WEI-AN ZHENG
PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur la construction de certaines diffusions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 334-337
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__334_0>

SUR LA CONSTRUCTION DE CERTAINES DIFFUSIONS

par W.A. Zheng et P.A. Meyer

Les travaux récents de E. Carlen [1] et W.A. Zheng [2] ont abouti à la construction de certaines diffusions, obtenues en perturbant un mouvement brownien au moyen d'un champ de vecteurs singulier. Dans ces travaux figure une condition globale, dite << condition d'énergie finie >>. Nous nous proposons ici de donner une condition locale, permettant d'affirmer que la diffusion évite l'ensemble des << noeuds >> de sa densité. Nous ne cherchons pas, en revanche, à minimiser les hypothèses de différentiabilité.

1. NOTATIONS ET RAPPELS. On se place sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$, et l'on se donne une fonction continue $\rho(x,t)$ sur cet espace, positive (nous poserons souvent $\rho(.,t)=\rho_t$). Nous désignons par U l'ouvert $\{\rho>0\}$, et nous supposons que ρ y est de classe $C^{2,1}$. Dans cet ouvert aussi, nous nous donnons un champ de vecteurs $b(x,t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de classe $C^{1,0}$, lié à ρ par une équation de Fokker-Planck

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\Delta\rho - \operatorname{div}(\rho b) \ . \tag{1}$$

Le champ $\hat{b}$ défini par $b-\hat{b} = \operatorname{grad}\rho/\rho$ satisfait alors à l'équation analogue, toujours dans U

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2}\Delta\rho - \operatorname{div}(\rho\hat{b}) \ . \tag{$\hat{1}$}$$

Soit I un intervalle $[u,v]$ de $\mathbb{R}$, et soit Ω_I l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}^d$, avec ses tribus usuelles et ses applications coordonnées X_t (nous désignerons par $\Omega_I^!$ l'espace analogue, où l'on permet une durée de vie finie ζ). Soit P^μ la mesure sur Ω_I sous laquelle (X_t) est un mouvement brownien de mesure initiale μ . Soit $\tau=\inf\{t : X_t\notin U\}$. Pour toute fonction positive f sur $\mathbb{R}^d$, posons

$$Q_{uv}(x,f) = E^x[f(X_v)I_{\{v<\tau\}}\exp(\int_u^v b(X_s,s)\cdot dX_s - \frac{1}{2}\int_u^v b^2(X_s,s)ds\ )]$$

Il est bien connu que l'on définit ainsi une fonction de transition sousmarkovienne, portée par U . Nous désignerons par Q^μ la mesure sur $\Omega_I^!$ sous laquelle le processus (X_t) admet cette fonction de transition. Sous cette loi, le processus (défini pour $t<\zeta$)

$$W_t = X_t - X_u - \int_u^t b(Y_s)ds \qquad \text{où l'on pose } Y_s=(X_s,s)$$

peut être considéré comme la restriction à $[0,\zeta[$ d'un mouvement brownien (défini sur un espace élargi convenable) : on peut donc considérer (X_t) comme la solution d'une équation différentielle stochastique, calculée jusqu'au temps de sortie τ de l'ouvert U .

La fonction b(x,t) étant bornée sur les compacts de U, le processus (Y_t) <u>sort de tout compact de</u> U <u>à l'instant de sa durée de vie</u> ζ : ou bien la trajectoire ne reste pas bornée dans $\mathbb{R}^d\times I$, ou bien elle reste bornée mais est adhérente à U^c, l'ensemble des noeuds de ρ .

Si l'on remplace b par $-\hat{b}$, on définit de même une fonction de transition sousmarkovienne $\hat{Q}_{uv}$. On trouvera dans [2] un argument simple de retournement du temps sur le mouvement brownien, permettant de déduire de (1) et $(\hat{1})$ la propriété de dualité que voici :

LEMME 1. <u>Soient</u> f,g <u>deux fonctions positives sur</u> $\mathbb{R}^d$. <u>Alors on a</u>

$$(2) \qquad \int \rho_u(x)f(x)dx\, Q_{uv}(x,dy)g(y) = \int \rho_v(y)g(y)dy\, \hat{Q}_{uv}(y,dx)f(x) \ .$$

En particulier, prenons f=1 . La fonction de transition $\hat{Q}_{uv}$ étant sousmarkovienne, on a $\rho_u Q_{uv} \leqq \rho_v$ p.p., et on en déduit (th. de Fubini) :

LEMME 2. <u>Pour toute fonction positive</u> h <u>sur</u> $\mathbb{R}^d\times[u,v]$ <u>on a</u>, <u>en désignant par</u> μ_u <u>la mesure</u> $\rho_u(x)dx$

$$(3) \qquad E_Q^{\mu_u}\Big[\int_u^v h(Y_s)ds\Big] \leqq \int_{\mathbb{R}^d\times[u,v]} h(x,s)\rho(x,s)dxds \ .$$

2. Voici le résultat que nous voulons établir :

THEOREME. <u>Soit</u> F <u>la fonction sur</u> $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$

$$(4) \qquad F = \Delta\rho - \rho\,\mathrm{div}b - \tfrac{1}{2}\mathrm{grad}^2\rho/\rho \quad \underline{\text{sur}}\ U \ ,\ F=0\ \underline{\text{sur}}\ U^c \ .$$

<u>Si la fonction</u> F^- <u>est localement intégrable</u>, <u>sous toute mesure</u> Q^{μ_u} <u>le processus</u> (Y_t) <u>sort de tout compact de</u> $\mathbb{R}^d\times[u,v]$ <u>à l'instant de sa durée de vie</u>.

Autrement dit, le processus (Y_t) ne va jamais mourir à distance finie, dans l'ensemble $\{\rho=0\}$ des noeuds de la densité ρ.

Nous commençons par un calcul, qui résulte de la formule d'Ito appliquée dans U à $\log\rho$, et de (1). Nous le laissons au lecteur.

LEMME 3. <u>On a pour</u> $t<\zeta$

$$(5) \quad \log\rho(Y_v) - \log\rho(Y_u) = \int_u^v \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\rho}(Y_s).dW_s + \int_u^v \frac{1}{\rho}F(Y_s)ds$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d\times[u,v]$. Posons

$$T_n = \inf\{t\leqq v : Y_t\notin K \text{ ou } \rho(Y_t)\leqq 1/n\} \ ,\ T = \lim_n T_n \ .$$

Il s'agit de démontrer que pour tout K et tout v

$$Q^{\mu_u}\{ u<T<v,\ \rho(Y_{T_n})\leqq 1/n \text{ pour tout } n\} = 0 \ .$$

Désignons par A cet événement. Sur $\{T_n>u\}$, nous avons pour $s\leqq T_n$ $Y_s\varepsilon K$, et $\rho(Y_s)\geqq 1/n$, donc l'intégrale stochastique au second membre de (5) a une espérance nulle à l'instant T_n . Nous avons donc

$$E[\log\rho(Y_{T_n})I_{\{T_n>u\}}] \geqq E[\log\rho(Y_u)I_{\{T_n>u\}}] - E[\int_u^{T_n} \frac{1}{\rho}F^-(Y_s)ds]$$

Au premier membre, sur $\{T_n>u\}$ nous avons $Y_T \varepsilon K$, donc $\log\rho(Y_{T_n})$ est borné supérieurement, donc si la probabilité de A est non nulle, le côté gauche tend vers $-\infty$. Du côté droit, si $T_n>u$ on a $X_u\varepsilon K$, et l'espérance est bornée en valeur absolue par

$$\int_K |\log\rho(x)|\,\rho(x)dx$$

qui est finie, ρ étant localement bornée. Enfin, comme F^- est positive nous voyons que si A a une probabilité non nulle, on a

$$E[\int_u^v \frac{1}{\rho}F^-(Y_s)I_{\{X_s\varepsilon K\}}ds] = +\infty$$

Mais alors, en appliquant (3), nous avons a fortiori

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[u,v]} I_K(x)F^-(x,s)dxds = +\infty$$

et F^- n'est pas localement intégrable. Le théorème est établi.

3. On peut aussi écrire F sous une forme plus symétrique

$$F = \frac{1}{2}\Delta\rho + \dot{\rho} + \frac{1}{2}(b+\hat{b})\cdot\text{grad}\,\rho\ .$$

Dans le cas stationnaire, le second terme disparaît, et dans le cas stationnaire symétrique, les deux derniers termes disparaissent.

REFERENCES

[1]. E. CARLEN. Conservative diffusions. Comm. in Math. Phys. 94, 1984, p. 293-315.

[2]. W.A. ZHENG. Tightness results for laws of diffusion processes - application to stochastic mechanics. A paraître, Ann. I.H.P., 1985.

W.A. Zheng
East China Normal University
Shanghai, Chine

P.A. Meyer
IRMA, 7 rue G^{al} Zimmer
Strasbourg

COMMENTAIRE (M. Emery)

Voici un exemple en dimension 1, qui montre que la condition de Zheng est réellement précise. On se place sur un intervalle]0,a[($a\leqq+\infty$), la fonction ρ étant indépendante de t, >0 dans]0,a[et admettant un noeud en 0. On se place dans le cas stationnaire réversible ($b = -\hat{b} = \rho'/2\rho$). On peut montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la diffusion dans]0,a[évite le noeud en 0 est $\int_{0+} dx/\rho(x) = +\infty$. Si $\rho(x)=x^\lambda$ ou $x(\log\frac{1}{x})^\lambda$, la condition suffisante de Zheng s'applique dans tout l'intervalle où le noeud est effectivement évité.

La condition nécessaire et suffisante ci-dessus s'établit ainsi. Soit f une primitive de $1/\rho$ dans $]0,a[$; alors $M_t = f \circ X_t$ est une martingale locale de crochet $\langle M,M\rangle_t = dt/\rho^2(X_t)$. Si $f(0) > -\infty$, M_t atteint $f(0)$ par valeurs supérieures en temps fini avec probabilité positive (car $d\langle M,M\rangle_t \geq dt$ au voisinage de $f(0)$), donc X peut atteindre 0. Si $f(0) = -\infty$, M ne peut atteindre $f(0) = -\infty$ sans osciller entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui entraîne que X oscille entre deux valeurs u,v telles que $0<u<v<a$. En appliquant la propriété de Markov forte aux temps de passage successifs, on voit que ces oscillations prennent un temps infini, donc 0 n'est pas atteint en temps fini.

NOTE SUR LES EPREUVES (Zheng Wei-an). Nous savons démontrer par la même méthode un critère de non explosion : nous supposons encore que $\rho \in C^{2,1}$, $b \in C^{1,0}$, et en outre

- $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F^-(x,s)dxds < \infty$
- il n'existe pas de courbe continue $x(t)$ telle que $\sup_{t<a} |x(t)| = \infty$ et $\inf_{t<a} \rho(x(t),t) > 0$ ($a \in \mathbb{R}_+$) .

Considérons alors l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + W_t + \int_0^t b(X_s,s)ds$$

où (W_t) est un mouvement brownien indépendant de X_0 , et la loi de X_0 admet la densité $\rho(.,0)$. Cette équation a une solution unique et non explosive, et la loi de celle-ci à l'instant t admet la densité $\rho(.,t)$.