Juan Ruiz de Chavez

Sur la positivité de certains opérateurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 338-340
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__338_0>

SUR LA POSITIVITE DE CERTAINS OPERATEURS

par J. Ruiz de Chavez

Cette note fait suite à notre exposé [1] sur les travaux de Surgailis, paru dans le volume précédent du séminaire.

Soit Φ l'espace de Fock construit sur l'espace de Hilbert $H=L^2(\mathbb{R}_+,dt)$. Soit A une contraction de H : on peut lui associer de manière naturelle une contraction $\Phi(A)$ de Φ, entièrement caractérisée par la propriété

$$(1) \qquad \Phi(A)\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(Af) \quad \text{pour } f\in H$$

où $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Wick. Le problème traité par Surgailis consiste à chercher quelle est la condition que l'on doit imposer à A pour que $\Phi(A)$ soit une contraction positive, au sens que voici.

Soit (X_t) une martingale localement de carré intégrable, nulle en 0, de crochet $\langle X,X\rangle_t=t$. Si $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les v.a. X_t, les développements en intégrales stochastiques multiples permettent d'identifier l'espace de Fock à un sous-espace de $L^2(\mathcal{F})$. Nous nous intéressons au cas où $\Phi=L^2(\mathcal{F})$ tout entier, et la positivité de $\Phi(A)$ (notion qui dépend du choix de la martingale X) signifie que cet opérateur transforme les v.a. positives en v.a. positives.

Le cas où X est un mouvement brownien et celui où X est un processus de Poisson compensé sont traités dans [1]. Cette note a pour but de montrer comment on peut traiter le cas où

$$(2) \qquad X_t = \int_0^t \frac{1}{\rho_s}(dN_s-\rho_s^2 ds)$$

où ρ est une fonction localement intégrable, partout $\neq 0$, et (N_t) est un processus de Poisson d'intensité $\rho_s^2 ds$. Ce cas se ramène très simplement à celui du processus de Poisson compensé usuel, traité par Surgailis. Nous profitons aussi de cette occasion pour montrer la <u>nécessité</u> des conditions de Surgailis (établie par celui-ci, mais non exposée dans [1]).

Rappelons d'abord le théorème de Surgailis :

THEOREME (Cas où $\rho=1$). <u>Pour que</u> $\Phi(A)$ <u>soit un opérateur positif, il faut et il suffit que</u> A <u>soit un noyau sousmarkovien tel que</u> $\lambda A\leq\lambda$, <u>où</u> λ <u>est la mesure de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}_+$.

<u>Démonstration</u>. La suffisance a été traitée dans [1]. Etablissons la nécessité. Nous avons pour toute fonction f de $L^2(\lambda)$, à support dans un intervalle borné $[0,t]$ (et donc intégrable)

$$(3)\qquad \mathcal{E}(f) = e^{-\lambda(f)}\prod_{s\in S}(1+f(s)) \qquad (\ S,\ \text{ensemble des sauts}\ )$$

Si f ne satisfait pas aux hypothèses ci-dessus, l'expression est celle de l'exponentielle de Doléans, plus compliquée :

$$(4)\qquad \mathcal{E}(f) = \exp\left(\int_0^\infty f_s dX_s\right)\prod_{s\in S}(1+f_s)e^{-f_s} .$$

Prenons d'abord dans (3) $f \geqq -1$. Alors $\mathcal{E}(f)\geqq 0$, donc la positivité de $\Phi(A)$ entraîne $\mathcal{E}(Af)\geqq 0$ p.s.. D'après l'expression (4)

$$f\geqq -1 \Rightarrow A(fI_{[0,t]}) \geqq -1 \text{ p.p..}$$

Prenant $f\geqq 0$, nous avons $nf\geqq -1$ pour tout n entier, donc $nA(fI_{[0,t]})\geqq -1$ p.p., et $A(fI_{[0,t]}) \geqq 0$ p.p.. Comme A est une contraction de L^2 on peut faire tendre t vers $+\infty$, donc A est <u>positif</u> . Prenant ensuite $f=-I_{[0,t]}\geqq -1$ on voit que $A(I_{[0,t]})\leqq 1$ p.p., donc A est un pseudonoyau sousmarkovien : on peut le régulariser en un vrai <u>noyau sousmarkovien</u>.

Soit f positive, à support dans $[0,t]$. On a alors d'après (3) $\mathcal{E}(f)\geqq e^{-\lambda(f)}$. Comme $\Phi(A)$ préserve les constantes (prendre f=0 dans (1)), la positivité de $\Phi(A)$ entraîne $\mathcal{E}(Af)\geqq e^{-\lambda(f)}$, donc en prenant une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_u$ $\mathcal{E}((Af)I_{[0,u]}) \geqq e^{-\lambda(f)}$. Nous pouvons utiliser l'expression (1) pour évaluer cela, et remarquer que $S\cap[0,u]=\emptyset$ avec probabilité >0 : dans un tel cas , $\mathcal{E}((Af)I_{[0,u]})$ se réduit à $\exp(-\int_0^u(Af_s)ds\ )$. Par conséquent

$$\exp\left(-\int_0^u (Af_s)ds\ \right) \geqq \exp\left(-\int_0^\infty f_s ds\ \right)$$

Faisant tendre u vers $+\infty$, on voit que $\lambda(Af)\leqq\lambda(f)$. On lève ensuite la condition de support sur f , et le théorème est établi.

Le cas de l'espace de Fock construit au dessus de $L^2(\Theta)$, où Θ est une mesure localement bornée sur $\mathbb{R}_+$, se ramène au précédent par un changement de temps déterministe : l'espace de Fock s'identifie à l'espace $L^2(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par le processus de Poisson compensé

$$(5)\qquad Y_t = N_t - \Theta([0,t])$$

d'intensité Θ , et la condition de positivité de $\Phi(A)$ est $\Theta A\leqq\Theta$ au lieu de $\lambda A\leqq\lambda$.

Nous revenons alors à (2) : désignons par Θ la mesure $\rho^2(t)dt$: l'espace $L^2(\mathcal{F})$ est aussi bien engendré par X (2) que par Y (5), et nous avons un isomorphisme $f\overset{i}{\mapsto}f/\rho$ de $L^2(\lambda)$ sur $L^2(\Theta)$, qui se prolonge en un isomorphisme des espaces de Fock correspondants, et qui lorsqu'on <u>identifie</u> ces espaces de Fock à $L^2(\mathcal{F})$ est simplement l'identité. En effet, dans le premier espace de Fock, si f est bornée à support dans $[0,t]$, on lit $\mathcal{E}(f)$ comme la variable aléatoire

$$e^{-\int f_s \rho_s ds} \prod_{s\in S} \left(1 + \frac{f(s)}{\rho(s)}\right)$$

tandis que, dans le second espace de Fock, $\mathcal{E}(g) = e^{-\Theta(g)} \prod_{s\in S} (1+g_s)$ se lit pour $g=f/\rho$

$$e^{-\int f_s/\rho_s \, \Theta(ds)} \prod \left(1 + \frac{f}{\rho}(s)\right)$$

qui a bien la même valeur. Pour obtenir la condition de positivité cherchée, il suffit donc d'écrire que iAi^{-1} satisfait à la condition de positivité de Surgailis. Autrement dit :

THEOREME. Pour qu'une contraction A de $L^2(\lambda)$ soit telle que $\Phi(A)$ préserve la positivité dans $L^2(\mathcal{F})$, il faut et il suffit qu'il existe un noyau sousmarkovien B, tel que $\Theta B \leqq B$ ($\Theta(dx)=\rho^2(x)dx$) et tel que l'on ait

(6) $$Af = \rho B\left(\frac{f}{\rho}\right) \quad \text{pour} \quad f\in L^2(\lambda) .$$

Ou encore, que l'opérateur $f \longmapsto \frac{1}{\rho}A(f\rho)$ soit régularisable en un noyau sousmarkovien B diminuant Θ .

Si l'on interprète l'espace de Fock comme espace L^2 associé au mouvement brownien, la condition de positivité de $\Phi(A)$ se réduit à la propriété de contraction. Le mouvement brownien est limite de tous les processus de Poisson compensés X_t construits ci-dessus lorsque l'intensité $\rho_s^2 ds$ tend vers l'infini, la hauteur des sauts (non nécessairement positive) $1/\rho_s$ tendant vers 0 . La très grande variété de contractions satisfaisant à (6) justifie intuitivement la disparition de toute condition à la limite, mais il semble difficile de transformer cela en une démonstration entièrement probabiliste pour le cas brownien.

REFERENCES.

[1]. J. Ruiz de Chavez. Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson. Sém. Prob. XIX.

[2]. D. Surgailis. On Poisson multiple stochastic integrals and associated Markov semigroups. Prob. and Math. Stat., 3, 1984, p.217-239.