SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MONIQUE PONTIER
CHRISTOPHE STRICKER
JACQUES SZPIRGLAS

Sur le théorème de représentation par rapport à l'innovation

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 34-39
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__34_0>

SUR LE THEOREME DE REPRESENTATION PAR RAPPORT A L'INNOVATION

M. PONTIER, C. STRICKER, J. SZPIRGLAS

°°°°°

Nous généralisons un peu, dans ce papier, le théorème de représentation prévisible par rapport à l'innovation qui a été établi par FUJISAKI, KALLIANPUR et KUNITA [3].

On considère le modèle de filtrage suivant : le processus d'observation Y d'un signal X, définis tous deux sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$, et une $\underline{\underline{F}}$-semi-martingale continue de la forme :

$$(1) \qquad Y_t = \int_0^t h_s\, ds + W_t$$

où W est un $(\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et h est un processus $\underline{\underline{F}}$-progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$(2) \qquad \int_0^t \| h_s \|^2 ds < \infty \quad , \mathbb{P}\text{ p.s. } , \forall t \geqq 0$$

Sous les hypothèses (1) et (2), on sait d'après ([6], corollaire 2) que Y est pour sa filtration naturelle, $\underline{\underline{G}}^Y$, complétée et rendue continue à droite, une semi-martingale spéciale admettant une décomposition vérifiant des conditions analogues à (1) et (2), à savoir :

$$(3) \qquad Y_t = \int_0^t \hat{h}_s\, ds + I_t$$

où I, appelé "processus d'innovation" de Y, est une $\underline{\underline{G}}^Y$-martingale de processus croissant t (c'est donc un $\underline{\underline{G}}^Y$-mouvement brownien) et $\hat{h}$ est un processus adapté tel que :

$$(4) \qquad \int_0^t \| \hat{h}_s \|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{ p.s. } \forall\, t \geqq 0.$$

Par l'unicité de la décomposition des semi-martingales spéciales, dès que l'on peut définir une $\underline{\underline{G}}^Y$-projection prévisible du processus h, elle coïncide nécessairement avec $\hat{h}$.

Dans le cas où h est borné, on a le théorème de représentation par rapport à l'innovation : toute $\underline{\underline{G}}^Y$-martingale se représente comme intégrale stochastique de processus $\underline{\underline{G}}^Y$- prévisibles par rapport à l'innovation I. On montre ici que le résultat est encore vrai sous les hypothèses (1) et (2) qui généralisent un peu celles de [3] et, dans le même temps, on précise leur démonstration.

On introduit maintenant quelques notations et définitions. Pour un processus générique Z défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \underline{\underline{F}})$, on considère les filtrations suivantes : la filtration naturelle de Z complétée des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{N}}$, que l'on note $\underline{\underline{F}}^Z$ ÷

(5) $$\underline{\underline{F}}_t^Z = \sigma(Z_s \; ; \; s \leq t) \vee \underline{\underline{N}}$$

et la régularisée à droite de $\underline{\underline{F}}^Z$, notée $\underline{\underline{G}}^Z$:

(6) $$\underline{\underline{G}}_t^Z = \bigwedge_{\varepsilon>0} \underline{\underline{F}}^Z_{t+\varepsilon}$$

Cette filtration $\underline{\underline{G}}^Z$ vérifie les conditions usuelles de (1).

Pour une filtration $\underline{\underline{F}}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ et un $\underline{\underline{F}}$-temps d'arrêt T, on définit les tribus suivantes : celle des évènements antérieurs à T, notée $\underline{\underline{F}}_T$ et formée des éléments A de $\underline{\underline{F}}_\infty$ tels que

(7) $$A \cap \{T \leq t\} \in \underline{\underline{F}}_t \qquad \forall t \geq 0 \; ;$$

et la tribu des évènements strictement antérieurs à T, notée $\underline{\underline{F}}_{T^-}$ et engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et les ensembles de la forme

(8) $$A \cap \{t < T\}, \text{ où } A \in \underline{\underline{F}}_t \text{ et } t \geq 0.$$

On rappelle que le couple $(X, \underline{\underline{F}})$ - où X est une $\underline{\underline{F}}$-martingale continue - possède la <u>propriété de représentation prévisible</u> si toute $\underline{\underline{F}}$-martingale Y admet une version séparable qui peut se représenter comme une intégrale stochastique de X, soit :

(9) $$Y_t = Y_0 + \int_0^t f_s . dX_s$$

avec f processus $\underline{\underline{F}}$-prévisible tel que $E \int_0^t f_s^2 \, d\langle X,X\rangle_s$ est fini pour tout t positif, où $\langle X,X\rangle$ désigne le processus croissant de X. Il est connu que lorsque X est un mouvement brownien, les filtrations $\underline{\underline{F}}^X$ et $\underline{\underline{G}}^X$ coïncident et $(X, \underline{\underline{F}}^X)$ possède la propriété de représentation prévisible.

La démonstration de [3] utilise implicitement le fait que les tribus $\underline{\underline{F}}^{Z}_{T}$ et $\underline{\underline{F}}^{Z^T}_{\infty}$ coïncident pour un $\underline{\underline{F}}^{Z}$-temps d'arrêt (où $Z^T_t = Z_{T\wedge t}$) ce qui n'est pas vrai en général. Pour contourner cette difficulté, on utilise des résultats de [2] (qui ont également servi dans [5] pour l'étude des filtrations naturelles des processus à valeurs dans une variété).

On montre la proposition suivante :

Proposition 1. Sous les hypothèses (1) et (2), le couple $(I, \underline{\underline{G}}^Y)$ possède la propriété de représentation prévisible.

La démonstration s'appuie sur la proposition suivante de [2]:

Proposition 2 (prop. 4 de [2]). Soient deux processus X et Y, et T un temps d'arrêt tel que :

(10) $$X^T = Y^T \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Si S est un $\underline{\underline{G}}^X$-temps d'arrêt $\mathbb{P}$ p.s. strictement inférieur à T, alors S est un $\underline{\underline{G}}^Y$-temps d'arrêt et l'on a :

(11) $$\underline{\underline{G}}^X_S = \underline{\underline{G}}^Y_S$$

Démonstration : Soit t un réel positif, A dans $\underline{\underline{G}}$. On pose :

(12) $$B = A \cap \{S < t\}$$

et (a_i) l'ensemble des dyadiques de $[0,t[$. Soit :

(13) $$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} 1\{\frac{k}{2^n} \leq S < \frac{k+1}{2^n}\}$$

L'évènement $B \cap \{S_n = a_i\}$ est $\underline{\underline{G}}^X_{a_i}$ mesurable et $\underline{\underline{G}}^X_{a_i}$ est séparable (aux ensembles négligeables près). Il existe donc un ensemble dénombrable de $[0\ a_i]$ $D_i = \{s^i_o, s^i_1, \dots, s^i_p, \dots\}$ et des fonctions boréliennes f^i_n de $\mathbb{R}^{D_i}$ à valeurs dans $\{0,1\}$:

(14) $$f^i_n(X_{s^i_o}, X_{s^i_1}, \dots) = B \cap \{S_n = a_i\}$$

Des définitions (13) et (14), on tire :

(15) $$1_{A\cap\{S<t\}} = \lim_{n\to\infty} 1_{A\cap\{S_n<t\}} = \lim_{n\to\infty}\sup_i 1_{B\cap\{S_n=a_i\}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_i 1_{\{S_n=a_i\}} f_n^i(X_{s_p^i}) = \lim_{n\to\infty}\sup_i 1_{\{S_n=a_i\}} f_n^i(X^T_{s_p^i})$$

En effet, si S est supérieur ou égal à t, il est supérieur à s_p^i et $X_{s_p^i} = X^T_{s_p^i}$; sinon, il existe pour n assez grand un indice i tel que, pour tout p :

(16) $$s_p^i \leqq a_i = S_n < T$$

Lorsque A = Ω, on a même mieux :

(17) $$1_{\{S<t\}} = \lim_{n\to\infty}\sup_i f_n^i(X^T_{s_p^i})$$

ce qui montre que S est un $\underline{\underline{G}}^Y$-temps d'arrêt. Il en est donc de même pour les S_n. De $X^T = Y^T$ on déduit alors que A appartient à $\underline{\underline{G}}^Y_S$: $\underline{\underline{G}}^X_S \subset \underline{\underline{G}}^Y_S$. On a évidemment l'inverse par symétrie et donc l'égalité (11).

Démonstration de la proposition 1. Lorsque h est borné sur un intervalle de temps fini, l'idée est de faire un changement de probabilité équivalente pour laquelle Y est un mouvement brownien ; en effet, dans ce cas, la martingale locale L définie par :

(18) $$L_t = \exp\left(- \int_0^t \hat{h}_u \, dI_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\hat{h}_u\|^2 du\right)$$

est une martingale uniformément intégrable sur [0,s] pour tout s fini. Sous l'hypothèse plus large (2) ce n'est plus le cas, et on est amené à localiser :

(19) $$T_n = \inf\{t\geqq 0 / L_t \leqq 1/n \text{ ou } \int_0 \|\hat{h}_u\|^2 du \geqq n\} \wedge n \; ; \; n \geqq 2$$

Ces temps d'arrêt sont $\underline{\underline{G}}^Y$-prévisibles comme débuts d'ensembles prévisibles fermés à droite ; ils sont de plus strictement positifs et strictement croissants.Le processus arrêté L^{T_n} est une $\underline{\underline{G}}^Y$-martingale de carré intégrable minorée par 1/n. La probabilité $\mathbb{P}^n = L^{T_n}.\mathbb{P}$ est donc équivalente à $\mathbb{P}$. On pose :

(20) $$Y^n_t = I_t + \int_0^{t\wedge T_n} \hat{h}_u \, du$$

Le théorème de Girsanov montre que Y^n est un $(\underline{\underline{G}}^Y, \mathbb{P}^n)$-mouvement brownien. Par ailleurs, les processus Y et Y^n coïncident jusqu'au temps d'arrêt T_n. La stricte croissance de la suite (T_n) et la proposition 2 montrent que T_{n-1} est un $\underline{\underline{G}}^{Y^n}$-temps d'arrêt et que

$$(21) \qquad \underline{\underline{G}}^Y_{t\wedge T_{n-1}} = \underline{\underline{G}}^{Y^n}_{t\wedge T_{n-1}}$$

On peut alors conclure la démonstration : si Z est une $(\underline{\underline{G}}^Y,\mathbb{P})$-martingale de carré intégrable, $Z^{T_{n-1}}$ est une $(\underline{\underline{G}}^Y_{\cdot\, T_{n-1}},\mathbb{P})$-martingale et donc $(Z/L)^{T_{n-1}}$ est une $(\underline{\underline{G}}^Y_{\cdot\wedge T_{n-1}},\mathbb{P}^n)$-martingale et aussi $(\underline{\underline{G}}^Y_{\cdot\wedge T_{n-1}},\mathbb{P}^n)$-martingale, de carré intégrable ($L^{T_{n-1}}$ est minorée). On obtient, par la propriété de représentation du brownien Y^n l'existence d'un processus ϕ^n, $\underline{\underline{G}}^{Y^n}$-prévisible, tel que :

$$(22) \qquad (Z/L)_t^{T_{n-1}} = Z_o + \int_o^{t\wedge T_{n-1}} \phi^n(u)d\, Y_u^n$$

La formule de Itô appliquée au produit L x Z/L donne :

$$(23) \qquad Z_{t\wedge T_{n-1}} = Z_o + \int_o^{t\wedge T_{n-1}} \psi^n(u)\; dI_u$$

avec $\psi^n = \psi^n 1_{]\!]0,T_{n-1}]\!]}$ processus $\underline{\underline{G}}^{Y^n}$-prévisible, mais aussi, par (21), $\underline{\underline{G}}^Y$-prévisible. On peut choisir les ψ^n de sorte que $\psi^m = \psi^n 1_{]\!]0,T_{m-1}]\!]}$ si $m < n$; et les temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini, on peut donc définir un processus ψ $\underline{\underline{G}}^Y$-prévisible coïncidant avec ψ^n sur $]\!]0,T_{n-1}]\!]$ tel que :

$$(24) \qquad Z_t = Z_o + \int_o^t \psi(u)\; d\, I_u,$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>. Comme nous l'a suggéré JACOD, il n'existe qu'une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{G}}^Y_\infty)$ telle que Y soit une $(\underline{\underline{G}}^Y, \mathbb{P})$ semi-martingale de caractéristiques locales ($\int_o^t \hat{h}_s\, ds$, $\delta_{ij}\, dt$, 0). Dans ce cas, le $\underline{\underline{G}}^Y$-mouvement brownien a nécessairement la propriété de représentation prévisible, grâce à la proposition (12.21) de [4].

REFERENCES

[1] C. DELLACHERIE & P.A. MEYER : "Probabilités et potentiels", tomes 1 et 2, Hermann, Paris (1975 et 1980).

[2] H.J. ENGELBERT and J. HESS : "Intégral Représentation with respect to stopped Continuous Local Martingales", Stochastic 4 (1980), p. 121-142.

[3] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR and KUNITA : "Stochastic Differential Equations for the Nonlinear Filtering Problem", Ozaka J. Math. 9 (1972), p. 19-40.

[4] J. JACOD : "Calcul stochastique et Problèmes de Martingales", L.N. in Math n° 714, Springer-Verlag (1979).

[5] M. PONTIER & J. SZPIRGLAS : "Filtrage non linéaire avec observation sur une variété" - A paraître dans Stochastics, 1985.

[6] C. STRICKER : "Quelques remarques sur les semi-martingales gaussiennes et le problème de l'innovation". Filtering and Control of Random Processes ; Proc. of ENST-CNET Coll, Feb. 23-24 1983 ; L.N. in Control and Inf. Sc. n° 61, Springer-Verlag, p. 260-276.

[7] J. SZPIRGLAS & MAZZIOTTO : "Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées", Ann. I.H.P. vol. XV n° 2 (1979) p. 147-173.

[8] M. ZAKAI : "On the optimal filtering of diffusion processes", Zeit. für Wahrshein. 11 (1969) p. 230-249.