* $(W_t^{(m)}\ ;\ t \geq 0)$ *le processus à temps continu défini par :*

$$W_t^{(m)} = \frac{2}{c\,m} Z_{[mt]}^{(m)}.$$

Alors, sous l'hypothèse $\lim(a_m/m) = a$, *la suite de processus* $W^{(m)}$ *converge, au sens de la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles vers le carré d'un processus de Bessel de dimension* $2d/c$, *issu de* $2a/c$.

<u>Remarque</u> : L'apparition comme processus limites des carrés de processus de Bessel est partiellement expliquée par la propriété d'additivité de ces processus, mise en évidence par Shiga et Watanabe [20] et exploitée systématiquement par Pitman et Yor [16]. Il est d'ailleurs intéressant de comparer le théorème 5.1 ci-dessus et le théorème 4.1 de [16].

<u>Corollaire 5.2</u> (*Ray, Knight* [8], [17]) :

(*i*) *Soit* B *un mouvement brownien réel issu de* 0 *et* $(L_t^a(B)\ ;\ t \geq 0, a \in \mathbb{R})$ *la famille de ses temps locaux. Soit*

$$\tau = \inf\{t \geq 0\ ;\ L_t^0(B) = 1\}.$$

Le processus $(L_\tau^a(B)\ ;\ a \geq 0)$ *est le carré d'un processus de Bessel de dimension* 0 *issu de* 1.

(*ii*) *Soient* R *un processus de Bessel de dimension trois issu de* 0 *et* $(L_t^a(R)\ ;\ t \geq 0, a \geq 0)$ *la famille de ses temps locaux. Le processus* $(L_\infty^a(R)\ ;\ a \geq 0)$ *est le carré d'un processus de Bessel de dimension deux issu de* 0.

<u>Remarques</u> :

(i) Le théorème de retournement de Williams montre que l'assertion (ii) est équivalente à un résultat analogue concernant les temps locaux d'un mouvement brownien B au temps d'atteinte de 1. C'est sous cette forme que l'assertion (ii) a d'abord été démontrée.

(ii) Si R est maintenant un processus de Bessel de dimension $d > 2$, issu de 0, on peut représenter le processus $(L_\infty^a(R)\ ;\ a \geq 0)$ en faisant intervenir un carré de processus de Bessel de dimension deux, changé de temps par une fonction déterministe. Une représentation analogue existe pour le processus $(L_{T_1}^a(R)\ ;\ 0 \leq a \leq 1)$, lorsque R est un processus de Bessel de dimension deux, issu de 0, et $T_1 = \inf\{t\ ;\ R_t = 1\}$ (pour ces résultats voir [10] proposition 1.1).

Preuve : Reprenons les notations des parties précédentes et posons pour $p \geq 0$, $n \geq 1$,

$$N_p(n) = \mathrm{Card}\{k \leq n-1\ ;\ X_k = p,\ X_{k+1} = p+1\}.$$

Commençons par montrer (ii) : les résultats de la partie 3 et plus précisément la représentation illustrée par la figure 1 montrent que sous Q_0, $(N_p(\infty)\ ;\ p \geq 0)$ est un processus de Galton Watson avec immigration d'un individu par génération et pour loi de reproduction la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Si $W_t^{(m)} = m^{-1}N_{[mt]}(\infty)$, le théorème 5.1 montre que la suite $W^{(m)}$ converge, sous Q_0, vers le carré d'un processus de Bessel de dimension deux issu de 0. D'autre part la preuve de la proposition 1.2, et les propriétés bien connues d'approximation du temps local par les nombres de montées, entraînent que la suite des lois de $W^{(m)}$ sous Q_0 converge vers la loi de $(L_\infty^a(R)\ ;\ a \geq 0)$, avec les notations du corollaire.

Pour montrer (i) on pose, pour tout $m \geq 1$,

$$\tau_m = \inf\{k \geq 0\ ;\ N_0(k) = m \quad \text{et} \quad X_k = 0\}$$

D'après la partie 3, sous la probabilité P_0, le processus $(N_p(\tau_m)\ ;\ p \geq 0)$ est un processus de Galton Watson géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ (sans immigration) issu de m. Si $\overline{W}_t^{(m)} = m^{-1}\, N_{[mt]}(\tau_m)$, la suite des lois de $\overline{W}^{(m)}$ sous P_0 converge, d'une part vers la loi d'un carré de processus de Bessel de dimension 0 issu de 1, d'autre part, pour les mêmes raisons que précédemment, vers la loi de $(L_\tau^a(B)\ ;\ a \geq 0)$. □

— — — — —

Je remercie J. Neveu pour d'utiles discussions. Je remercie également J. Pitman et M. Yor pour leurs nombreuses remarques sur une version préliminaire de ce travail.

REFERENCES :

[1] BILLINGSLEY, P. : Convergence of probability measures. New-York, Wiley, 1968.

[2] DOOB, J.L. : Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. Bull. Soc. Math. France 85, 431-458 (1957).

[3] DWASS, M. : Branching processes in simple random walk. Proc. Amer. Math. Soc. 51, 270-274 (1975).

[4] IKEDA, N. and WATANBE, S. : Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland Mathematical Library, Kodansha, 1981.

[5] ITÔ, K. and Mc KEAN, H.P. : Diffusion processes and their sample paths. Berlin-Heidelberg - New-York, Springer, 1965.

[6] JEULIN, T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Math. 833. Berlin-Heidelberg - New-York, Springer, 1980.

[7] KAWAZU, K. and WATANABE, S. : Branching processes with immigration and related limit theorems. Theory Probab. Appl. 16, 36-54 (1971).

[8] KNIGHT, F.B. : Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 109, 56-86 (1963).

[9] LAMPERTI, J. : A new class of probability limit theorems. J. Math. Mech. 11, 749-772 (1962).

[10] LE GALL, J.F. : Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. Sém. Proba. XIX. Lect. Notes in Math. 1123, 297-313. Berlin-Heidelberg, New-York, Springer, 1985.

[11] Mc KEAN, H.P. : Excursions of a non-singular diffusion. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 1, 230-239 (1963).

[12] NEVEU, J. : Arbres et processus de Galton Watson. Apparaître aux Annales de l'I.H.P.

[13] NEVEU, J. : Communication personnelle.

[14] PITMAN, J.W. : One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Probab. 7, 511-526 (1975).

[15] PITMAN, J.W. and ROGERS, L.C.G. : Markov functions. Ann. Probab. 9, 573-582 (1981).

[16] PITMAN, J.W. and YOR, M. : A decomposition of Bessel bridges. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 59, 425-457 (1982).

[17] RAY, D.B. : Sojourn times of diffusion processes. Ill. J. Math. 7, 615-630 (1963).

[18] ROGERS, L.C.G. Williams characterization of the Brownian excursion law : proof and applications. Sém. Proba. XV. Lect. Notes in Math. 850, 227-250. Berlin-Heidelberg- New-York, Springer, 1981.

[19] ROGERS, L.C.G. : Brownian local times and branching processes. Sém. Proba. XVIII. Lect. Notes in Math. 1059, 42-55. Berlin-Heidelberg- New-York, Springer, 1984.

[20] SHIGA, T. and WATANABE, S. : Bessel processes as a one-parameter family of diffusion processes. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 27, 37-46 (1973).

[21] WALSH, J.B. : Downcrossings and the Markov property of local time. Temps locaux. Astérisque 52-53, p. 89-115 (1978).

[22] WILLIAMS, D. : Decomposing the Brownian path. Bull. Amer. Math. Soc. 76, 871-873 (1970).

[23] WILLIAMS, D. : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, I. Proc. London Math. Soc. Ser. 3, 28, 738-768 (1974).

[24] WILLIAMS. D. : Diffusions, Markov processes and martingales Vol. 1 : Foundations. New-York, Wiley, 1979.