

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA

## Sur les fermés aléatoires

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 397-495

<[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_397\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__397_0)>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES FERMES ALEATOIRES

J. AZEMA

### §1. INTRODUCTION.

Le but primitif de ce travail était de montrer que la loi d'un fermé aléatoire (de mesure de Lebesgue nulle) est déterminée par la donnée d'un noyau optionnel  $\sigma$ -fini. On n'y trouvera pas ce résultat, probablement faux d'ailleurs, en l'absence d'hypothèses supplémentaires. Cela explique pourtant que l'on ait cherché à exprimer les caractéristiques du fermé à l'aide de son "noyau de Lévy" défini au §3.

Le deuxième chapitre décrit le cadre général du travail ; il est effroyablement bavard. Mais la pauvreté de la filtration construite ici m'a conduit à penser et à dire tellement d'âneries que j'ai préféré tout écrire. Le lecteur branché est invité à passer directement au chapitre 5. Le §3 est en effet consacré à des rappels sur les processus ponctuels filtrés, et les deux exemples du chapitre 4 sont bien connus. (On pourra cependant retenir qu'un ensemble régénératif est caractérisé par le fait qu'il ne porte qu'une fonctionnelle additive). Au §5, on étudie les propriétés des extrémités gauches et droites des intervalles contigus au fermé, suivant les hypothèses faites sur le noyau de Lévy ; les techniques employées s'inspirent de Maisonneuve - Meyer [11] pour ce qui est de la gauche, et de Jacod [8] pour la droite.

Les choses véritablement sérieuses commencent au chapitre 6, où l'on découvre une sous-martingale simple admettant pour processus croissant le temps local. On applique à des ensembles aléatoires généraux des méthodes de balayage issues de la théorie des processus de Markov. J'espère, sans trop y croire, que les maniaques du calcul stochastique ne trouveront pas trop rapidement une autre démonstration. Ce résultat sera exploité au dernier chapitre pour construire le temps local du fermé à l'aide de son noyau de Lévy. Les chapitres 7 et 8 donnent un aperçu de ce que peut apporter la théorie des martingales à l'étude de cette filtration apparemment triviale. L'étude du deuxième processus ponctuel nous fait entrer dans la théorie de Jacod [9]. La tentation devient grande de définir un fermé aléatoire par un "problème des martingales". Nous y succomberons probablement l'année prochaine, dans la prochaine livraison du séminaire, où seront notamment généralisés les théorèmes de représentation déjà connus dans le cas discret [4], [5], [6], [8] et régénératif [13].

## S2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

### 1) PREMIERES DEFINITIONS.

- $\Omega$  sera l'ensemble des fermés de  $\mathbb{R}_+$  de mesure de Lebesgue nulle.
- $H$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  (i.e. le fermé aléatoire) défini par l'équivalence  $(t, \omega) \in H \iff t \in \omega$ .
- On posera  $g_t(\omega) = \sup\{s ; s < t, s \in \omega\}$ ,  $g_t^+(\omega) = \sup\{s ; s < t, s \in \omega\}$

$$d_t(\omega) = \inf\{s ; s > t, s \in \omega\}, \quad d_t^-(\omega) = \inf\{s ; s > t, s \in \omega\}$$

On conviendra, comme d'habitude, que  $\inf \Phi = +\infty$ . Pour définir  $\sup \Phi$ , nous introduisons un deuxième zéro, noté  $0^-$ , vérifiant

$0^- < 0$ ,  $t + 0^- = t - 0^- = t$ ,  $\forall t > 0 \dots$ , et l'on posera  $\sup \Phi = 0^-$ . Les processus  $(g_t)$  et  $(d_t)$  sont croissants ;  $(g_t)$  est continu à gauche,  $(d_t)$  est continu à droite. Comme le suggèrent les notations,  $(g_t^+)$  est effectivement le régularisé à droite de  $(g_t)$ ,  $(d_t^-)$  le régularisé à gauche de  $(d_t)$  ; (cela résulte du fait que  $\omega$  est fermé).

- Il est facile de montrer les relations

$$(1) \quad H = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega ; g_t^+(\omega) = t\} = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega ; d_t^-(\omega) = t\}$$

$$(2) \quad g_s(\omega) < t \iff s < d_t(\omega) \iff \omega \cap ]t, s[ = \emptyset$$

$$g_s^+(\omega) < t \iff s < d_t^-(\omega) \iff \omega \cap [t, s] = \emptyset.$$

### 2) LA FILTRATION NATURELLE D'UN FERME ALEATOIRE.

- Nous introduirons une famille d'opérateurs de meurtre  $(k_t)_{t \geq 0}$  appliquant  $\Omega$  dans  $\Omega$ , ainsi qu'une famille d'opérateurs d'arrêt notée  $(a_t)_{t \geq 0}$ . Par définition

$$(3) \quad k_t(\omega) = \overline{\omega \cap [0, t[}, \quad a_t(\omega) = \omega \cap [0, t]$$

- On notera les égalités faciles

$$(4) \quad k_s \circ k_t = k_{s \wedge t} ; a_s \circ a_t = a_{s \wedge t} ; g_s \circ k_t = g_{s \wedge t} ; g_s^+ \circ a_t = g_{s \wedge t}^+.$$

- Nous définirons alors de la manière suivante la filtration naturelle

$(\mathbb{F}_t^0)$  : on appellera  $\mathbb{F}_\infty^0$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les variables aléatoires  $(g_t)_{t \geq 0}$  ; on posera ensuite  $\mathbb{F}_t^0 = \bigcap_{u > t} k_u^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0)$ , ce qui définit une filtration continue à droite. On notera immédiatement les propriétés suivantes :

- (5) Une variable aléatoire  $z$  est  $\mathbb{F}_t^0$ -mesurable si et seulement si  $z \circ k_u = z, \forall u > t$ .
- (6) Les variables aléatoires  $g_t$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ) sont  $\mathbb{F}_t^0$ -mesurables. Le processus  $(g_t)_{t \geq 0}$  est donc prévisible, et le processus  $(g_t^+)_{t \geq 0}$  optionnel. Il résulte alors immédiatement de (1) que  $H$  est optionnel.
- (7) On pourra enfin noter que  $k_0$  est une application constante :  $k_0(\omega) = \phi \quad \forall \omega$ , tandis que l'application  $a_0$  prend les deux valeurs  $\{0\}$  et  $\phi$ . La tribu  $k_0^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0)$  est donc triviale,  $a_0^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0)$  comporte deux atomes ; la tribu  $\mathbb{F}_0^0$  quant à elle, est plus compliquée, puisqu'elle contient l'information sur le comportement du fermé immédiatement après 0.

### 3) GENERATION DE LA TRIBU PREVISIBLE.

- (8) DEFINITION 5: On notera  $\mathcal{K}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) l'image réciproque de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{F}_\infty^0$  par l'application  $(t, \omega) \rightarrow (t, k_t(\omega))$  (resp.  $(t, \omega) \rightarrow (t, a_t(\omega))$ ) de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans lui-même.

On commettra l'abus de notation usuel consistant à appeler également  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{A}$  la famille des processus  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{A}$ -mesurables bornés. Si un processus  $(Z_t)$  est dans  $\mathcal{K}$ ,  $Z_0$  est une variable aléatoire constante.

- (9) PROPOSITION : 1)  $\mathcal{K}$  coïncide avec la famille des processus prévisibles bornés  $(Z_t)$  tels que  $Z_0$  soit constante.

2)  $\mathcal{A}$  contient  $\mathcal{K}$  et est contenu dans la famille des processus optionnels bornés.

Démonstration : 1) Soit  $(Z_t)$  un processus de  $\mathcal{K}$  ; nous avons à montrer qu'il est prévisible ; des arguments successifs de classe monotone permettent de se limiter au cas où  $Z_t = \phi(t)\beta \circ k_t$ , puis au cas où  $Z_t = \phi(t)g_{t_0} \circ k_t = \phi(t)g_{t_0 \wedge t}$  : il est alors clair que  $(Z_t)$  est prévisible.

Inversement, si  $(Z_t)$  est un processus prévisible élémentaire :

$$Z_t(\omega) = 1_{]u,v]}(t) 1_A(\omega), \quad (u < v \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_u^0),$$

on vérifie immédiatement que  $Z_t(k_t(\omega)) = Z_t(\omega)$ , ce qui montre que  $(Z_t) \in \mathcal{K}$ .

Passons à la deuxième partie ; si  $(Z_t)$  est dans  $\mathcal{K}$ , il vérifie  $Z_t[k_t(\omega)] = Z_t(\omega)$  ; on a donc

$$Z_t[a_t(\omega)] = Z_t[k_t(a_t(\omega))] = Z_t[k_t(\omega)] = Z_t(\omega),$$

ce qui prouve que  $(Z_t) \in \mathcal{A}$ .

D'autre part, si  $(Z_t)$  est de la forme  $\phi(t)\beta \circ a_t$ , et si  $\beta$  est la variable aléatoire  $g_{t_0}^+$ , on peut écrire  $Z_t = \phi(t)g_{t_0}^+ \circ k_t$  d'après (4), ce qui prouve que  $(Z_t)$  est optionnel.

- Dans la suite, les processus de la forme  $Z_{g_t}$ , qui sont constants sur les intervalles contigus à  $H$ , joueront un rôle particulier ; il nous sera utile de pouvoir reconstituer la tribu prévisible à l'aide de processus de cette forme et de fonctions déterministes. Mais auparavant, il nous faut définir convenablement les processus  $(Z_{g_t})$  (rappelons que  $g_t$  peut prendre la valeur artificielle  $0^-$ ).

(10) CONVENTIONS A L'ORIGINE

- (11) • On posera, par définition  $k_{0^-} = a_{0^-} = k_0$ .

On remarquera qu'avec cette convention  $k_t = a_{g_t}$ ,  $\forall t > 0$ .

- (12) De plus,  $k_t(\omega) = k_{g_t}(\omega)$ ,  $\forall t > 0$  si et seulement si  $\omega$  est parfait.

Enfin, si  $(z_t) \in \mathcal{A}$  on conviendra que  $z_0$  est la constante  $z_0(\phi)$  (on remarquera que  $z_0 = z_0$  si  $(z_t) \in \mathcal{K}$ ).

Le processus  $(z_{g_t})_{t>0}$  est alors complètement défini, tout au moins quand  $(z_t) \in \mathcal{A}$ .

On peut alors énoncer

(13) PROPOSITION :  $\mathcal{K}$  est engendrée par la classe  $\mathcal{E}$  (stable pour la multiplication) des processus  $(z_t)$  pouvant s'écrire

$z_t = \phi(t-g_t) Y_{g_t}$ , où  $(Y_t)$  est un élément de  $\mathcal{A}$  et  $\phi$  une fonction borélienne bornée.

Démonstration : Montrons tout d'abord que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ , et, pour cela, donnons nous un élément  $(z_t)$  de  $\mathcal{E}$  s'écrivant  $\phi(t-g_t) Y_{g_t}$ . Il est

clair que  $z_0$  est une constante d'après les conventions (12). Il nous suffit donc de montrer, d'après la proposition (9) que  $(z_t)$  est prévisible. Il existe une fonction mesurable  $\alpha$  telle que  $Y_t(\omega) = \alpha(t, a_t(\omega))$ , ce qui entraîne  $Y_{g_t}(\omega) = \alpha(g_t, k_t(\omega))$  ; on a donc  $z_t = \phi(t-g_t) \alpha(g_t, k_t)$ , et  $(z_t)$  est prévisible d'après (9).

Montrons maintenant que  $\mathcal{E}$  engendre  $\mathcal{K}$  ;  $\mathcal{E}$  contient la famille des processus  $\phi(t-g_t) \alpha(g_t, a_{g_t}) = \phi(t-g_t) \alpha(g_t, k_t)$  ; en particulier, pour tout  $p > 0$  et toute variable aléatoire  $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurable  $\beta$  les processus  $e^{-p(t-g_t)} e^{-pg_t} \beta \circ k_t = e^{-pt} \beta \circ k_t$  sont dans  $\mathcal{E}$ . Un argument de classe monotone prouve alors que  $\mathcal{E}$  engendre  $\mathcal{K}$ .

CAS DES FERMES PARFAITS. Quand on a à étudier un fermé aléatoire sans points isolés, on prend naturellement comme espace canonique le sous-espace  $\Omega_p$  de  $\Omega$  formé des fermés parfaits de mesure de Lebesgue nulle. Tous les objets introduits sur  $\Omega$  ont un sens sur  $\Omega_p$  (à l'exception de la famille d'arrêt  $(a_t)$  qui n'opère pas sur  $\Omega_p$ ). On notera que la relation (12) qui caractérise la perfection permettrait de montrer que  $\Omega_p$  est universellement mesurable dans  $\Omega$ . Intéressons-nous maintenant



à la proposition (13). L'égalité  $k_t = k_{g_t}$  permet de remplacer partout dans la démonstration précédente  $a_t$  par  $k_t$ . On a donc le résultat suivant

(14) PROPOSITION : Sur l'espace canonique  $\Omega_p$  des fermés parfaits de mesure nulle, on peut remplacer  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{K}$  dans l'énoncé de la proposition (13).

COMPLEMENTS. Faisons la convention  $\mathbb{F}_{-}^0 = \{\phi, \Omega\}$ .

(15)  $d_t$  et  $d_t^-$  sont, pour tout  $t$  fixé, des temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_s^0)_{s \geq 0}$ . (Noter que nous n'avons pas encore complété les tribus).

(16)  $\mathbb{F}_{t-}^0 \cap \{g_t^+ < t\} = \mathbb{F}_t^0 \cap \{g_t^+ < t\}$ . En particulier, la trace de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathbb{F}_0^0$  sur l'ensemble des  $\omega$  ne contenant pas 0 est triviale.

(17)  $\mathbb{F}_{t-} = k_t^{-1}(\mathbb{F}_{\infty}^0)$ .

(17) est classique et facile, nous laissons la démonstration au lecteur ; (15) résulte immédiatement de (2). Montrons (16) : donnons-nous un événement  $A$  de  $\mathbb{F}_t^0$  ; on peut écrire, puisque  $k_t = k_{t+\varepsilon}$  sur  $\{t + \varepsilon < d_t\}$ ,

$$\begin{aligned} 1_A \cap \{g_t^+ < t\} \cap \{t + \varepsilon < d_t\} &= 1_A \circ k_{t+\varepsilon} \cap \{g_t^+ < t\} \cap \{t + \varepsilon < d_t\} \\ &= 1_A \circ k_t \cap \{g_t^+ < t\} \cap \{t + \varepsilon < d_t\}. \end{aligned}$$

Il reste à faire décroître  $\varepsilon$  vers 0 ; il vient

$$1_A \cap \{g_t^+ < t\} = 1_A \circ k_t \cap \{g_t^+ < t\} \in \mathbb{F}_{t-}^0 \cap \{g_t^+ < t\}.$$

Rappelons enfin un résultat qui, pratiquement, a déjà été vu.

(18)  $\mathbb{F}_{t-}^0$  est engendrée par les variables aléatoires  $Z_{g_t}$  quand  $(Z_t)$  décrit  $\mathcal{A}$  ; on peut remplacer  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{K}$  sur l'espace canonique  $\Omega_p$  des fermés parfaits.

En effet, les processus  $(Z_{g_t})_{t>0}$  étant prévisibles d'après (13), les variables aléatoires  $Z_{g_t}$  sont  $\mathbb{F}_{t-}^0$ -mesurables ; inversement une variable aléatoire  $z$   $\mathbb{F}_{t-}^0$ -mesurable vérifie  $z = z \circ k_t = z \circ a_{g_t}$  ; on obtient donc le processus  $(Z_t)$  cherché en posant  $Z_t = z \circ a_t$ .

#### 4) L'AUGMENTATION HABITUELLE DE $(\mathbb{F}_t^0)$ .

Munissons l'espace mesurable  $(\Omega, \mathbb{F}_\infty^0)$  d'une probabilité  $P$  ; nous appellerons  $(\mathbb{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$  la filtration obtenue en adjoignant à chaque tribu  $\mathbb{F}_t^0$  les ensembles  $P$ -négligeables de  $\mathbb{F}_\infty^0$ . Pour être en règle avec le droit coutumier de la théorie générale des processus, nous nous devons de poser  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{0-}$  ;  $\mathbb{F}_{0-}$  n'est donc pas la complétée de  $\mathbb{F}_0^0$  (qui, rappelons le, est triviale). On devra donc souvent examiner spécialement ce qui se passe à l'origine, ce qui rendra la rédaction de cet article encore plus passionnante.

Dans les deux propositions qui suivent, (et plus généralement, chaque fois qu'interviendront des processus de la forme  $(Z_{g_t})$  ou  $(Z_{g_t}^+)$ ),

il devient nécessaire d'adjoindre  $0^-$  à l'ensemble d'indices du processus  $(Z_t)$ . On fera la convention suivante

- (19) • Un processus  $(Z_t)_{t>0}$ -progressif (resp. optionnel, prévisible) sera la donnée d'un processus  $(Z_t)_{t>0}$  progressif (resp. optionnel, prévisible) et d'une variable aléatoire  $Z_{0-}$   $\mathbb{F}_0^0$ -mesurable.

Rappelons que les résultats du cadre algébrique nécessitent la convention (10) qui est plus contraignante.

- (20) PROPOSITION : 1) Supposons  $(Z_t)_{t>0}$ -progressif ; le processus  $(Z_{g_t}^+)_{t>0}$  est progressif,  $(Z_{g_t}^+)^1_{\{g_t^+ < t\}}$  est optionnel,  $(Z_{g_t}^+)^1_{\{g_t^+ < t\}}$  est prévisible.



2) Supposons  $(z_t)_{t>0}$  -optionnel (resp. prévisible) ;  
 $(z_{g_t}^+)$  (resp.  $(z_{g_t}^-)$ ) est optionnel (resp. prévisible)

Démonstration : La première partie du 1) résulte immédiatement, par composition d'applications, de la définition de la tribu progressive ; elle entraîne facilement 2). De plus, les trajectoires du processus  $(z_{g_t}^+)$  étant constantes sur les intervalles contigus à H,

on a

$$z_{g_t}^+ 1_{\{g_t^+ < t\}} = (\lim_{s \uparrow t} z_{g_s}^+) 1_{\{g_t^+ < t\}} ;$$

$$z_{g_t}^- 1_{\{g_t^- < t\}} = (\lim_{s \uparrow t} z_{g_s}^-) 1_{\{g_t^- < t\}}.$$

Les deux processus figurant entre parenthèses étant prévisibles, cela termine la démonstration.

(21) PROPOSITION : 1)  $\underline{F}_t^- \cap \{g_t^+ < t\} = \underline{F}_t \cap \{g_t^+ < t\} \quad \forall t > 0$

2) Sur l'évènement  $\{g_t^+ < t\}$  (resp.  $\{g_t^- < t\}$ ),

$\underline{F}_t^-$  (resp.  $\underline{F}_t$ ) est engendrée par les variables aléatoires  $z_{g_t}^+$

quand  $(z_t)_{t>0}$  décrit la famille des processus optionnels bornés.

3) Dans le cas où H est parfait (i.e quand P est portée par  $\Omega_p$ ) on peut, dans le point 2) remplacer "optionnel" par "prévisible".

Démonstration : Pour  $t = 0$ , tout est trivial ; supposons  $t > 0$  ; le point 1) n'est alors que le complété du résultat algébrique (16). Plaçons-nous maintenant sur l'évènement  $\{g_t^+ < t\}$  et donnons-nous un processus  $(z_t)_{t>0}$  optionnel ; le processus  $(z_{g_s}^+ 1_{\{g_s^+ < s\}})_{s>0}$  est prévisible d'après (20), et la variable aléatoire  $z_{g_t}^+ 1_{\{g_t^+ < t\}}$

$\mathbb{F}_t^-$ -mesurable ; inversement, si  $z$  est  $\mathbb{F}_t^-$ -mesurable, il existe

une variable aléatoire  $z'$  presque-sûrement égale à  $z$ ,

$\mathbb{F}_t^-$ -mesurable, qui d'après (18) est de la forme  $z_{g_t}$  pour un élément

$(z_t)$  de  $\mathcal{H}$  (qui est optionnel).

Cela démontre la partie du point 2) qui concerne  $\mathbb{F}_t^-$ . Celle qui

concerne  $(\mathbb{F}_t)$  est alors une plaisanterie si l'on tient compte du 1). Enfin, dans le cas où  $H$  est parfait, on peut remplacer  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{K}$  dans ce qui précède ; la partie 3) en résulte facilement.

##### 5) LES TEMPS D'ARRÊT DE LA FILTRATION $\mathbb{F}_t^0$

On peut reconnaître si une variable aléatoire  $T$  est un temps d'arrêt en regardant les trajectoires du processus  $(T \circ k_s)_{s \geq 0}$

(22) PROPOSITION : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$  ;  
alors

$$(23) \quad \begin{cases} T \circ k_s(\omega) > s, & \forall s < T(\omega) \\ T \circ k_s(\omega) = T(\omega), & \forall s > T(\omega). \end{cases}$$

Supposons maintenant  $T$  prévisible ; on a

$$(24) \quad \begin{cases} T \circ k_s(\omega) > s, & \forall s < T(\omega) \\ T \circ k_s(\omega) = T(\omega), & \forall s > T(\omega). \end{cases}$$

En particulier  $T \circ k_T = T$ .

Inversement, toute variable aléatoire  $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurable vérifiant (23)  
(resp. (24)) est un temps d'arrêt (resp. un temps d'arrêt prévisible  
de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ .

Démonstration : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$  ;  
 le processus  $z_s = 1_{\Pi_{T, \infty}}(s)$  est prévisible et, d'après (9), satisfait à la relation  $z_s = z_s \circ k_s$ .

Cela s'écrit

$$s < T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) > s$$

$$s > T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) < s.$$

On a, par conséquent

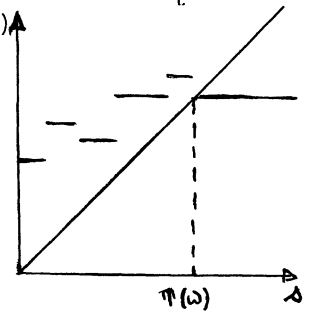
$$(25) \quad T(\omega) = \inf\{t ; T \circ k_t(\omega) < t\} \quad \forall \omega.$$

Ecrivons alors (25) pour l'épreuve  $k_s(\omega)$  ; il vient

$T \circ k_s(\omega) = \inf\{t ; T \circ k_{s \wedge t}(\omega) < t\}$ . Supposons alors  $s > T(\omega)$  et montrons que  $T \circ k_s(\omega) = T(\omega)$ . Puisque le processus  $(T \circ k_{s \wedge t})_{t \geq 0}$  est l'arrêté à  $s$  du processus  $(T \circ k_t)_{t \geq 0}$ , on voit tout de suite que  $\{t ; T \circ k_{s \wedge t}(\omega) < t\} = \{t ; T \circ k_t(\omega) < t\} = ]T(\omega), \infty[$ .

Il reste à considérer la borne inférieure de ces ensembles pour terminer la démonstration. Le cas prévisible se montre de la même façon. La réciproque est immédiate puisque  $\{T < t\} = \{T \circ k_t < t\}$ .

Dellacherie, qui dans [6], a étudié l'espace canonique des fermés réduits à un seul point, retrouvera ci-contre une de ses illustrations favorites, qui figure ici le graphe (pour  $\omega$  fixé), d'une trajectoire du processus  $T \circ k_s(\omega)$ .



Si  $T$  est prévisible, ce graphe doit en outre couper la première bissectrice au point  $T(\omega)$  et ne pas la rencontrer avant.

(26) COROLLAIRE : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ . Alors

$$1) \quad k_T^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0) \subset \mathbb{F}_T^0$$

$$2) \quad z \in \mathbb{F}_T^0 \iff z \circ k_u(\omega) = z(\omega) \quad \forall u > T(\omega)$$

$$3) \quad \text{Si } T \text{ est prévisible, } k_T^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0) = \mathbb{F}_T^0; \quad z \text{ est } \mathbb{F}_T^0\text{-mesurable} \\ \text{si et seulement si } z \circ k_u(\omega) = z(\omega), \quad \forall u > T(\omega).$$

Démonstration : Le point 1) est une conséquence immédiate du fait que les processus  $(z \circ k_t)_{t \geq 0}$  sont prévisibles. Montrons en détail

la partie 2) ; soit  $z$  une variable aléatoire  $\mathbb{F}_T^0$ -mesurable ;

$z \cdot 1_{\{T < t\}}$  est  $\mathbb{F}_t^0$  mesurable, et l'on a donc

$$z \circ k_{t+\varepsilon} \cdot 1_{\{T \circ k_{t+\varepsilon} < t\}} = z, \quad \forall \varepsilon > 0. \text{ Mais la proposition (22) en-}$$

traîne facilement l'équivalence  $T \circ k_{t+\varepsilon}(\omega) < t \iff t > T(\omega)$  ; on a

$$\text{donc l'égalité } z \circ k_{t+\varepsilon} \cdot 1_{\{T < t\}} = z, \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ ce qui est équiva-}$$

lent à la relation cherchée ; réciproquement, il n'y a aucune difficulté à faire le raisonnement en sens inverse pour obtenir l'équivalence 2). Le cas prévisible se traite encore plus facilement.

Nous allons maintenant examiner comment les résultats sur les tribus  $(\mathbb{F}_t^0)$  ((15) et suivant) se généralisent aux tribus des événements antérieurs à un temps d'arrêt  $T$ . Les deux points suivants sont immédiats, la démonstration étant la même que dans le cas où le temps d'arrêt  $T$  est constant.

$$(27) \quad d_T \text{ et } d_T^- \text{ sont des temps d'arrêt de la filtration } (\mathbb{F}_t^0)$$

$$(28) \quad k_T^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0) \cap \{g_T^+ < T\} = \mathbb{F}_T^0 \cap \{g_T^+ < T\} = \mathbb{F}_T^0 \cap \{g_T^+ < T\}.$$

Le résultat (17) ne se généralise qu'aux temps d'arrêts prévisibles (voir (26)).

$$(29) \quad k_T^{-1}(\mathbb{F}_\infty^0) \cap \{g_T < \infty\} \text{ est engendrée par les variables aléatoires} \\ z_{g_T} \cdot 1_{\{g_T < \infty\}} \text{ quand } (z_t) \text{ décrit } \mathcal{H}.$$

(Ce résultat devient inexact si l'on remplace  $k_T^{-1}(F_\infty^0)$  par  $F_{T-}^0$ , excepté quand  $T$  prévisible). Supposons en effet  $z$  de la forme  $y \circ k_T^{-1} \mathbb{1}_{\{g_T < \infty\}}$  ;  $z$  s'écrit alors  $z_{g_T^{-1}\{g_T < \infty\}}$  pour  $z_t = y \circ a_t$ . Inversement, si  $z$  s'écrit  $z_{g_T^{-1}\{g_T < \infty\}}$  pour un élément  $(z_t)$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $z = (z_{g_\infty^{-1}\{g_\infty < \infty\}}) \circ k_T^{-1} \mathbb{1}_{\{g_T < T\}}$ .

(30) PROPOSITION : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(F_t)$ .

$$1) F_{T-} \cap \{g_T^+ < T\} = F_T \cap \{g_T^+ < T\}.$$

2) Sur l'évènement  $\{g_T^+ < T\}$ ,  $F_{T-}$  est engendrée par les variables aléatoires  $z_{g_T}$  quand  $(z_t)_{t \geq 0}$  décrit la famille des processus optionnels bornés.

3) Supposons  $T$  prévisible ; sur l'évènement  $\{g_T < T\}$ ,  $F_{T-}$  est engendrée par la même famille.

4) Supposons  $H$  parfait ; on peut remplacer la famille des processus optionnels bornés par celle des prévisibles bornés dans les points 2) et 3).

Démonstration : 1) est facile, compte tenu de (28) ; montrons 3) : puisque  $T$  est prévisible,  $F_{T-}^0 = k_T^{-1}(F_\infty^0)$  et l'on peut calquer

la démonstration de (21). Reste à montrer le point 2) : soit

$$T_n = T + \frac{1}{n} ; T_n \text{ est prévisible et, sur l'évènement } \{g_T^+ < T\}$$

les variables aléatoires  $g_{T_n}$  décroissent vers  $g_T$  (ou  $g_T^+$ ) de manière stationnaire. Soit alors  $A$  un évènement de  $F_{T-}$  ; il appartient à chacune des tribus  $F_{T_n-}$  et l'on a donc d'après 2)

$$A \cap \{g_{T_n} < T_n\} \cap \{g_T^+ < T\} = z_{g_{T_n}^{-1}\{g_{T_n} < T_n\}}^{-1} \mathbb{1}_{\{g_T^+ < T\}}$$

pour un processus  $(z_t^n)$  optionnel borné (prévisible dans le cas parfait).

Considérons alors le processus  $(Z_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Z_t^n)$  ; la décroissance stationnaire des variables aléatoires  $g_{T_n}$  entraîne facilement que

$$A \cap \{g_T^+ < T\} = Z_{g_T^+} 1_{\{g_T^+ < T\}}.$$

Inversement, il est à peu près évident qu'une variable aléatoire de la forme  $Z_{g_T^+} 1_{\{g_T^+ < T\}}$  est  $\mathbb{F}_T$ -mesurable.

Notons une conséquence facile de la proposition (22) : si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ ,

$$(31) \quad k_S \circ k_T = k_{S \wedge T} ; \text{ en particulier } k_T \circ k_T = k_T.$$

Nous terminerons par un résultat un peu plus amusant

(32) NOTATIONS : Si  $\omega \in \Omega$  nous noterons  $G(\omega)$  (resp.  $D(\omega)$ ) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à  $\omega$  ;  $G$  (resp.  $D$ ) sera l'ensemble aléatoire des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à  $H$ .

(33) PROPOSITION : Soit  $T$  un temps d'arrêt tel que  $[[T]] \subset H^c$  ;  $T$  est accessible ; si, de plus,  $D$  est totalement inaccessible,  $T$  est prévisible.

Démonstration : Quitte à remplacer  $T$  par une variable aléatoire équivalente, on peut supposer que  $T$  est un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$  et que  $T(\omega) \in \omega^c$  pour tout  $\omega$  tel que  $T(\omega)$  soit fini. Nous allons montrer que l'ensemble aléatoire prévisible  $A = \{s, \omega ; T \circ k_s(\omega) = s\}$  est mince, et plus précisément qu'il est inclus dans  $(D \cap [[0, T]]) \cup [[T]]$  ; il est clair d'après la proposition (22) que  $A$  est inclus dans  $[[0, T]]$  ; il nous suffit donc de montrer l'inclusion

$$(34) \quad A \cap [[0, T]] \subset D \cap [[0, T]].$$

Soit  $(s_0, \omega)$  un couple vérifiant  $s_0 < T(\omega)$ ,  $T \circ k_{s_0}(\omega) = s_0$ .

a) Raisonnons par l'absurde, et montrons d'abord que  $s_0 \in \omega$  ; s'il n'en était pas ainsi, le processus  $(T \circ k_s)$  prendrait la valeur  $s_0$  sur tout l'intervalle  $]g_{s_0}(\omega), d_{s_0}(\omega)[$  ; on aurait en particulier  $T \circ k_s(\omega) = s_0 < s, \forall s \in ]s_0, d_{s_0}(\omega)[$ , ce qui entraînerait  $T(\omega) = \inf\{s ; T \circ k_s(\omega) < s\} < s_0$ , contrairement à l'hypothèse.

b) Montrons maintenant que  $s_0 \in \omega^C \cup D(\omega)$ , ce qui achèvera la démonstration de (34). Ecrivons que  $T[k_{s_0}(\omega)] \in (k_{s_0}(\omega))^C$  ; il vient  $s_0 \in (\omega \cap [0, g_{s_0}(\omega)])^C = \omega^C \cup ]g_{s_0}(\omega), \infty[$  ; le résultat en découle immédiatement.

Il reste à montrer que  $\llbracket T \rrbracket \subset A$ , ou encore que  $T \circ k_T = T$ . D'après (22)  $T \circ k_s = T \quad \forall s > T$  ; les processus  $(T \circ k_s)$  étant constants sur l'intervalle  $]g_T, d_T[$ , non vide par hypothèse, il est facile d'en déduire que  $T \circ k_T = T$ . Supposons enfin que  $D$  soit totalement inaccessible ; nous avons vu que  $A$  était contenu dans  $D \cup \llbracket T \rrbracket$  ; d'autre part  $D \cap A$  est évanescent puisque  $A$  est prévisible mince ; on a donc  $A = \llbracket T \rrbracket$ , ce qui montre que  $T$  est prévisible.

### S3. LE PREMIER PROCESSUS PONCTUEL ASSOCIÉ À H.

1.

- Rappelons que nous avons appelé respectivement G et D les ensembles aléatoires formés des extrémités gauches et droites des intervalles contigus à H.

Les fermés  $\omega$  étant d'intérieur vide, un petit raisonnement topologique élémentaire prouve les égalités

$$(35) \quad \overline{G} = H \cup ]0, \infty[ \quad ; \quad \overline{D} = \overline{H \cap ]0, \infty[}$$

On peut donc (presque) reconstituer H à l'aide de G ou D modulo, c'est une véritable plaie, les ennuis à l'origine : la connaissance de G, par exemple, ne permet pas de décider si 0 appartient à  $\omega$ . On peut se consoler en remarquant que, dans les cas usuels, une hypothèse supplémentaire à l'origine (le plus souvent  $0 \in \omega$  p.s), permet d'éviter ces jérémiades au lecteur.

$$(36) \quad \underline{\text{DEFINITIONS}} : \text{ Nous poserons } \pi_g(\omega, dt, dx) = \sum_{s \in G} \varepsilon_{(s, d_s(\omega) - s)}(dt, dx).$$

( $\varepsilon_{a,b}$  désignant la masse de Dirac au point (a,b) de  $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{+*})$ )

$\mathbb{R}_{+*}$  désigne  $(\mathbb{R}_+ - \{0\}) \cup \{+\infty\}$  ; en fait, pour éviter une débauche d'astérisques, nous le désignerons dans la suite par E,  $\mathcal{E}$  désignant sa tribu borélienne.

Pour  $\omega$  fixé,  $\pi_g(\omega, dt, dx)$  est une mesure, sur  $\mathbb{R}_+ \times E$ , somme dénombrable de masses de Dirac ;  $\pi_g$  est donc ce qu'on appelle vulgairement un processus ponctuel d'espace d'états  $\mathbb{R}_+ \times E$ . La proposition suivante va, en particulier, nous montrer qu'elle est  $\sigma$  finie ; posons  $e(s, x) = e^{-s}(1 - e^{-x})$  ( $s \in \mathbb{R}_+, x \in E$ ).

$$(37) \quad \underline{\text{PROPOSITION}} : \int_{\mathbb{R}_+ \times E} e(s, x) \pi_g(ds, dx) = 1.$$

En effet, l'intégrale figurant au premier membre s'écrit

$$\sum_{s \in G} e^{-s}(1 - e^{-(d_s - s)}) = \sum_{s \in G} \int_s^{d_s} e^{-u} du = \int_0^\infty e^{-u} du = 1.$$



- Avant de poursuivre, nous avons à rappeler certaines notions classiques de la théorie des processus filtrés. On doit tout d'abord étendre aux fonctions à trois arguments  $\phi : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , puis aux mesures et aux noyaux, les définitions usuelles de la théorie générale des processus. Rappelons les définitions simples figurant dans [7] pages 384 à 390 ; nous nous bornerons à traiter le cas optionnel, mais on peut, bien entendu, remplacer dans ce qui suit le mot optionnel par accessible ou prévisible. Appelons  $\mathcal{O}$  la tribu optionnelle usuelle sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

(38) DEFINITIONS :

- Un processus paramétré  $\phi$  sera une application de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\phi$  sera dite optionnelle si elle est mesurable pour les tribus  $\mathcal{O} \times \mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  
 $\phi$  sera appelé évanescent si pour  $P$ -presque tout  $\omega$   $\phi(\cdot, \omega, \cdot) = 0$ .
- Une mesure aléatoire intégrable positive est un noyau  $\mu(\omega, dt, dx)$  tel que  
 (i)  $\forall \omega \in \Omega \quad A \rightarrow \mu(\omega, A)$  est une mesure positive sur  $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E})$   
 (ii)  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E} \quad \omega \rightarrow \mu(\omega, A)$  est  $\mathbb{F}_\infty$ -mesurable.  
 (iii)  $E[\mu(\cdot, \mathbb{R}_+ \times E)] < \infty$ .

On peut associer à  $\mu$  une mesure positive bornée  $\bar{\mu}$  sur

$(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{F}_\infty \times \mathcal{E})$  en posant

$$\bar{\mu}(\phi) = E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \phi(t, \cdot, x) \mu(\cdot, dt, dx) \right].$$

Si le noyau  $\mu$  vérifie (i) et (ii), et si la mesure  $\bar{\mu}$  est  $\sigma$ -finie, nous dirons que  $\mu$  est une mesure aléatoire positive  $\sigma$ -intégrable. Si, de plus, pour tout  $\omega$ ,  $\mu(\omega, \cdot)$  est somme dénombrable de masses de Dirac, nous dirons que  $\mu$  est un processus ponctuel.

(39) PROJECTION DUALE D'UNE MESURE ALÉATOIRE.

(40) DEFINITION : Soit  $\mu$  une mesure aléatoire positive intégrable ; nous dirons que  $\mu$  est optionnelle si, quelque soit  $K$  dans  $\mathcal{E}$ , le processus croissant  $A_t^K$  défini  $A_t^K(\omega) = \mu(\omega, [0, t] \times K)$  est optionnel.

(41) THEOREME (Jacod) : Soit  $\mu$  une mesure aléatoire positive intégrable ; il existe une mesure aléatoire  $\lambda$  positive intégrable optionnelle unique telle que

$$(42) \quad E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \phi(t, \cdot, x) \lambda(\cdot, dt, dx) \right] = E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \phi(t, \cdot, x) \mu(\cdot, dt, dx) \right]$$

quelque soit le processus  $\phi$  optionnel positif

$\lambda$  sera appelée projection duale optionnelle de  $\mu$  ; on la notera  $\mu^0$ .

La définition (40) et le théorème (41) s'étendent facilement au cas où  $\bar{\mu}$ , au lieu d'être supposée bornée, est simplement  $\sigma$ -finie sur la tribu optionnelle. En particulier, puisque le processus ponctuel  $\pi_g$  vérifie (37), la mesure  $\bar{\pi}_g$  est  $\sigma$ -finie sur les tribus optionnelle et prévisible ; on pourra donc parler de la projection duale optionnelle  $\pi_g^0$  ou prévisible  $\pi_g^p$  de  $\pi_g$ .

NOYAUX OPTIONNELS. Nous dirons qu'un noyau positif  $N(s, \omega, dx)$  de  $\mathcal{B}(E)$  dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{F}_\infty$  est optionnel si, pour toute fonction  $\phi$  borélienne positive le processus  $\int_E N(\omega, s, dx) \phi(x) = (N\phi)_s(\omega)$  est optionnel.

Pour abréger on notera le noyau  $(N_t)_{t \geq 0}$ .

Un argument de classes monotones prouve que, quelque soit le processus paramétré positif  $u$ , le processus  $(Nu)_s$  défini par la formule

$$Nu_s(\omega) = \int_E N(\omega, s, dx) u(s, \omega, x) \text{ est optionnel.}$$

2. Désintégration d'une mesure aléatoire optionnelle. Dans ce paragraphe  $(E, \mathcal{E})$  désignera un sous ensemble universellement mesurable d'un compact métrisable muni de sa tribu borélienne,  $\mu(\omega, dt, dx)$  une mesure aléatoire optionnelle sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  ; on désignera par  $\bar{\mu}$  la "mesure de Doléans" associée à  $\mu$  : ce sera une mesure sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$  définie par la formule  $\bar{\mu}(U) = E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} U(t, \omega, x) \mu(\omega, dt, dx) \right]$  si  $U$  est un processus paramétré  $> 0$ .

• On supposera que  $\bar{\mu}$  est  $\sigma$ -finie sur la  $\sigma$ -algèbre optionnelle.

(4.3) PROPOSITION : Supposons que  $\bar{\mu}$  soit une mesure optionnelle bornée. Il existe un couple  $(\ell_t, N_t)$  où  $(\ell_t)$  est un processus croissant optionnel intégrable,  $(N_t)$  un noyau optionnel markovien vérifiant, quelque soit le processus paramétré  $u$ .

$$(4.4) \quad \int_{\mathbb{R}_+ \times E} (u(s, \cdot, x)) \mu(\cdot, ds, dx) = \int_0^\infty d\ell_s (Nu)_s \quad P\text{-p.s.}$$

Démonstration : Supposons d'abord  $E$  compact métrisable et définissons, pour chaque fonction  $\phi$  continue  $> 0$  sur  $E$  les processus croissants optionnels intégrables

$$\ell_t^\phi = \int_{[0, t] \times E} \phi(x) \mu(\cdot, dt, dx) \quad ; \text{ on posera } \ell_t^1 = \ell_t.$$

La mesure aléatoire  $d\ell_t^\phi$  est absolument continue par rapport à  $d\ell_t$ .

D'après un résultat classique de théorie générale des processus, il existe un processus optionnel  $C_t^\phi$  vérifiant  $d\ell_t^\phi = C_t^\phi d\ell_t$ . D'autre part si  $\lambda(dt, d\omega)$  désigne la mesure de Doléans associé à  $(\ell_t)$ , pour tout couple  $(\phi_1, \phi_2)$  de fonctions continues positives sur  $E$ , les égalités suivantes ont lieu  $\lambda$ -presque partout

$$(4.5) \quad C_t^{\phi_1 + \phi_2} = C_t^{\phi_1} + C_t^{\phi_2} \quad ; \quad C_t^1 = 1.$$

Faisons parcourir à  $\phi$  un espace vectoriel dénombrable sur  $\mathbb{Q}$ , réticulé, dense dans  $C(E)$  que nous noterons  $\mathcal{H}$ . Il existe un ensemble optionnel  $\Gamma$  tel que les égalités (4.4) aient lieu en tout point  $(t, \omega)$  de  $\Gamma$  pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ , et tel que  $\lambda(\Gamma^c) = 0$ . L'application  $\phi \rightarrow C_t^\phi(\omega)$  se prolonge alors en une mesure de probabilité  $N(t, \omega, dy)$  en tout point  $(t, \omega) \in \Gamma$ . On définit  $N(t, \omega, dy)$  sur  $\Gamma^c$  en posant  $N(t, \omega, dy) = p(dy)$ ,  $p$  étant une probabilité fixée arbitraire sur  $(E, \mathcal{E})$  ; il est facile de voir que le couple  $(\ell_t, N_t)$  répond à la question : on peut en effet écrire pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{H}$  et tout processus  $(Z_s)$

$$\int_0^\infty d\ell_s N_s \phi Z_s = \int_0^\infty d\ell_s C_s^\phi Z_s = \int_0^\infty Z_s d\ell_s^\phi = \int_{[0, \infty] \times E} Z_t \phi(x) \mu(\cdot, dt, dx)$$

- Dans le cas général,  $E$  est contenu dans un compact métrisable  $\bar{E}$  ;  
appelons  $\nu$  la mesure bornée sur  $\bar{E}$  définie par la formule

$$\nu(h) = E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \mu(\omega, dt, dx) h(x) \right] \quad (h \in \mathcal{E})$$

et soit  $J$  un borélien de  $E$  portant  $\nu$ . Pour presque tout  $\omega$ ,  $\mu(\omega, \cdot)$  est portée par  $\mathbb{R}_+ \times J$ , et  $N(\cdot, \cdot, J^c)$  est nulle  $\lambda$ -presque partout. Il est alors facile de modifier le noyau  $(N_t)$  de manière à ce qu'il soit porté par  $J$ .

- (46) **REMARQUE** : On notera que la désintégration (44) est valable pour (presque) tout  $\omega$  :  
Le couple  $(d\ell_t(\omega), N_t(\omega, dx))$  n'est autre que la désintégration ordinaire (pour  $\omega$  fixé) de la mesure bornée  $\mu(\omega, dt, dx)$ . La seule information nouvelle apportée par (43) est qu'on peut choisir une version optionnelle de cette désintégration.  
Passons au cas où  $\bar{\mu}$  n'est plus supposée bornée mais seulement  $\sigma$ -finie sur la tribu optionnelle.

- (47) **PROPOSITION** : Soit  $u_0$  un processus paramétré optionnel strictement positif tel que le processus croissant  $(A_t)$  défini par

$$A_t = \int_{[0, t]} u_0(s, \cdot, x) \mu(\cdot, ds, dx)$$

soit localement intégrable. Il existe alors un couple optionnel  $(\ell_t, N_t)$  vérifiant (44) et tel que  $\ell_t$  soit un processus croissant localement intégrable vérifiant  $N_t u_0 \equiv 1$ .  
On dira dans ce cas que le couple  $(\ell_t, N_t)$  est normalisé par  $u_0$ .

**Démonstration** : 1) Supposons d'abord que nous ayons choisi  $u_0$  de manière à ce que le processus croissant  $(A_t)$  soit intégrable. La mesure aléatoire  $u_0 \cdot \mu$  satisfait alors aux hypothèses (43) et admet une désintégration  $(\ell_t, N_t)$  vérifiant  $N_t 1 \equiv 1$ . Définissons le noyau optionnel  $N_t^1$  en posant  $N_t^1 \phi = N_t(\frac{\phi}{u_0})$  ; le couple  $(\ell_t, N_t^1)$  répond à la question.

2) Dans le cas général, on construit d'abord un processus optionnel  $(\alpha_t)_t > 0$  (non paramétré) positif, tel que  $(\frac{1}{\alpha_t})$  soit localement intégrable et que le processus croissant  $\int_0^t \alpha_s dA_s$  soit intégrable. On se ramène alors à la première partie en considérant la fonction  $u'_0(s, \omega, x) = \alpha_s(\omega) u_0(s, \omega, x)$  ; il existe une désintégration  $(\ell_t'', N_t'')$  telle que  $(\ell_t'')$  soit intégrable et  $N_t''(u'_0) \equiv 1$ . Le couple  $(\ell_t, N_t)$  défini par les égalités

$$d\ell_t = \frac{1}{\alpha_t} d\ell_t'', \quad N_t = \alpha_t N_t''$$

satisfait aux conditions demandées.

Dans la pratique on se limitera aux désintégrations  $(\ell_t, N_t)$  ayant les propriétés suivantes

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_t \text{ est un processus croissant optionnel localement intégrable} \\ \text{il existe un processus paramétré optionnel } u \text{ tel que } (Nu)_t \text{ soit} \\ \text{un processus strictement positif et fini.} \end{array} \right.$$

(49) DEFINITION : Un couple  $(\ell_t, N_t)$  optionnel vérifiant (48) et (44) sera appelé désintégration optionnelle de  $\mu$ .

-  $N_t$  est normalisée par la fonction  $u_0(s, \omega, x) = \frac{u(s, \omega, x)}{(Nu)(s, \omega)}$

- Deux désintégrations optionnelles  $(\ell, N)$  et  $(\ell', N')$  de  $\mu$  sont équivalentes au sens suivant :

$$(50) \quad \text{il existe un processus optionnel } (\alpha_t) \text{ strictement positif et fini tel que } d\ell'_t = \alpha_t d\ell_t, \quad N'_t = \frac{1}{\alpha_t} N_t.$$

Supposons enfin que la mesure aléatoire  $\mu$  ne soit plus optionnelle ; on la suppose simplement mesurable, et telle que  $\bar{\mu}$  soit  $\sigma$ -finie sur la tribu optionnelle. On peut alors désintégrer la projection duale optionnelle  $\mu^0$  de  $\mu$ , et l'on obtient le résultat suivant

(51) PROPOSITION : Il existe un couple  $(\ell_t, N_t)$  optionnel et vérifiant (48), unique à l'équivalence (50) près tel que

$$E \left[ \int_{\mathbb{R}_+ \times E} u(s, \cdot, x) \mu(\cdot, ds, dx) \right] = E \left[ \int_0^\infty (Nu)_s d\rho_s \right]$$

quelque soit le processus positif optionnel  $u$ .

### 3. Désintégrations optionnelles de $\pi_g$ : TEMPS LOCAL ET NOYAU DE LEVY D'UN FERME ALEATOIRE.

Revenons au processus ponctuel  $\pi_g$  ; une désintégration optionnelle de cette mesure aléatoire est, par définition, un couple  $(\ell_t, N_t)$  optionnel vérifiant (48) et

$$(52) \quad E \left[ \sum_{s \in G} u(s, \cdot, d_s - s) \right] = E \left[ \int_0^\infty d\ell_s (Nu)_s \right]$$

quelque soit le processus optionnel positif  $u$ .

Le processus croissant  $(\ell_t)$  s'appellera le temps local de la désintégration, et  $(N_t)$  son noyau de Lévy. Deux désintégrations sont équivalentes au sens de (50). Si  $\lambda(dt, d\omega)$  est la mesure de Doléans du processus croissant  $(\ell_t)$  la classe des ensembles aléatoires de mesure nulle pour  $\lambda$  est indépendante de la désintégration choisie ; il en

est de même des quotients  $\frac{N_t u}{N_t v}$  quand ils ont un sens. Beaucoup des résultats que nous obtiendrons seront indépendants de la désintégration optionnelle de  $\pi_g$  choisie, mais il est souvent utile de la fixer par le choix d'une fonction de normalisation  $u_0$  comme en (47). Par exemple nous verrons plus loin que, si le fermé aléatoire est discret, on normalise par la fonction 1 ; si le fermé est régénératif non discret, on normalise par la fonction  $u_0(s, \omega, x) = (1 - e^{-x})$ .

Ce dernier procédé n'est pas toujours le plus naturel (en particulier quand  $H$  a des points isolés), mais il présente l'avantage d'être toujours possible (d'après (37)). Nous appellerons dans la suite temps local et noyau de Lévy normalisés ou, plus brièvement temps local et noyau de Lévy du fermé aléatoire le couple  $(\ell_t^0, N_t^0)$  normalisé par la condition

$$\int_E N^0(t, \omega, dx) [1 - e^{-x}] = 1 \quad \forall t \quad \forall \omega.$$

(53) PROPOSITION : Si  $(\lambda_t, N_t)$  est une désintégration optionnelle de  $\pi_g$ , le support de la mesure aléatoire  $d\lambda_t$  est  $H \cup \{0\}$ .

Démonstration : La relation (52) appliquée à la fonction

$$u(s, \omega, x) = 1_{(H \cup \{0\})^c}(s, \omega) \text{ prouve immédiatement que } d\lambda_t \text{ est portée}$$

par  $H \cup \{0\}$  ; le support  $S$  de  $d\lambda_t$  est donc un fermé optionnel contenu dans  $H \cup \{0\}$ . On peut supposer d'une part que  $0 \in H$  p.s.

(puisque  $\pi_g$  est le même pour  $H$  et  $H \cup \{0\}$ ), et d'autre part raisonner uniquement sur la désintégration normalisée  $(\lambda_t^0, N_t^0)$ , puisque la classe des ensembles négligeables pour la mesure aléatoire  $d\lambda_t$  ne dépend pas de la désintégration choisie. Soit  $T$  un temps d'arrêt,  $u$  le processus paramétré défini par  $u(s, \omega, x) = e^{-s}(1 - e^{-x}) 1_{\{s > T\}}$  ; la relation (52) appliquée à  $u$  nous permet d'écrire

$$E \left[ \int_{[T, \infty[} e^{-s} d\lambda_s^0 \right] = E \left[ \sum_{\substack{s \in G \\ s > T}} (e^{-s} - e^{-d_s}) \right] = E \left[ \sum_{\substack{s \in G \\ s > T}} \int_s^d e^{-u} du \right]$$

On a donc démontré l'égalité suivante

$$(54) \quad E[e^{-d_T^-}] = E \left[ \int_{[T, \infty[} e^{-s} d\lambda_s^0 \right].$$

Introduisons alors les débuts du support  $S$  de  $(d\lambda_t)$

$$\delta_t^-(\omega) = \inf\{s > t, (s, \omega) \in S\}$$

Fixons  $t$ , et considérons le temps d'arrêt  $T = \delta_t^-$  ; puisque  $\{T\}$  est dans  $S$ , donc dans  $H$ , on a  $d_T^- = T$ , et la formule (54) permet d'écrire

$$E[e^{-\delta_t^-}] = E[e^{-d_T^-}] = E \left[ \int_{[T, \infty[} e^{-s} d\lambda_s^0 \right] = E \left[ \int_{[t, \infty[} e^{-s} d\lambda_s^0 \right] = E[e^{-d_t^-}].$$

Les variables aléatoires  $\delta_t^-$  et  $d_t^-$  étant comparables, elles ne peuvent être que presque sûrement égales. Les processus continus à gauches  $(\delta_t^-)$  et  $(d_t^-)$  sont donc indistinguables ; il en est de même des ensembles aléatoires  $H = \{t, \omega \mid d_t^-(\omega) = t\}$  et  $S = \{t, \omega \mid \delta_t^-(\omega) = t\}$ .

REMARQUE : L'inclusion  $S \subset H$  reste valable pour des fermés aléatoires quelconques. Il devient nécessaire d'imposer que  $H$  soit de mesure de Lebesgue nulle pour que le support de  $d\lambda_t$  soit exactement égal à  $H$ . La "formule de balayage" (54) n'est en effet exacte que sous cette hypothèse.

§4. EXEMPLES.

1) Le cas discret. Appelons  $\Omega_d$  le sous ensemble de  $\Omega$  formé des fermés discrets de  $\mathbb{R}_+$  ; on peut écrire

$$\omega \in \Omega \iff g_t(\omega) < t \text{ et } d_t(\omega) > t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

de sorte que  $\Omega_d^C$  apparaît comme la projection sur  $\Omega$  de l'ensemble aléatoire  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{F}_\infty^0$  mesurable

$$\{(t, \omega) ; g_t(\omega) = t \text{ ou } d_t(\omega) = t\}.$$

(\*)  $\Omega_d^C$  est donc  $\mathbb{F}_\infty^0$ -analytique, et  $\Omega_d$  est universellement mesurable dans  $(\Omega, \mathbb{F}_\infty^0)$ . Appelons alors  $(T_0, T_1, \dots, T_K, \dots)$  la suite de temps d'arrêt définis par récurrence de la façon suivante

$$T_0 = d_0^-, \dots, T_{n+1} = d_{T_n}$$

il est clair que,

$$T_n(\omega) < \infty \iff T_n(\omega) < T_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_d.$$

D'autre part les variables aléatoires  $(T_n)_{n \geq 0}$  sont des temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$  (voir (27)). La proposition qui suit est une grosse surprise

(55) PROPOSITION : Sur  $\Omega_d$ ,  $\mathbb{F}_\infty^0$  (resp.  $\mathbb{F}_{T_n}^0$ ) coïncide avec la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les variables aléatoires  $T_p$  ( $p > 0$ ) (resp.  $T_p$ ,  $0 < p < n$ ).

Démonstration : Commençons par traiter la partie relative à  $\mathbb{F}_\infty^0$  : les variables aléatoires  $T_p$  étant  $\mathbb{F}_\infty^0$  mesurables, on a clairement l'inclusion  $\mathbb{G}_\infty^0 \subset \mathbb{F}_\infty^0$  ( $\mathbb{G}_n^0$  désignant la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les v.a.  $T_0, T_1, \dots, T_n$ ). L'inclusion inverse résulte de l'égalité suivante, évidente sur  $\Omega_d$

$$g_t = \sum_{n \geq 0} T_n 1_{\{T_n < t < T_{n+1}\}} + 0^- 1_{\{0 < t < T_0\}}$$

qui montre que les variables aléatoires  $(g_t)$  ( $t > 0$ ) sont  $\mathbb{G}_\infty^0$ -mesurables.

(\*) Le début de ce paragraphe est parfaitement ridicule : en fait,

$$\Omega_d = \{\sup_n T_n = \infty\} \text{ est trivialement dans la } \sigma\text{-algèbre } \mathbb{F}_\infty^0$$



De même, puisque les  $(T_p)_{p \geq 0}$  sont des temps d'arrêt,  $G_n^0 \subset F_{T_n}^0$  ;

montrons l'inclusion inverse : soit  $z$  une variable aléatoire  $F_{T_n}^0$ -mesurable.

- D'après la première partie, il existe une application  $\phi$ , mesurable de  $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$z(\omega) = \phi(T_0(\omega), T_1(\omega), \dots, T_n(\omega), \dots) \quad \forall \omega \in \Omega_d.$$

D'autre part, (26) entraîne l'égalité  $z \circ k_{T_{n+1}}(\omega) = z(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_d$  ;  
on a donc

$$z(\omega) = \phi(T_0(\omega), T_1(\omega), \dots, T_n(\omega), \infty, \infty, \dots) \quad \forall \omega \in \Omega_d,$$

ce qui montre le résultat.

(56) REMARQUE : Cette démonstration prouve en fait un peu plus ; on a montré les inclusions  $F_{T_n}^0 \cap \Omega_d \subset G_n^0 \cap \Omega_d \subset F_{T_n}^0 \cap \Omega_d$  ; cela entraîne évidemment que ces trois  $\sigma$ -algèbres sont égales.

Les simplifications du cas discret proviennent du fait que la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est égale à la tribu optionnelle ; montrons le rapidement. On peut d'abord caractériser les temps d'arrêt à l'aide de la formule  $(a_t)$  d'une manière analogue à (22).

(57) PROPOSITION : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la famille  $(F_t^0)$  et  $\omega$  dans  $\Omega_d$  ; alors

$$T \circ a_t(\omega) = T(\omega) \quad \forall t > T(\omega)$$

$$T \circ a_t(\omega) > t \quad \forall t < T(\omega).$$

Démonstration : Sur  $\Omega_d$  on a les deux relations supplémentaires  $d_t > t$  et  $a_t = k_{d_t}$  ; on peut donc écrire, sur  $\Omega_d$ ,

$$t > g_T^+ \Rightarrow d_t > T \Rightarrow T \circ a_t = T \circ k_{d_t} = T \quad \text{d'après (22)}$$

$$t < g_T^+ \Rightarrow T \circ a_t = T \circ k_{d_t} > d_t > t ; \text{ d'où le résultat.}$$

(58) PROPOSITION : La  $\sigma$ -algèbre optionnelle et  $\mathcal{A}$  ont même trace sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega_d$ .

Il suffit de montrer que tout processus optionnel coïncide sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega_d$  avec un élément de  $\mathcal{A}$  ; examinons le cas d'un intervalle stochastique  $[[0, T]]$ .

D'après la proposition qui précède, on a

$$[[0, T]] \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega_d) = \{t, \omega \mid T \circ a_t(\omega) > t\} \cap (\mathbb{R}_+ \times \Omega_d)$$

d'où le résultat.

Faisons une dernière remarque : il est clair, par un argument de classe monotone, que  $\mathcal{A} \cap [[T_n, T_{n+1}]] = (\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}_n^0) \cap [[T_n, T_{n+1}]]$ .

Cette observation, qui permet de décrire complètement la tribu optionnelle, est à la base de toutes les études qui ont été faites sur les filtrations naturelles d'ensembles discrets.

Donnons-nous maintenant une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$  portée par  $\Omega_d$ . Supposons en outre que  $0 \in \omega$  p.s. (S'il en est ainsi nous dirons pour aller vite que  $H$  est discret et contient l'origine).

Désignons par  $K_n(\omega, dy)$  les probabilités conditionnelles régulières

$$K_n(\omega, dy) = P[\{T_n < \infty\} \mid T_{n+1} - T_n \in dy \mid \mathcal{F}_{T_n}],$$

et posons

$$(59) \quad \begin{cases} N(t, \omega, dy) = \sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n < t < T_{n+1}\}} K_n(\omega, dy) \\ d\ell_t = \sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n < \infty\}} \varepsilon_{T_n}(dt). \end{cases}$$

Le couple  $(d\ell_t, dN_t)$  constitue alors une désintégration optionnelle de  $\Pi_g$ .

(60) Le cas semi-discret. Supposons maintenant que  $P$  soit portée par l'événement  $\{\omega ; d_t(\omega) > t, \quad \forall t > 0\}$  ; cela revient à dire que, pour presque tout  $\omega$ ,  $G(\omega) = \omega \cup \{0\}$ , ou encore que  $G(\omega)$  est fermé. Le cas le plus simple rentrant dans cette rubrique est celui où le fermé aléatoire est la fermeture d'une suite croissante de variables aléatoires éventuellement convergente.

On peut construire par récurrence transfinie les fonctions définies par

$$T_{i+1} = d_{T_i} \quad T_j = \sup_{i < j} T_i$$

si  $i$  est un ordinal quelconque et  $j$  un ordinal limite. Il existe un ordinal dénombrable  $\alpha$  (dépendant de  $P$ ) tel que

$$Ee^{-T_\alpha} = 0 ; \text{ on a donc } P[T_\alpha = \infty] = 1.$$

- Appelons  $\Omega_d$  l'évènement  $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurable  $[T_\alpha = \infty]$ . On vérifiera sans peine que tout ce qui a été dit sur la filtration du cas discret reste vrai en remplaçant  $\Omega_d$  par  $\Omega_\alpha$ , et la suite  $(T_n)_{n \geq 0}$  par la famille de temps d'arrêts  $(T_i)_{i < \alpha}$  indexée par les ordinaux  $i$  inférieurs à  $\alpha$ . On ne peut toutefois conserver la normalisation simple de la désintégration (59) si l'on veut éviter des explosions du temps local.

Posons, si  $i$  est un ordinal  $< \alpha$

$$\alpha_i = 1 - E[e^{-(T_{i+1} - T_i)} / \mathbb{F}_{T_i}]$$

$$d\ell_t = \sum_{i < \alpha} \epsilon_{T_i}(dt) \alpha_i 1_{\{T_i < \infty\}}$$

$$N(t, \omega, dy) = \sum_{i < \alpha} P[\{T_i < \infty\} (T_{i+1} - T_i) \in dy | \mathbb{F}_{T_i}] 1_{\{T_i < t < T_{i+1}\}} \times \frac{1}{\alpha_i}.$$

Le couple  $(d\ell_t, N_t)$  constitue une désintégration optionnelle de  $\pi_g$ .

Bien entendu, le cas où le fermé  $H$ , tout en restant mince, est égal, non plus à  $G$ , mais à  $D$ , est d'une toute autre nature.

Avant de passer au second exemple, nous devons dévider quelques trivialités sur les opérateurs de translation

## 2) Opérateurs de translation et processus homogènes.

On posera  $\theta_t(\omega) = (\omega - t) \cap \mathbb{R}_+$  ;  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  est une famille d'applications mesurables de  $(\Omega, \mathbb{F}_\infty^0)$  dans lui-même vérifiant

$$(61) \quad \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t} \quad k_s \circ \theta_t = \theta_t \circ k_{s+t} \quad \forall s, t \geq 0.$$

On dira qu'un processus  $(Z_t)$  est homogène si  $Z_t = Z_0 \circ \theta_t \quad \forall t \geq 0$ , et qu'un ensemble aléatoire est homogène si son indicatrice a cette propriété.

$H$  lui-même est un ensemble aléatoire homogène ; les processus  $(d_t)$  et  $(d_t^-)$ , l'ensemble aléatoire  $G \cap H$  (qui s'écrit  $\{t, \omega | d_t > t\} \cap H$ ) le sont également. (Noter que  $G \cap H$  n'est différent de  $G$  qu'à l'origine).

(62) PROPOSITION : Plaçons-nous dans la filtration  $(\underline{F}_t^O)$

a) Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt,  $S + T \circ \theta_S$  est un temps d'arrêt.

b) Si  $(z_t)$  est un processus optionnel (resp. prévisible), il en est de même du processus  $(z'_t)$  défini par

$$z'_t(\omega) = z_{t-T(\omega)} [\theta_T(\omega)] 1_{\{t > T(\omega)\}} \quad (\text{resp. } z_{t-T(\theta_T)} 1_{\{t > T\}}).$$

Démonstration : Un petit calcul simple montre que la variable aléatoire  $S + T \circ \theta_S$  satisfait aux conditions (23) Le b) est une extension du a) aux processus, et se prouve par un argument de classes monotones.

(63) PROPOSITION : Soit  $R$  une variable aléatoire  $\underline{F}_\infty^O$ -mesurable ; on a  $\underline{F}_\infty^O = \underline{F}_R^O \vee \theta_R^{-1}(\underline{F}_\infty^O)$  ; si, de plus  $R$  est un temps d'arrêt (ou, plus généralement une fin d'optionnel), on a  $\underline{F}_{R+t}^O = \underline{F}_R^O \vee \theta_R^{-1}(\underline{F}_t^O)$  pour chaque  $t > 0$ .

Démonstration : Montrons que chaque variable aléatoire  $g_t$  est une fonction de  $(R, k_R, \theta_R)$  ; cela montrera la première partie puisque l'on sait (cf. (9)) que le couple  $(R, k_R)$  engendre la tribu  $\underline{F}_{R-}^O$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} g_t &= g_t \circ k_u & \text{si } t < u \\ &= g_\infty \circ k_u \vee u 1_H(u) & u < t < d_u \\ &= u + g_{t-u} \circ \theta_u & t > d_u \end{aligned}$$

• Posons alors

$$\begin{aligned} \alpha(u, \omega, \omega') &= g_t(\omega) 1_{\{t < u\}} + (g_\infty(\omega) \vee u 1_{\{d_0^-(\omega') = 0\}}) 1_{\{u < t < u + d_0(\omega')\}} \\ &\quad + (u + g_{t-u}(\omega')) 1_{\{t > u + d_0(\omega')\}}. \end{aligned}$$

On a  $g_t = \alpha(R, k_R, \theta_R)$  ; toute variable aléatoire  $z$   $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurable peut donc s'écrire  $z = \beta(R, k_R, \theta_R)$  ; supposons maintenant que  $R$  soit une fin d'optionnel ; on a  $R \circ k_{R+t} = R \quad \forall t > 0$ , ce qui permet d'écrire  $z \circ k_{R+t} = \beta(R, k_R, k_t \circ \theta_R)$  ; il est facile d'en déduire que  $\mathbb{F}_{(R+t)}^0 = \mathbb{F}_R^0 \vee \theta_R^{-1}(\mathbb{F}_t^0)$  pour chaque  $t > 0$  ; on obtient le résultat demandé par régularisation à droite.

(64) PROPOSITION : Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ . La tribu prévisible associée à la filtration  $(\mathbb{F}_{T+t}^0)_{t \geq 0}$ , est engendrée par les processus  $Y_t(\omega) = \alpha(\omega) X_t \circ \theta_T(\omega)$ , quand  $\alpha$  décrit la famille des variables aléatoires  $\mathbb{F}_T^0$ -mesurables bornées, et  $(X_t)$  la famille des processus prévisibles bornés de  $(\mathbb{F}_t^0)$ .

Démonstration : Désignons par  $\mathcal{P}_T$  la tribu de la filtration  $(\mathbb{F}_{T+t}^0)$ , il résulte facilement de (62) que les processus  $(Y_t)$  sont dans  $\mathcal{P}_T$ . Inversement,  $\mathcal{P}_T$  est engendrée par la famille des processus

$$Y_t'(\omega) = \beta(\omega) Z_{t+T}(\omega) \quad (\beta \in \mathbb{F}_T^0, (Z_t) \in \mathcal{K}).$$

Transformons l'écriture de  $Y_t'$  : d'après la définition de  $\mathcal{K}$  et la proposition (63), il existe une fonction  $h$  telle que

$$Z_t = h(t, k_T, T, \theta_T) \circ k_t, \text{ ce qui permet d'écrire}$$

$$Y_t' = \beta \times h(t+T, k_T, T, k_t \circ \theta_T) \quad \forall t > 0.$$

On voit donc que la classe des processus qui peuvent s'écrire pour  $t > 0$

$$\beta \times e^{-p(t+T)} \times y \circ k_T \times a(T) \times z \circ k_t \circ \theta_T$$

$$(\beta \in \mathbb{F}_T^0, y \text{ et } z \in \mathbb{F}_\infty^0, a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), p > 0) \text{ engendrent } \mathcal{P}_T \cap ]0, \infty[.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que ces processus sont de la forme

$$\text{demandée : il suffit de poser } Z_t = e^{-pt} z \circ k_t \quad \alpha = \beta \times e^{-pT} \times y \circ k_T \times a(T).$$

On traite à part le cas  $t = 0$ , ce qui ne pose pas de problèmes.

### 3) Mesures aléatoires homogènes et fonctionnelles additives.

Soit  $A(\omega, dt)$  une mesure aléatoire positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Appelons  $\tau_t$  l'application de  $[t, \infty[$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $\tau_t(s) = s - t$ . On dira que  $A$  est homogène (resp. homogène sur  $\mathbb{R}_+^*$ )

$$A(\theta_t(\omega), \cdot) = \tau_t[1_{[t, \infty[} \cdot A(\omega, \cdot)] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$(\text{resp. } A(\theta_t(\omega), \cdot) = \tau_t[1_{]t, \infty[} \cdot A(\omega, \cdot)]).$$

Il est clair qu'une mesure aléatoire homogène sur  $\mathbb{R}_+^*$  ne charge pas l'origine ; d'autre part, la restriction à  $]0, \infty[$  d'une m.a.h. est une m.a.h.<sup>\*</sup>. Dans le cas où chaque mesure  $A(\omega, \cdot)$  est de Radon, on introduit les processus croissants  $A_t(\omega) = A(\omega, [0, t])$  qui sont continus à droite ; on a  $A_t^-(\omega) = A(\omega, [0, t[)$  si l'on a convenu que  $A_0^- = 0$  ;  $A$  est une mesure aléatoire homogène si et seulement si  $(A_t^-)$  est une fonctionnelle additive (on dira dans ce cas que  $(A_t^-)$  est une fonctionnelle additive gauche) ;  $A$  est homogène sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $(A_t)$  est une fonctionnelle additive ordinaire.

Si  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un processus homogène positif  $\sum_{s \geq 0} Z_s \epsilon_s(dt)$  est une m.a.h. (qui n'est intéressante que si  $(Z_s)$  est nulle en dehors d'un ensemble mince). En particulier, si  $\phi$  est une fonction sur  $E$ , la mesure aléatoire  $\sum_{s \in GnH} \phi(d_s - s) \epsilon_s(dt)$  est homogène, et la fonctionnelle additive gauche qui lui est associée quand  $\phi$  n'est pas trop grande est  $\sum_{\substack{0 \leq s < t \\ s \in GnH}} \phi(d_s - s)$ .

### 4) Le cas régénératif.

Nous dirons que la probabilité  $P$  est régénérative, (ou, improprement que  $H$  est régénératif) si, quelque soit le temps d'arrêt  $T$  dont le graphe est contenu dans  $H$

$$(65) \quad E[Z \circ \theta_T ; T < \infty] = E(Z) \times P[T < \infty] \quad \forall Z \in \mathbb{F}_\infty^0.$$

Cela entraîne facilement que  $(0 \in H)$  p.s. et que la tribu  $\mathbb{F}_0$  est presque sûrement triviale ; il en est de même de la tribu  $\theta_T^{-1}(\mathbb{F}_0)$  dès que  $[[T]] \subset H$  ; appliquant (63), on voit alors que  $\mathbb{F}_T = \mathbb{F}_T^-$  si  $[[T]] \subset H$ .

(Rappelons qu'on a le même résultat si  $[[T]] \subset H^C$  pour tout ensemble aléatoire ; on doit résister à la tentation d'en déduire que  $\underline{F}_T = \underline{F}_{T-}$  pour tout temps d'arrêt). On a le résultat suivant, qui est une loi du (0-1).

(66) PROPOSITION : Soit  $(Z_t)$  un processus optionnel de la filtration  $(\underline{F}_t)$  ; il existe un processus de  $\mathcal{A}$  indistinguishable de  $(Z_t)$  ; de plus il existe un processus  $(Y_t)$  de  $\mathcal{K}$  tel que  $Z^1_H$  et  $Y^1_H$  soient indistinguishables.

Démonstration : On commence par étendre la formule (65) : si  $\phi$  est une application de  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{O} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable, on a la formule

$$(67) \quad E[\{T < \infty\} ; \phi(\cdot, T, \theta_T)] = \int_{\{T < \infty\}} P(d\omega) \int_{\Omega} P(d\omega') \phi(\omega, T(\omega), \omega')$$

dès que  $[[T]] \subset H$ .

Introduisons alors les opérateurs de recollement au temps  $t$  ; on posera  $(\omega/t/\omega') = k_t(\omega) \cup (\omega' + t)$  ( $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\omega' \in \Omega$ ).

On voit facilement que l'application  $(\omega, t, \omega') \rightarrow (\omega/t/\omega')$  est mesurable de  $\mathcal{K} \times \underline{F}_{\infty}^0$  dans  $\underline{F}_{\infty}^0$  ; si  $z$  est une variable aléatoire bornée,  $(Z_t)$  la version continue à droite de la martingale  $E(z|\underline{F}_t)$ , la "formule magique" de Dawson va nous donner un processus de  $\mathcal{K}$  indistinguishable de  $(Z_t)$  sur  $H$  : posons

$$Y_t(\omega) = \int_{\Omega} z(\omega/t/\omega') P(d\omega').$$

- La relation (67) appliquée à l'application  $(\omega, t, \omega') \rightarrow z(\omega/t/\omega')$  nous indique que

$$E[z ; T < \infty] = E[Y_T ; T < \infty] \quad \text{si } [[T]] \subset H$$

$(Z_t)$  est donc indistinguishable de  $(Y_t)$  sur  $H$ , ce qui montre la deuxième partie de la proposition ; il reste à montrer que  $(Z_t)$  est indistinguishable d'un élément de  $\mathcal{A}$  sur  $H^C$  ; appelons  $(Z_t^0)$  un processus optionnel de la filtration  $(\underline{F}_t^0)$  indistinguishable de  $Z_t$  ; on aura si  $(t, \omega) \in H^C$

$$Z_t^0[a_t(\omega)] = [Z_t^0\{k_d(\omega)\}] = Z_t^0(\omega) \quad \text{puisque } d_t(\omega) > t.$$

(68) PROPOSITION : 1) Soit  $T$  un temps d'arrêt tel que  $[[T]] \subset H-D$  ;  $T$  est prévisible et  $\underline{F}_T = \underline{F}_{T-}$

2) Tout temps d'arrêt évitant  $D$  est accessible.

3) Supposons  $D$  est totalement inaccessible ; un temps d'arrêt est prévisible si et seulement s'il évite  $D$ . La filtration  $(\underline{F}_T)$  est alors quasi-continue à gauche. On a même un peu plus :  $\underline{F}_{S-} = \underline{F}_S$  pour tout temps d'arrêt  $S$ .

Démonstration : 1) Reprenons la démonstration de la proposition précédente et posons  $H' = H-D$  ; si  $(Z_t)$  est une martingale uniformément intégrable, il existe un processus prévisible  $(Y_t)$  tel que  $Z_{1_{H'}} = Y_{1_{H'}}$  ; projetons sur la tribu prévisible : il vient

$$Z_{t-} 1_{H'}(t) = Y_t 1_{H'}(t) = Z_t 1_{H'}(t).$$

Soit alors  $T$  un temps d'arrêt dont le graphe est contenu dans  $H'$  ; on a  $Z_T = Z_{T-}$  sur  $\{T < \infty\}$ , quelque soit  $Z$  ; il en résulte que  $T$  est accessible. L'assertion sur les tribus a déjà été remarquée au début de ce paragraphe. Il existe donc une suite  $(T_n)$  de temps d'arrêts prévisibles tels que  $[[T]] \subset \bigcup_n [[T_n]]$  ; quitte à restreindre les  $T_n$ , on peut supposer  $[[T_n]] \subset H'$ . Posons alors  $A_n = \{T = T_n < \infty\}$  ; l'évènement  $A_n$  est dans  $\underline{F}_{T_n}$ , donc dans  $\underline{F}_{T_n-}$  ; il en résulte que les temps d'arrêts  $T_n^{A_n}$  sont prévisibles ainsi que  $[[T]]$  qui s'écrit  $\bigcup_n [[T_n^{A_n}]]$ .

2) Si  $T$  évite  $D$ , on peut écrire  $[[T]] = [[T]] \cap H^C + [[T]] \cap H$ . Les deux termes du second membre sont accessibles d'après ce que nous venons de voir et (33) .

3) Si l'on suppose en plus  $D$  totalement inaccessible  $[[T]] \cap H^C$  est prévisible d'après (33) et  $T$  est prévisible. Soit  $A$  un évènement de  $\underline{F}_{S-}$  ;  $T^A$  est prévisible puisqu'il évite  $D$  ; il en résulte que  $A \in \underline{F}_{T-}$ .

Soit maintenant  $S$  un temps d'arrêt quelconque ; posons  $I = \{\omega ; (\omega, S(\omega)) \in D\}$   $S' = S^I$ ,  $S'' = S^{I^C}$ . Il est la partie totalement inaccessible de  $S$ , c'est donc un évènement de  $\underline{F}_{S-}$  ; d'autre part  $\underline{F}_{S'-} = \underline{F}_{S-}$  (puisque  $[[S']] \subset H$ ) et  $\underline{F}_{S''-} = \underline{F}_{S''}$  (puisque  $S''$  est prévisible). On peut écrire  $\underline{F}_{S-} \cap \{S < \infty\} = \underline{F}_{S'-} \cap \{S' < \infty\} + \underline{F}_{S''-} \cap \{S'' < \infty\} = \underline{F}_S \cap \{S < \infty\}$ , ce qui achève de montrer la proposition (68).



(69) REMARQUE : Dans le cas régénératif, on peut compléter la proposition (64) : l'énoncé (64) reste vrai quand on remplace le mot prévisible par optionnel ; il suffit de reprendre la démonstration en remplaçant les opérateurs de meurtre par les opérateurs d'arrêt.

(70) PROPOSITION : 1) Soit  $(A_t)$  une fonctionnelle additive localement intégrable continue à droite et  $(B_t)$  la projection duale prévisible (resp. optionnelle) de  $(A_t)$  dans la filtration  $(F_t^0)$ . Quelque soit le temps d'arrêt  $T$  dont le graphe est contenu dans  $H$ , on a, pour presque tout  $\omega$

$$(71) \quad B(\theta_T(\omega), dt) = \tau_{T(\omega)}(1_{[T(\omega), \infty[} \times B(\omega, \cdot)).$$

2) Si  $(A'_t)$  est une fonctionnelle additive localement intégrable continue à gauche sa projection duale optionnelle  $(B'_t)$  vérifie, pour presque tout  $\omega$

$$(72) \quad B'[\theta_T(\omega), dt] = \tau_{T(\omega)}(1_{[T(\omega), \infty[} \times A'(\omega, \cdot)).$$

Démonstration : Nous nous limiterons à la première partie dans le cas prévisible, qui nous sera la plus utile ; on a pour tout processus prévisible de la filtration  $(F_t^0)$ ,

$$E\left[\int_0^\infty Z_s dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s dB_s\right]$$

Appliquons la propriété de régénération ; il vient

$$E\left[T < \infty ; \int_0^\infty Z_s \circ \theta_T A(\theta_T(\cdot), ds)\right] = E\left[T < \infty ; \int_0^\infty Z_s \circ \theta_T B(\theta_T(\cdot), ds)\right].$$

Le premier membre de cette égalité peut encore s'écrire

$$E\left[T < \infty ; \int_{]T, \infty[} Z_{s-T}(\theta_T) A(\cdot, ds)\right] = E\left[T < \infty ; \int_{]T, \infty[} Z_{s-T}(\theta_T) B(\cdot, ds)\right],$$

puisque le processus  $1_{]T, \infty[} Z_{s-T}(\theta_T)$  est prévisible d'après (62).

Appelant  $B^1$  la mesure aléatoire  $\tau_T(1_{]T, \infty[} \cdot B)$ , nous voyons que l'on a

$$E\left[T < \infty ; \int_0^\infty Z_u \circ \theta_T B^1(\omega, du)\right] = E\left[T < \infty ; \int_0^\infty Z_u \circ \theta_T B(\theta_T(\omega), du)\right].$$

Cette égalité se généralise comme d'habitude par un argument de classes monotones ; on a pour toute variable aléatoire  $Y$   $\mathbb{F}_T$ -mesurable bornée,

$$E[(T < \infty) ; \int_0^\infty Z_u \circ \theta_T \cdot Y \cdot B^1(\omega, du)] = E[(T < \infty) \int_0^\infty Y Z_u \circ \theta_T B(\theta_T(\omega), du)]$$

On remarque alors que les mesures aléatoires  $B^1$  et  $B(\theta_T(\cdot), du)$  sont prévisibles dans la filtration  $(\mathbb{F}_{T+t}^0)$ , et l'on se souvient (prop. (64)) que les processus de la forme  $Y(\omega) Z_u \circ \theta_T(\omega)$  engendrent la tribu prévisible de cette filtration. Les mesures aléatoires  $B^1$  et  $B(\theta_T(\cdot), du)$  sont donc indistinguables.

On se propose maintenant de montrer que les projections duales conservent l'homogénéité des mesures aléatoires portées par  $H'$  ou  $H$  ; (Rappelons que  $H' = H - D$ ). On a le résultat suivant :

(73) PROPOSITION : Conservons les notations de la proposition (70) et supposons en outre que  $(A_t)$  est portée par  $H'$  ; alors

- 1) Il existe un processus croissant  $(B_t^1)$  indistinguishable de  $(B_t)$  vérifiant l'égalité (71) pour tout temps d'arrêt  $T$ .
- 2) Si  $(A_t')$  est porté par  $H$ , il existe  $(B_t'^1)$  indistinguishable de  $(B_t')$  vérifiant (72) pour tout temps d'arrêt  $T$ .

Démonstration : Montrons par exemple le point 1) : le théorème est vide dans le cas discret ; on peut donc supposer l'ensemble régénératif parfait, ce qui entraîne  $d_0 = 0$  p.s. Posons alors  $B_t^1 = B_{t-d_0} [ \theta_{d_0} ]^1_{\{t > d_0\}}$  ;

il est clair que  $(B_t^1)$  est indistinguishable de  $(B_t)$  ; d'autre part, soit  $S$  un temps d'arrêt ; on a

$$B_t^1 \circ \theta_S = B_{t-d_0 \circ \theta_S} [ \theta_{d_S} ]^1_{\{t > d_0 \circ \theta_S\}}$$

et puisque  $[[d_S]] \subset H$  ; cela s'écrit encore (à une indistinguishabilité près)

$[B_{t+S} - B_{d_S}]^1_{\{t+S > d_S\}}$  ; mais puisque  $A$  est porté par  $H'$ ,  $B$  l'est également ; cette dernière expression est donc indistinguishable de  $B_{t+S} - B_S$ , ce qu'il fallait démontrer.

- (74) Il existe, d'après les résultats classiques de perfection un processus croissant  $(B_t^2)_{t \geq 0}$  indistinguable de  $(B_t^1)$  tel que pour presque tout  $\omega$

$$B_{t+s}^2(\omega) = B_t^2 + B_s^2 \circ \theta_t(\omega) \quad \text{quelque soit } s \text{ et } t$$

On notera que cette version s'obtient par un passage à la limite essentielle supérieure et reste donc adaptée à la filtration  $(F_t^0)$ .

- (75) COROLLAIRE : Plaçons-nous dans le cas où  $H$  est parfait ; appelons  $\lambda_t$  le temps local normalisé de  $H$  ; il existe un processus  $\lambda_t^0$  adapté à la filtration  $F_t^0$ , ayant presque toutes ses trajectoires croissantes et continues, indistinguable de  $\lambda_t$ , qui est une fonctionnelle additive parfaite.

Démonstration : Montrons tout d'abord que les temps d'arrêts évitent  $G$  ; soit en effet  $T$  un temps d'arrêt dont le graphe est inclus dans  $H$  ; on peut écrire  $P[d_T > T ; T < \infty] = P[d_0 \circ \theta_T > 0 ; T < \infty] = P[d_0 > 0] \times P[T < \infty] = 0$ .

Il en résulte facilement que  $[[T]] \cap G$  est évanescant.  $(\lambda_t)$  est la projection duale optionnelle de la fonctionnelle additive continue à droite brute  $\lambda_t = \sum_{\substack{0 \leq s < t \\ s \in G}} [1 - \exp(-d_s)]$  qui n'a de sauts qu'aux points de  $G$ .

$(\lambda_t)$  est donc continue ; (73) et (74) montrent qu'on peut choisir pour  $(\lambda_t)$  une fonctionnelle additive continue parfaite.

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a qu'une seule fonctionnelle additive, à une constante multiplicative près, qui soit portée par  $H$ . Nous aurons besoin pour cela d'un lemme de retournement du temps sur les ensembles aléatoires bornés ; on posera  $\gamma = g_\infty$  et on se donne une probabilité  $P$  non nécessairement régénérative portée par  $\{\gamma < \infty\} = \Omega_b$ .

Puisque l'évènement  $\Omega_b$  est  $F_\infty^0$  mesurable, stable pour les opérateurs de meurtre et de translation, il n'y a pas d'inconvénient à le prendre comme espace de probabilités. On définira alors les opérateurs  $r(\omega)$  de retournement, et  $r_t(\omega)$  de retournement à  $t$  de la façon suivante

$$s \in r(\omega) \iff s < \gamma(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma(\omega) - s \in \omega$$

$$s \in r_t(\omega) \iff s < t \quad \text{et} \quad t - s \in \omega.$$

On notera les relations  $r_t = r_t \circ a_t$ ,  $\theta_t \circ r = r_{(\gamma-t)^+}$ .

On démontre sans peine que, si  $T$  est un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ ,  $\tau = (\gamma - T \circ r)^+$  est un temps de retour (i.e. est une variable aléatoire vérifiant identiquement  $\tau \circ \theta_t = (\tau - t)^+$ ). Sous ces hypothèses on peut énoncer :

(76) LEMME : Soient  $A$  et  $B$  deux fonctionnelles additives (brutes) intégrables telles que

-  $A_\infty$  et  $B_\infty$  soient  $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurables.

- Il existe un ensemble  $\Omega_0$   $\mathbb{F}_\infty^0$ -mesurable de mesure pleine tel que pour tout  $\omega \in \Omega_0$  les trajectoires  $t \rightarrow A_t(\omega)$  et  $t \rightarrow B_t(\omega)$  soit croissantes continues à droites ; on suppose en outre que, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_0$   
 $A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s \circ \theta_t(\omega)$ ,  $B_{t+s}(\omega) = B_t(\omega) + B_s \circ \theta_t(\omega)$ ,  $\forall s \quad \forall t \geq 0$

-  $(A_t)$  et  $(B_t)$  sont portés par  $H$

-  $E\left[\int_{[0,\tau]} dA_s\right] = E\left[\int_{[0,\tau]} dB_s\right]$  pour tout temps de retour  $\tau$ .

Alors  $A$  et  $B$  sont indistinguables.

Démonstration : Posons  $A_t^1 = A_\infty \circ r_t$ ,  $B_t^1 = B_\infty \circ r_t$  ;  $A_t^1$  et  $B_t^1$  sont dans  $\mathcal{A}$  ; ils sont donc optionnels. D'autre part, on a

$A_t^1(\omega) = A_\infty \circ r_t(\omega) = A_\infty(r(\omega)) - A_{(\gamma-t)(\omega)}(r(\omega))$  si  $t < \gamma(\omega)$  ;  $(A_t^1)$  a donc ses trajectoires croissantes et continues à gauche sur  $[[0, \gamma]]$  dès que  $\omega \in r^{-1}(\Omega_0)$ . Examinons ce qui se passe sur  $] \gamma, \infty[$  : on a si

$u = \gamma + k$ ,  $v = \gamma + k + h$  ( $h$  et  $k > 0$ )

$A_\infty \circ r_u = A_\infty(\theta_h \circ r_v) = A_\infty \circ r_v - A_h \circ r_v = A_\infty \circ r_v$  (en effet  $A_h \circ r_v$  est nul puisque  $h$  est strictement inférieur au début de  $r_v(\omega)$ ).

$(A_t^1)$  est donc un processus optionnel, dont les trajectoires  $t \rightarrow A_t^1(\omega)$  sont croissantes et continues à gauche sur  $[[0, \gamma]]$ , constantes sur  $] \gamma, \infty[$  dès que  $\omega \in r^{-1}(\Omega_0)$ . Soit maintenant  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathbb{F}_t^0)$ ,  $\tau = (\gamma - T \circ r)^+$ , on a la relation

$$E\left[\int_{[0,\tau]} dA_s\right] = E \circ r^{-1} \left[\int_{[T,\infty[} dA'_s\right].$$

En effet, le second membre s'écrit

$$E\left[\int_{[T\circ r,\gamma]} dA'_s(r(\cdot))\right] = E\left[\int_{[T\circ r,\gamma]} d_*(A_\infty - A_{\gamma-s})\right] = E\left[\int_{[0,\tau]} dA_s\right]$$

Il en résulte, que pour tout temps d'arrêt  $T$ ,

$$E \circ r^{-1} \left[\int_{[T,\infty[} dA'_s\right] = E \circ r^{-1} \left[\int_{[T,\infty[} dB'_s\right].$$

Puisque  $A'$  et  $B'$  sont optionnels, ils sont indistinguables relativement à la probabilité  $P \circ r^{-1}$ .

$A'_t \circ r$  et  $B'_t \circ r$  sont alors indistinguables pour  $P$ ; le résultat cherché en découle, puisque  $A'_t \circ r = A_\infty - A_{(\gamma-t)}$  si  $t < \gamma$ : ( $A_t$ ) et ( $B_t$ ) sont indistinguables sur  $[[0,\gamma]]$ , ce qui nous suffit puisqu'on sait qu'ils sont portés par  $H$ .

(??) PROPOSITION : Soit ( $A_t$ ) une fonctionnelle additive continue optionnelle portée par  $H$  telle que  $E\int_0^\infty e^{-s} dA_s = k < \infty$ ;  $A_t$  est indistinguishable de  $k\ell_t$ .

Démonstration : Considérons l'expression  $E\left[\int_0^\infty e^{-s} z \circ \theta_s dA_s\right]$ ; on peut remplacer le processus homogène  $(z \circ \theta_s)$  par sa projection optionnelle qui est égale à la constante  $E[z]$  sur  $H$ ; cette quantité est donc égale à  $E[z] \times k$ . Le même raisonnement prouve que  $E\left[\int_0^\infty e^{-s} z \circ \theta_s d\ell_s\right] = E[z]$ .

Posons  $B_t = k\ell_t$ ; on a l'égalité

$$(78) \quad E\left[\int_0^\infty e^{-s} z \circ \theta_s dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty e^{-s} z \circ \theta_s dB_s\right] \quad \forall z \in \mathbb{F}_\infty^0.$$

Introduisons alors la probabilité  $P_1$  définie par  $E_1(y) = E\left[\int_0^\infty e^{-u} y \circ k_u du\right]$ ,

on a  $P_1(\gamma < \infty) = E\left[\int_0^\infty 1_{\{g_u < \infty\}} e^{-u} du\right] = 1$ ; d'autre part, puisque ( $A_t$ )

est porté par  $H$  et prévisible, on a  $A_t \circ k_u = A_{t \wedge u}$ ; calculons alors

$$E_1 \left[ \int_0^\infty z \circ \theta_s \, dA_s \right] = E \left[ \int_0^\infty e^{-u} \, du \int_0^u z \circ k_{u-s} \circ \theta_s \, dA_s \right] = E \left[ \int_0^\infty e^{-s} \, dA_s \, z \circ \theta_s \right]$$

$$\text{où l'on a posé } Z = \int_0^\infty z \circ k_v \, e^{-v} \, dv.$$

L'égalité (78) entraîne donc que

$$E_1 \left[ \int_0^\infty z \circ \theta_s \, dA_s \right] = E_1 \left[ \int_0^\infty z \circ \theta_s \, dB_s \right] \quad \forall z \in \mathbb{F}_\infty^0.$$

En particulier, si  $\tau$  est un temps de retour, cette dernière égalité appliquée à  $z = 1_{\{\tau > 0\}}$  prouve que

$$E_1 \left[ \int_{[0, \tau[} dA_s \right] = E_1 \left[ \int_{[0, \tau[} dB_s \right];$$

on peut remplacer l'intervalle  $[0, \tau[$  par  $[0, \tau]$  puisque  $A$  et  $B$  sont continues, de sorte que les hypothèses du lemme (76) sont satisfaites ;  $A$  et  $B$  sont donc indistinguables relativement à  $P_1$  ; on en déduit facilement que cela reste vrai pour  $P$  : on a en effet pour tout processus prévisible  $(Y_t)$ ,

$$E_1 \left[ \int_0^\infty Y_s \, dA_s \right] = E \left[ \int_0^\infty e^{-s} Y_s \, dA_s \right] = E \left[ \int_0^\infty e^{-s} Y_s \, dB_s \right].$$

(78) THEOREME : Supposons  $H$  régénératif parfait ; il existe une mesure  $\sigma$ -finie  $N(dx)$  sur  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  intégrant la fonction  $(1-e^{-x})$  et une fonctionnelle additive continue  $(\ell_t)$  portée par  $H$  telles que

$$E \left[ \sum_{s \in G} Z_s \, \phi(d_s - s) \right] = \int_{\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}} \phi \, dN \times E \left[ \int_0^\infty Z_s \, d\ell_s \right]$$

pour tout processus  $(Z_s)$  optionnel.

Démonstration : Soit  $\phi$  une fonction continue  $\geq 0$  à support compact inclus dans  $[\varepsilon, \infty]$ , il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$\phi(x) \leq \lambda(1-e)^{-x} \quad \forall x. \text{ Considérons la fonctionnelle additive brute } A_t^\phi = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ s \in G}} \phi(d_s - s); \text{ on a } E \left[ \int_0^\infty e^{-s} \, dA_s^\phi \right] \leq \lambda \sum_{s \in G} e^{-s} (1-e^{-(d_s - s)}) \leq \lambda.$$

La projection optionnelle duale de  $(A_t^\phi)$  est une fonctionnelle additive continue  $(L_t^\phi)$  portée par  $H$  vérifiant  $E \int_0^\infty e^{-s} \, dL_s^\phi < \infty$ . Il existe donc une constante, que l'on notera  $N(\phi)$ , telle que  $L_t^\phi = N(\phi) \cdot \ell_t$ .

L'application  $\phi \rightarrow N(\phi)$  convenablement prolongée définit une mesure sur  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ . Ecrivons que  $(L_t^\phi)$  est la projection duale optionnelle de  $(A_t^\phi)$ ; il vient

$$E\left[\sum_{s \in G} Z_s \phi(d_s - s)\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s dL_s^\phi\right] = N(\phi) E\left[\int_0^\infty Z_s d\ell_s\right],$$

d'où le résultat.

Pour être complet, nous allons démontrer une réciproque au théorème (78). Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que, dans la désintégration optionnelle de  $\pi_g$  le noyau de Lévy est déterministe, autrement dit est une mesure  $N(dx)$ . Nous ne traiterons que le cas où  $N(\mathbb{R}_+) = \infty$  (le cas où  $N$  est une mesure bornée étant vraiment très facile). En anticipant un peu sur le chapitre suivant, on sait alors que  $(\ell_t)_{t \geq 0}$  est un processus croissant continu. Avant d'énoncer la réciproque de (77), rappelons qu'un ensemble régénératif est presque-sûrement borné ou non borné; supposons que le noyau de Lévy de  $H$  soit déterministe, alors,

(79) PROPOSITION : On a les équivalences suivantes :

$$\gamma = \infty \quad p.s. \iff N\{\infty\} = 0 \iff \ell_\infty = \infty \quad p.s.$$

$$\gamma < \infty \quad p.s. \iff N\{\infty\} > 0 \iff E\ell_\infty < \infty \iff \ell_\infty$$

est une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $(N\{\infty\})^{-1}$ .

Démonstration : Commençons par la deuxième ligne, et supposons  $N\{\infty\} > 0$ ; on peut écrire

$$E\left[\sum_{s \in G} e^{-ps} (1 - e^{-p(d_s - s)})\right] = E\left[\sum_{s \in G} \int_s^{d_s} p e^{-pu} du\right] = 1,$$

de sorte que

$$1 = E\left[\int_0^\infty e^{-ps} d\ell_s \int_{\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}} (1 - e^{-px}) N(dx)\right]$$

Faisons tendre  $p$  vers 0; il vient  $1 = E\ell_\infty \times N\{\infty\}$ . On a alors

$$P[\gamma < \infty] = E\left[\sum_{s \in G} 1_{\{\infty\}} (d_s - s)\right] = N\{\infty\} E \int_0^\infty d\ell_s$$

$H$  est donc presque sûrement borné; de plus, quelque soit le processus

$$(Z_s) \text{ optionnel } E[Z_\gamma] = E\left[\sum_{s \in G} Z_s 1_{\{\infty\}} (d_s - s)\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s d\ell_s\right] \times N\{\infty\}.$$

Appliquant cette égalité à  $Z_s = e^{-p\ell_s}$ , il vient

$$E[e^{-p\ell_\infty}] = N\{\infty\} E\left[\int_0^\infty e^{-p\ell_s} d\ell_s\right] = \frac{N\{\infty\}}{p} E(1 - e^{-p\ell_\infty}),$$

de sorte que  $E[e^{-p\ell_\infty}] = (1 + \frac{p}{N\{\infty\}})^{-1}$ , ce qui est la transformée de Laplace d'une loi exponentielle.

Supposons maintenant  $N\{\infty\} = 0$  ; nous allons démontrer que  $\ell_\infty = \infty$  p.s., ce qui entraîne évidemment  $\gamma = \infty$  p.s., et cela achèvera de montrer la proposition. Je n'ai pas trouvé mieux que de me ramener au cas borné de la manière suivante : considérons la probabilité  $P^q$  définie par

$$E^q[z] = E\left[\int_0^\infty z \circ k_s \text{ qe}^{-q\ell_s} d\ell_s\right] + E[ze^{-q\ell_\infty}].$$

D'après le lemme qui suit, une désintégration prévisible de  $\pi_g$  sous  $P^q$  est  $(d\ell_t, N(dy) + q\varepsilon_\infty(dy))$  ; le nouveau noyau de Lévy est encore déterministe et donne la masse  $q$  au point à l'infini ; on a donc d'après ce qui précède (\*)

$$E^q[e^{-p\ell_\infty}] = \frac{q}{p+q} = E\left[\int_0^\infty \text{qe}^{-(p+q)\ell_s} d\ell_s\right] + E[e^{-(p+q)\ell_\infty}].$$

Faisons tendre  $q$  vers zéro ; on obtient  $E[e^{-p\ell_\infty}] = 0$ , d'où le résultat.

La fin de la démonstration repose sur le lemme suivant, qui a son intérêt propre et ne fait pas intervenir la régénérativité.

(80) LEMME : Soit  $(d\ell_t, N_t)$  une désintégration prévisible de  $\pi_g$  ; on suppose  $\ell_t$  continue et l'on définit la probabilité  $P^p$  par l'égalité (79). Le couple  $(d\ell_t, N_t(dy) + p\varepsilon_\infty(dy))$  constitue alors une désintégration prévisible de  $\pi_g$  sous la loi  $P^p$ .

Démonstration : Soit  $(Z_s)$  un processus prévisible borné,  $\phi$  une fonction borélienne positive définie sur  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Définissons les quantités

$$A = E^P\left[\sum_{s \in G} Z_s \phi(d_s - s)\right] \quad B = E^P\left[\int_0^\infty d\ell_s Z_s [N_s \phi + p\phi(\infty)]\right].$$

(\*) On remarquera que la démonstration qui précède est valable sous l'hypothèse plus faible :  $(d\ell_t, N(dx))$  est une désintégration prévisible de  $\pi_g$ .



Nous avons à montrer que  $A = B$ . Transformons d'abord  $B$  : on a

$$\begin{aligned} B &= E \left[ \int_0^\infty p e^{-p \ell_u} d\ell_u \int_0^u z_s d\ell_s (N_{s\phi + p\phi(\infty)}) \right] + E \left[ e^{-p \ell_\infty} \int_0^\infty z_s (N_{s\phi + p\phi(\infty)}) d\ell_s \right] \\ &= E \left[ \int_0^\infty z_s (N_{s\phi + p\phi(\infty)}) e^{-p \ell_s} d\ell_s \right]. \end{aligned}$$

Occupons-nous maintenant de  $A$  ; remarquons tout d'abord que si  $(\tau_v)$  est l'inverse continu à gauche de  $\ell_t : (\tau_v = \inf\{t ; \ell_t > v\})$ , on a

$$E^p(z) = E \left[ \int_0^\infty z \circ k_{\tau_v} p e^{-pv} dv \right],$$

de sorte que

$$\begin{aligned} A &= E \left[ \int_0^\infty p e^{-pv} dv \left[ \sum_{\substack{s \in G \\ s < \tau_v}} z_s \phi(d_s - s) + z_{\tau_v} 1_{\{\tau_v < \infty\}} \phi(\infty) \right] \right] \\ &= E \left[ \int_0^\infty p e^{-pv} dv \int_0^{\tau_v} z_s N_{s\phi} d\ell_s \right] + p\phi(\infty) E \left[ \int_0^\infty z_u e^{-p \ell_u} d\ell_u \right] \\ &= E \left[ \int_0^\infty z_s N_{s\phi} e^{-p \ell_s} d\ell_s \right] + p\phi(\infty) E \left[ \int_0^\infty e^{-p \ell_u} d\ell_u \right] = B. \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure d'énoncer une réciproque au théorème (78).

(81) THEOREME : Soit  $N$  une mesure  $> 0$  sur  $\mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$  telle que

$$\int (1 - e^{-x}) N(dx) < \infty.$$

- On suppose que le noyau de Lévy de la désintégration optionnelle normalisée de  $\Pi_g$  est la mesure  $N$ .  $H$  est alors régénératif.

- Dans le cas où  $N$  est de masse infinie, la conclusion subsiste en supposant simplement que  $N$  est le noyau de Lévy de la désintégration prévisible normalisée de  $\Pi_g$ .

- Nous traiterons uniquement le cas où  $N$  est de masse infinie ; si  $(d\ell_t, N)$  est une désintégration optionnelle de  $\Pi_g$ , nous allons voir au chapitre suivant que  $(\ell_t)$  est continue et que  $G$  évite tous les temps d'arrêt.

Dans l'égalité  $E\left[\sum_{s \in G} Z_s \phi(d_s - s)\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s d\ell_s\right] \times \int \phi dN$  on peut remplacer  $(Z_s)$  par sa projection prévisible, ce qui prouve que  $(d\ell_t, N)$  est une désintégration prévisible de  $\pi_g$ . Nous allons donc démontrer un peu mieux que la réciproque à (78) en supposant que  $(d\ell_t, N)$  est une désintégration prévisible de  $\pi_g$ . Introduisons les inverses continus à droite  $(\sigma_t)$  et à gauche  $(\tau_t)$  de  $(\ell_t)$ . Plus précisément :

$$\sigma_t = \inf\{s ; \ell_s > t\}, \quad \tau_t = \inf\{s ; \ell_s \geq t\}.$$

Appelons  $(\underline{G}_t)$  la filtration continue à droite  $(\underline{F}_{\sigma_t})$  et  $\pi'$  le processus ponctuel défini par  $\pi'(\omega, dt, dx) = \sum_s \varepsilon(s, \sigma_s - \tau_s)(dt, dx) 1_{\{\sigma_s > \tau_s\}}$ .

(Dans le cas où  $\gamma$  est presque sûrement borné,  $\pi'$  charge une fois  $\mathbb{R}_+ \times \{\infty\}$ ). Les remarques qui suivent sont faciles et classiques :

- Si  $T$  est un temps d'arrêt de la filtration  $(\underline{F}_t)$ ,  $\ell_T$  est un temps d'arrêt dans  $(\underline{G}_t)$
- En particulier  $\ell_t, \ell_\infty$  sont des temps d'arrêt de  $(\underline{G}_t)$  et  $\underline{G}_{\ell_t} \subset \underline{F}_{\ell_t}$ .
- Si  $S$  est un temps d'arrêt de  $(\underline{G}_t)$ ,  $\sigma_S$  est un temps d'arrêt de  $(\underline{F}_t)$ .
- Si  $(Y_t)$  est un processus prévisible de  $(\underline{G}_t)$ , il existe un processus  $(Z_t)$  prévisible  $(\underline{F}_t)$ -prévisible tel que  $Y_s = Z_{\tau_s}$  sur l'intervalle stochastique  $[[0, \ell_\infty]]$ .
- Si  $(Z_t)$  est  $(\underline{F}_t)$ -prévisible,  $(Z_{\tau_t})$  est  $(\underline{G}_t)$ -prévisible.

Soit  $(Y_t)$  un processus  $(\underline{G}_t)$ -prévisible et  $(Z_t)$  le processus prévisible qui lui est associé dans l'avant dernière remarque ; on a

$$\begin{aligned} E\left[\sum_s \phi(\sigma_s - \tau_s) Y_s 1_{\{\sigma_s > \tau_s\}}\right] &= E\left[\sum_s \phi(\sigma_s - \tau_s) Z_{\tau_s} 1_{\{\sigma_s > \tau_s\}}\right] = E\left[\sum_{s \in G} \phi(d_s - s) Z_s\right] \\ &= \int \phi dN \times E\left[\int_0^\infty Z_s d\ell_s\right] = \int \phi dN \times E\left[\int_0^{\ell_\infty} Y_s ds\right]. \end{aligned}$$

Le couple  $(1_{[0, \ell_\infty]}(s) \cdot ds, N)$  constitue donc une désintégration prévisible de  $\pi'$ . Pour continuer, nous aurons besoin de la réalisation canonique de  $\pi'$ ; introduisons l'espace  $(W, \underline{H})$  des mesures ponctuelles sur  $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  qui est muni d'une filtration naturelle  $(\underline{H}_t)$  et d'une famille  $(\bar{\theta}_t)$  d'opérateurs de translations. Notons  $\phi$  l'application mesurable de  $(\Omega, \underline{F})$  dans  $(W, \underline{H})$  qui au fermé  $\omega$  associe la mesure  $\sum_s \varepsilon_{(s, \sigma_s - \tau_s)}(dt, dx) 1_{\{\sigma_s - \tau_s > 0\}}$ . Inversement, définissons une application  $\psi$  de  $W$  dans  $\Omega$  de la manière suivante : au point  $w$  de  $W$ , on associe d'abord le processus  $\bar{\sigma}(t, w) = \bar{\sigma}_t(w) = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}_+} x w(ds, dx)$ , et l'on pose  $\psi(w) = \overline{\phi(\mathbb{R}_+, w)}$ . Il est facile de voir que  $\psi \circ \phi = \text{id}_\Omega$ , et que  $\phi \circ \psi$  est l'identité sur  $\phi(\Omega)$ . Si l'on munit  $W$  de la mesure image  $\phi(P) = \bar{P}$ , on a donc  $\phi \circ \psi(w) = W$  pour  $\bar{P}$ -presque tout  $w$ . Désignons enfin par  $\bar{\lambda}_t$  le processus sur  $W$  qui est l'inverse continu à droite de  $(\bar{\sigma}_t)$ ; on a clairement  $\ell_t = \bar{\lambda}_t \circ \phi$ , d'où il résulte que  $(\bar{\lambda}_t)$  et  $(\ell_t \circ r)$  sont  $\bar{P}$ -indistinguables. Les espaces filtrés  $(\Omega, (\underline{F}_{\sigma_t}), P)$  et  $(W, (\underline{H}_t), \bar{P})$  sont donc isomorphes et le processus ponctuel canonique sur  $W$  admet la désintégration prévisible  $1_{[0, \bar{\lambda}_\infty]}(dt) N(dx)$  dans la filtration  $(\underline{H}_t)$ . On en déduit, de façon classique, que  $\bar{P}$  est la loi d'un processus de Poisson ponctuel absorbé au temps  $\bar{\lambda}_\infty$ , (pour obtenir ce processus de Poisson, il suffit de recoller une infinité de copies indépendantes de  $\bar{P}$ ), et l'on peut montrer facilement que l'on a alors

$$(82) \quad \bar{E}[Z_0 \circ \bar{\theta}_U, U < \bar{\lambda}_\infty] = \bar{E}(Z) \times \bar{P}[U < \bar{\lambda}_\infty]$$

pour tout temps d'arrêt  $U$  de la filtration  $(\underline{H}_t)$ .

Etablissons la propriété de régénération : soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\underline{F}_t)$  tel que  $[[T]] \subset H$  la quantité  $E[Z_0 \circ \theta_T, T < \infty]$

s'écrit, puisque  $P = \psi(\bar{P})$ ,  $E[Z_0 \circ \theta_T \circ \psi; T \circ \psi < \infty] = E[Z_0 \circ \psi \circ \bar{\theta}_U; U < \bar{\lambda}_\infty]$

où  $U$  est le temps d'arrêt  $\ell_T \circ \psi$  de la filtration  $(\underline{H}_t)$ . Appliquant (82), on a donc

$$\begin{aligned} E[Z_0 \circ \theta_T, T < \infty] &= E[Z_0 \circ \psi] \times \bar{P}[U < \bar{\lambda}_\infty] = E(Z) \times P[\ell_T < \ell_\infty] \\ &= E(Z) \times P[T < \infty], \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

(83) REMARQUE : Quand le noyau de Lévy de la désintégration optionnelle de  $\pi_g$  est une mesure, il détermine complètement  $P$ . Reprenons en effet la démonstration précédente, et donnons-nous deux probabilités  $P_1$  et  $P_2$  sur  $\Omega$  et notons  $(d\lambda_t^1, N(dx))$ ,  $(d\lambda_t^2, N(dx))$  les désintégrations optionnelles de  $\pi_g$  sous  $P_1$  et  $P_2$ ,  $(N(dx))$  étant le même pour les deux désintégrations). D'après ce qui précède, les probabilités  $\phi_1(P_1)$  et  $\phi_2(P_2)$  sont les mêmes (à savoir la loi d'un processus de Poisson ponctuel absorbé). On a donc  $P_1 = \psi(\phi_1(P_1)) = \psi(\phi_2(P_2)) = P_2$ .

D'autre part, si l'on se donne une mesure  $N(dx)$  sur  $\mathbb{R}_+$  intégrant  $(1-e^{-x})$ , on peut construire sur  $W$  le processus ponctuel de Poisson d'intensité  $dt N(dx)$ , l'absorber au temps  $\bar{\lambda}_\infty$ , et construire son image par  $\psi$  : on obtiendra ainsi un fermé aléatoire dont le noyau de Lévy sera  $N(dx)$ .

La donnée d'un ensemble régénératif (de mesure nulle) est donc équivalente à la donnée d'une mesure  $N(dx)$  sur  $\mathbb{R}_+$  intégrant  $(1-e^{-x})$ .

#### Les zéros du mouvement brownien.

Désignons par  $(\tilde{\omega}_t, \tilde{F}_t, B_t, \tilde{\theta}_t, \tilde{P})$  la réalisation canonique du mouvement Brownien issu de l'origine, par  $\phi$  l'application qui, à  $\tilde{\omega}$ , fait correspondre le fermé  $\{t; B_t(\tilde{\omega}) = 0\}$ . On notera  $(L_t)$  le temps local en 0 de  $B_t$  : c'est le processus croissant continu optionnel tel que  $|B_t| - L_t$  soit une martingale. L'inverse continu à droite  $(\tau_t)$  de  $(L_t)$  est un subordonateur, et l'on a les formules usuelles donnant la mesure de Lévy de  $(\tau_t)$  :

$$\tilde{E}(e^{-\alpha \tau_t}) = e^{-t\sqrt{2\alpha}} \quad \sqrt{2\alpha} = \int_{\mathbb{R}_+} (1-e^{-\alpha x}) n(dx)$$

avec

$$n(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} dx \quad \tilde{n}(x) = n(x, \infty) = \frac{\sqrt{2}}{\pi x}.$$

Une application de la loi des grands nombres au processus de Poisson ponctuel associé à  $(\tau_t)$  prouve que,  $P$  presque tout  $\omega$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{n}(\epsilon)} \#\{s; \tau_s - \tau_{s-} > \epsilon; s < a\} = a \quad \forall a > 0.$$

Ce résultat, appliqué à  $a = L_t(\omega)$  donne une caractérisation classique de  $(L_t)$

$$L_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{n}(\varepsilon)} \#\{u ; u \in G \quad d_u - u > \varepsilon, u < t\}$$

prouvant que  $(L_t)$  ne dépend que des zéros de  $(B_t)$ . Appelons alors  $P$  l'image de  $\tilde{P}$  par  $\phi$  et définissons  $\ell_t$  sur  $\Omega$  par

$$\ell_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{n}(\varepsilon)} \#\{u \in G ; d_u - u > \varepsilon ; u < t\}. L_t \text{ et } \ell_t \cdot \phi \text{ sont indistinguables}$$

et l'on montre sans difficultés, passant par l'intermédiaire de  $\tilde{\alpha}$  que, pour tout  $(Z_t)$  optionnel

$$E_P \left[ \sum_{s \in G} Z_s \alpha(d_s - s) \right] = E \left[ \int_0^\infty Z_s d\ell_s \times \int_{\mathbb{R}_+} n(dy) \alpha(y) \right]$$

Le couple  $(\ell_t, n)$  est donc une désintégration optionnelle de  $\pi_g$ . On

notera, ce qui n'a d'ailleurs aucune importance, que cette désintégration n'est pas normalisée:  $\int (1 - e^{-x}) n(dx) = \sqrt{2}$ . La désintégration normalisée de  $\pi_g$  est le couple

$$\left( \frac{n(dx)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \ell_t \right).$$

## §5. LES EXTREMITES DES INTERVALLES CONTIGUS A H.

1) Quelques définitions relatives à N.

- Revenons au cas général et considérons une désintégration optionnelle  $(d\ell_t, N_t)$  de  $\pi_g$ . La mesure  $N(\omega, s, dy)$  pouvant donner la masse infinie à tout voisinage de l'origine, sa fonction de répartition n'est pas très utile ; en revanche le processus optionnel

$$\tilde{N}(s, x) = N(s, ]x, \infty])$$

est fini pour tout  $x > 0$ , continu à droite en  $x$  et détermine le noyau  $N$ .

Nous introduisons également le processus optionnel  $\tilde{N}_-(s, x) = N(s, [x, \infty])$  qui est continu à gauche en  $x$ , cette notation étant, à l'évidence, dangereuse.

- Nous aurons besoin de savoir si les mesures  $N(\omega, s, \cdot)$  sont à support compact ; à cet effet, nous appellerons  $b_s$  le processus défini par

$$b_s = \inf\{x ; \tilde{N}(s, x) = 0\}.$$

$(b_s)$  est un processus optionnel : pour le voir, on remplace d'abord  $N$  par un noyau  $N'$  équivalent à  $N$  tel que  $N'1 = 1$

$(N'(s, dx) = (1 - e^{-x}) N(s, dx)$  dans le cas normalisé) et l'on remarque que

$$b_s = \lim_n \left[ \int_E x^n N'(s, dx) \right]^{1/n}.$$

- Si  $\phi$  est un processus paramétré borné, nous poserons

$$(84) \quad U_\phi(s, x) = \frac{1}{\tilde{N}(s, x)} \int_{]x, \infty]} \phi(s, y) N(s, dy).$$

Cette formule n'a de sens que si  $\tilde{N}(s, x) > 0$ , c'est-à-dire  $x < b_s$ . Pour la bonne règle, nous conviendrons que  $U_\phi = 0$  si  $\tilde{N}(s, x) = 0$ , mais cette précaution est largement inutile : le noyau  $U_\phi$  n'interviendra que pour construire des processus  $U_\phi(g_t^+, t - g_t^+)$ , et nous verrons que, avec probabilité 1 le processus  $t - g_t^+$  reste dans la partie significative de la définition de  $U_\phi$ . On définira de même

$$U_{-}\phi(s,x) = \frac{1}{\tilde{N}_{-}(s,x)} \int_{[x,\infty]} \phi(s,y) N(s,dy) \quad \text{si } \tilde{N}_{-}(s,x) > 0$$

$$= 0 \quad \text{si } \tilde{N}_{-}(s,x) = 0.$$

La proposition qui suit, ainsi que sa démonstration est classique dans la théorie des excursions ; elle est volée à Weil [19] et Maisonneuve [11].

2) Un lemme de la théorie des excursions.

(85) PROPOSITION : Soient  $\phi$  un processus paramétré optionnel borné et  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\underline{F}_t)$ .

a) La variable aléatoire  $\tilde{N}(g_T^+, T-g_T^+)$  est strictement positive sur l'évènement  $\{0 < g_T^+ < T < \infty\}$  ; de plus

$$E[\phi(g_T^+, d_T^- - g_T^+) ; 0 < g_T^+ < T < \infty / \underline{F}_T] = U_{-}\phi(g_T^+, T-g_T^+) 1_{\{0 < g_T^+ < T < \infty\}}.$$

b) Supposons  $T$  prévisible ;  $\tilde{N}(g_T, T-g_T)$  est strictement positive sur l'évènement  $\{0 < g_T < T\}$  ; de plus ;

$$E[\phi(g_T, d_T^- - g_T) ; 0 < g_T < T / \underline{F}_T^-] = U_{-}\phi(g_T, T-g_T) 1_{\{0 < g_T < T\}}.$$

Démonstration : Si  $a$  est un réel positif, on a l'équivalence

$0 < s = g_a^+ < a \iff s \in G \text{ et } s < a < d_s$  ; on peut donc écrire, si  $(\alpha_s)$  est un processus optionnel borné,

$$(86) \quad \alpha_{g_T^+}^+ \phi(g_T^+, d_T^- - g_T^+) 1_{\{0 < g_T^+ < T < \infty\}} = \sum_{s \in G} \alpha_s \phi(s, d_s - s) 1_{\{s < T < d_s\}}.$$

(La somme figurant au second membre ne comporte, en réalité, qu'un terme non nul).

On peut supposer que  $T$  est un temps d'arrêt de la filtration  $(\underline{F}_t^0)$  ; on a alors  $\{T < d_s\} = \{T \circ k_{d_s} < d_s\} = \{T \circ a_s < d_s\}$ , et l'espérance du second membre de (86) peut s'écrire

$$E \left[ \sum_{s \in G} \phi(s, d_s - s) \alpha_s 1_{\{s < T\}} 1_{\{T \circ a_s - s < d_s - s\}} \right] ;$$

posons alors  $\beta(s,y) = 1_{\{y > T \circ a_s - s\}}$  ; on a

$$(87) \quad E[\phi(g_T^+, d_T - g_T^+); 0 < g_T^+ < T < \infty; \alpha_{g_T^+}] = E\left[\int_0^\infty 1_{\{s < T\}} \alpha_s N_s(\phi\beta) d\ell_s\right]$$

En particulier, pour  $\phi = 1$ , on a

$$(88) \quad E[\alpha_{g_T^+}; 0 < g_T^+ < T < \infty] = E\left[\int_0^\infty 1_{\{s < T\}} \alpha_s N_{s\beta} d\ell_s\right]$$

Appliquons cette égalité au processus  $\alpha_s = 1_{\{N_{s\beta} = 0\}}$  ; il vient

$$0 = E[0 < g_T^+ < T < \infty; \{N_\beta(g_T^+) = 0\}]$$

La variable aléatoire  $N_\beta(g_T^+)$  est donc strictement positive sur  $\{0 < g_T^+ < T < \infty\}$  ; mais puisque sur  $\{g_T^+ < T\}$ ,

$$\beta(g_T^+, y) = \beta(g_T, y) = 1_{\{y > T \circ k_{d_T} - g_T\}} = 1_{\{y > T - g_T\}},$$

$(N_\beta)(g_T^+)$  vaut donc  $\hat{N}(g_T^+, T - g_T^+)$  sur cet évènement, et la première partie du point a) se trouve démontrée. Revenons à l'égalité (87) ; le second membre s'écrit

$$E\left[\int_0^\infty 1_{\{s < T\}} \alpha_s \frac{N_s(\phi\beta)}{N_{s\beta}} N_{s\beta} 1_{\{N_{s\beta} > 0\}} d\ell_s\right],$$

et l'on peut transformer cette quantité à l'aide de (88) ; elle s'écrit

$$E\left[0 < g_T^+ < T < \infty; \alpha_{g_T^+} \frac{N(\phi\beta)}{N_\beta}(g_T^+); \{N_\beta(g_T^+) > 0\}\right];$$

on peut supprimer le dernier évènement dans cette expression, si bien que l'on a établi l'égalité

$$E[\phi(g_T^+, d_T - g_T^+); 0 < g_T^+ < T < \infty; \alpha_{g_T^+}] = E\left[\alpha_{g_T^+}; 0 < g_T^+ < T < \infty; \frac{N(\phi\beta)}{N_\beta}(g_T^+)\right].$$

Mais, d'après (30) la famille des variables aléatoires  $\alpha_{g_T^+}$  engendre la tribu  $\underline{E}_T$  sur l'évènement  $\{g_T^+ < T\}$  ; on a donc

$$E[\phi(g_T^+, d_T - g_T^+); 0 < g_T^+ < T < \infty / \underline{E}_T] = 1_{\{0 < g_T^+ < T < \infty\}} \frac{N(\phi\beta)}{N_\beta}(g_T^+).$$

Il reste à transformer  $N(\phi\beta)(g_T^+)$  comme nous l'avons fait pour  $N_\beta(g_T^+)$

il y a quelques lignes ; on voit alors que

$$1_{\{0 < g_T^+ < T < \infty\}} \frac{N(\phi\beta)}{N_\beta}(g_T^+) = 1_{\{0 < g_T^+ < T < \infty\}} U\phi(g_T^+, T - g_T^+), \text{ ce qui termine la démonstration de a).}$$



Passons au point b), supposons  $T$  prévisible et considérons une suite  $T_n$  annonçant  $T$ . Commençons par montrer que  $\hat{N}_-(g_T, T-g_T)$  est strictement positive sur l'évènement  $\{0 < g_T < T\}$ .

Nous distinguerons deux cas, suivant que la mesure  $N(g_T, dy)$  charge ou non le point le plus à droite de son support : introduisons les évènements  $A = \{0 < g_T < T\} \cap \{\hat{N}_-(g_T, b_{g_T}) > 0\}$   $A' = \{0 < g_T < T\} \cap \{\hat{N}_-(g_T, b_{g_T}) = 0\}$ .

Nous avons vu dans la première partie que le processus  $(\hat{N}(g_T^+, t-g_T^+))$  était strictement positif sur  $H^C$ , ce qui s'écrit encore  $(t-g_t^+) < b_{g_t^+}$  sur  $H^C$ . Par régularisation à gauche, on obtient  $t-g_t < b_{g_t}$  sur  $H^C \cup D$ ; on a donc  $\hat{N}_-(g_T, T-g_T) > \hat{N}_-(g_T, b_{g_T}) > 0$  sur  $A$ . Examinons maintenant ce qui se passe sur  $A'$ . Pour cela, considérons la quantité

$$P[d_{T_n}^- - g_{T_n}^+ > b_{g_{T_n}^+} ; 0 < g_{T_n}^+ < T_n < \infty ; \{\hat{N}_-(g_{T_n}^+, b_{g_{T_n}^+}) = 0\}]$$

Une application de la partie a) au processus paramétré optionnel

$\phi(s, x) = 1_{\{x > b_s\}}$  montre que cette expression est nulle; faisons tendre  $n$  vers l'infini; puisque  $g_{T_n}^+$  et  $d_{T_n}^-$  tendent de manière stationnaire respectivement vers  $g_T$  et  $d_T^-$  sur l'évènement  $\{0 < g_T < T\}$ , on a

$$P[d_T^- - g_T > b_{g_T} ; A'] = 0 ;$$

on a donc

$$T - g_T < d_T^- - g_T < b_{g_T} \text{ sur } A'$$

d'où le résultat. Le reste est facile : on applique ((85), a) à la suite  $T_n$  puis on fait tendre  $n$  vers l'infini, on obtient ainsi l'égalité ((85), b).

Nous allons maintenant montrer brièvement que, dans le cas parfait, on peut faire le même calcul avec une désintégration prévisible  $(d\hat{z}_t, \hat{N}_t)$  de  $\pi_g$ ; on notera  $\hat{U}$  et  $\hat{U}_-$  les noyaux construits en (84) à l'aide de  $\hat{N}$

(89) PROPOSITION : Si  $H$  est parfait, on peut remplacer  $U$  et  $U_-$  par  $\hat{U}$  et  $\hat{U}_-$  dans l'énoncé de la proposition (85).

Démonstration : On commence cette fois-ci par démontrer le cas prévisible : on part de l'équivalence

$0 < s = g_a < a \iff s \in G \text{ et } s < a < d_s$   
 et l'on se donne un processus  $(\alpha_s)$  et un temps d'arrêt  $T$ , tous deux prévisibles ; on a

$$E[\phi(g_T, d_T^- - g_T) \alpha_{g_T} ; 0 < g_T < T] = E\left[\sum_{s \in G} \phi(s, d_s - s) \alpha_s 1_{[0, T]}(s) 1_{\{d_s > T\}}\right].$$

Puisque  $H$  est parfait et  $T$  prévisible, on a  $\{T < d_s\} = \{T \circ k_s < d_s\}$ , et l'on peut écrire, si  $\dot{\beta}(s, y) = 1_{\{y > T \circ k_s - s\}}$

$$E[\phi(g_T, d_T^- - g_T) \alpha_{g_T} ; 0 < g_T < T] = E\left[\int_0^\infty 1_{\{s < T\}} \alpha_s \dot{N}_s(\phi \dot{\beta}) d\dot{s}_s\right].$$

Le reste du calcul se poursuit comme en (85). La formule ((85), a) s'obtient alors comme sous produit de la formule prévisible, en approchant un temps d'arrêt quelconque par une suite strictement décroissante de temps d'arrêt prévisibles. (On utilise dans tout cela la remarque ((30), 4).

### 3) La partie prévisible de $D$ .

Nous supposons pour éviter les difficultés de notations à l'origine, que  $0 \in H$  p.s. Commençons par une trivialité sur les mesures sur  $\mathbb{R}_+$ .

(90) LEMME : Soit  $N$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  intégrant la fonction  $(1 - e^{-x})$ . On suppose qu'il existe un point  $x_0 > 0$  et une fonction  $\phi$  strictement croissante  $> 0$  tels que

$$(i) \quad N[x_0^\infty] > 0 \quad (ii) \quad \frac{1}{N[x_0^\infty]} \int_{[x_0^\infty]} \phi(y) N(dy) = \phi(x_0).$$

Appelons  $b$  la borne supérieure du support de  $N$ .

Alors  $x_0 = b$  et  $N\{b\} > 0$ .

Démonstration : La condition (i) entraîne  $x_0 < b$  ; (ii) peut s'écrire

$$\int_{[x_0^\infty]} \phi(y) N(dy) = \int_{[x_0^\infty]} \phi(x_0) N(dy), \text{ ce qui entraîne } N[x_0^\infty] = 0 \text{ puis-}$$

que  $\phi$  est strictement croissante ; on a donc  $x_0 = b$  et  $N\{b\} = N[x_0^\infty] > 0$ .

(91) PROPOSITION : Soit  $S$  un temps d'arrêt prévisible tel que  $[[S]] \subset D$  ; sur l'évènement  $\{g_S < \infty\}$ ,  $N(g_S, \{b_{g_S}\})$  est strictement positive et  $S - g_S = b_{g_S}$ .

Démonstration : Appliquons l'égalité ((85),b) au temps d'arrêt prévisible  $S$  ; il vient, si l'on remarque que  $g_S > 0$  et  $d_S^- = S$  sur  $\{g_S < \infty\}$ ,

$$E[\phi(S-g_S) ; g_S < S/\underline{F}_S^-] = U_- \phi(g_S, S-g_S) 1_{\{g_S < S\}}.$$

Tout sort du conditionnement au premier membre, si bien que l'on a

$$(S-g_S) 1_{\{g_S < S\}} = U_- \phi(g_S, S-g_S) 1_{\{g_S < S\}} ;$$

il ne reste plus qu'à appliquer le lemme (90) à la mesure  $N(g_S(\omega), dy)$

et au point  $x_0 = S(\omega) - g_S(\omega)$ .

(92) THEOREME : L'ensemble aléatoire  $\{t / t-g_t = b_{g_t} ; \tilde{N}_-(g_t, b_{g_t}) > 0\}$  est  
le plus grand ensemble prévisible contenu dans  $D$ .

Démonstration : Appelons  $D'$  cet ensemble aléatoire ; puisque le processus  $(b_{g_t})$  est strictement positif,  $D'$  est inclus dans  $H^C \cup D$ . D'autre

part, on sait ((85),a) que  $t-g_t^+$  (ou, ce qui revient au même  $t-g_t$ ) est strictement inférieur à  $b_{g_t}$  sur  $H^C$ .  $D'$  est donc inclus dans  $D$ . Le

processus  $1_{\{g_t < t\}} \tilde{N}_-(g_t, b_{g_t})$  étant prévisible d'après ((20),1),  $D'$  est prévisible. Il résulte immédiatement de (91) que tout ensemble prévisible inclus dans  $D$  est inclus dans  $D'$ .

Ainsi, dans le cas régénératif,  $D$  ne peut comporter de partie prévisible que si la mesure de Lévy  $N$  est à support compact et charge le point le plus à droite de son support ;  $D'$  est alors l'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à  $H$  de longueur  $b$ . Simplifions un peu plus et supposons que  $N$  soit une probabilité. Les temps de passages successifs dans  $H$  ne sont jamais prévisibles, d'après (91), à moins que  $N$  ne soit dégénérée. Cela n'empêche pas  $H$  (qui dans ce cas est égal à  $D$ ) de contenir des temps d'arrêt prévisibles, à savoir les temps successifs de passage du processus  $(t-g_t)$  dans  $\{b\}$ .

(92 bis) REMARQUE : La formulation du théorème (92) a le mérite à faire observer qu'il ne peut y avoir de partie prévisible non évanescence dans  $D$  que si le noyau  $N$  est d'une forme particulière. Cela dit, il est bon de remarquer que cet ensemble aléatoire prend tout aussi bien la forme plus simple

$$\{t ; t - g_t = b_{g_t}\}.$$

On peut montrer facilement en effet que

$$\{t ; t - g_t = b_{g_t}\} \subset \{t ; \tilde{N}_-(g_t, b_{g_t}) > 0\}.$$

Soit  $S$  un temps d'arrêt prévisible dont le graphe est inclus dans l'ensemble aléatoire de gauche ; on a si  $\phi$  est strictement croissante,

$$E[\phi(b_{g_S})S < \infty] = E[\phi(S - g_S)S < \infty] < E[\phi(d_S^- - g_S)S < \infty] = E[U_\phi(g_S, S - g_S)S < \infty] \\ < E[\phi(b_{g_S})S < \infty].$$

Puisque les membres extrêmes de ces inégalités sont égaux, on a

$$E[\phi(S - g_S)S < \infty] = E[U_\phi(g_S, S - g_S)S < \infty].$$

D'où l'on tire  $\phi(S - g_S) = U_\phi(g_S, S - g_S)$  p.s. sur  $(S < \infty)$ .

Et l'on a vu en (90) que cela impliquait  $\tilde{N}_-(g_S, b_{g_S}) > 0$  sur  $(S < \infty)$ .

#### 4) La partie accessible de $D$ .

(93) THEOREME : La partie accessible de  $D$  est

$$D \cap \{t / N(g_t, \{t - g_t\}) > 0\}.$$

Démonstration : Nous continuons à supposer que  $H$  contient 0. La démonstration se décomposera en plusieurs parties :

a) Soit  $S$  un temps d'arrêt prévisible tel que  $[[S]] \subset H^C \cup D$  ; appelons  $A$  l'évènement  $\{\omega / (\omega, S(\omega)) \in D\}$ ,  $\bar{A} = \{S < \infty\} - A$ .

Sur  $\{S < \infty\}$ , on a la relation

$$(94) \quad P(A/\mathbb{F}_S^-)[(U_\phi - \phi)(g_S, S - g_S)] = P(\bar{A}/\mathbb{F}_S^-)[(U_\phi - U_\phi)(g_S, S - g_S)]$$

quelque soit le processus paramétré optionnel borné  $\phi$ .

Montrons cette égalité ; on a, en appliquant ((85), b) sur  $\{S < \infty\}$

$$E[\phi(g_S, d_S^- - g_S)/\mathbb{F}_S^-] = U_\phi(g_S, S - g_S).$$

Le premier membre peut aussi s'écrire

$$\phi(g_S, S - g_S) P(A/\mathbb{F}_S^-) + E[\phi(g_S, d_S^- - g_S)/\mathbb{F}_S^-] 1_{\bar{A}}/\mathbb{F}_S^-].$$

Appliquons maintenant (85), a) ; cette quantité est égale à

$$\phi(g_S, S-g_S) P(A/\underline{E}_S^-) + U\phi(g_S, S-g_S) P(\bar{A}/\underline{E}_S^-).$$

On a donc établi l'égalité

$$U_{-\phi}(g_S, S-g_S) = \phi(g_S, S-g_S) P(A/\underline{E}_S^-) + U\phi(g_S, S-g_S) P(\bar{A}/\underline{E}_S^-)$$

d'où il est facile de tirer (94).

b) Intéressons-nous maintenant à l'évènement  $A' = \{P(A/\underline{E}_S^-) = 1\}$  : c'est le plus grand évènement  $\underline{E}_S^-$  mesurable inclus dans  $A$  ; on peut écrire  $A'$  d'une autre façon ; on a

$$(95) \quad A' = \{S < \infty\} \cap \{S-g_S = b_{g_S}\} \cap \{N(g_S, \{b_{g_S}\}) > 0\}.$$

Appelons en effet  $A'$  l'évènement figurant au deuxième membre.  $S^{A'}$  est un temps d'arrêt prévisible dont le graphe est contenu dans  $D$  ; d'après (91),  $A' \subset A''$ . Inversement, si nous appelons  $(z_t)$  l'indicatrice de l'ensemble aléatoire  $\{t / t-g_t = b_{g_t} ; N(g_t, \{b_{g_t}\}) > 0\}$ , on a  $1_{A''} = z_S 1_{\{S < \infty\}}$ .

Appliquant alors (92), on voit que  $A''$  est un évènement  $\underline{E}_S^-$  mesurable contenu dans  $A$  ; on a donc  $A'' \subset A'$  ce qui achève de montrer (95).

c) On peut alors montrer le théorème (93). Désignons par  $\phi$  la fonction  $x \rightarrow (1-e^{-x})$  et par  $\Delta$  l'ensemble aléatoire  $\{t ; N(g_t, \{t-g_t\}) > 0\}$ .

$\Delta$  est mince, optionnel, contenu dans  $\{t ; g_t < t\}$  ; c'est donc un ensemble prévisible mince, et  $\Delta' = D \cap \Delta$  est un candidat à être la partie accessible de  $D$ . Il reste à montrer que si  $S$  est un temps d'arrêt prévisible,  $[[S]] \cap D$  est contenu dans  $\Delta$  ; quitte à restreindre  $S$ , on peut supposer que  $[[S]] \cup H^C \subset D$ . Plaçons-nous d'abord sur  $A'$ , et appliquons (95) ; on a  $N(g_S, \{S-g_S\}) = N(g_S, \{b_{g_S}\}) > 0$  sur  $A'$  ; regardons ce qui se passe sur  $A-A'$  : puisque l'on est sur  $A$  la variable aléatoire  $P(A/\underline{E}_S^-)$  est strictement positive ; d'autre part  $S-g_S$  est strictement inférieure à  $b_{g_S}$  (cf remarque (92 bis)), et  $U_{-\phi}(g_S, S-g_S)$  est donc strictement supérieure à  $\phi(S-g_S)$ . Le premier membre de (94) est donc strictement positif.

Il en est de même du second, ce qui n'est possible que si  
 $N(g_S, \{S-g_S\}) > 0$ , C.Q.F.D.

(95 bis) COROLLAIRE : Si pour presque tout  $\omega$  les mesures  $N(t, \omega, dx)$  sont diffuses,  $D$  est totalement inaccessible.

Rappelons alors ((33), (68)) que les temps d'arrêt qui évitent  $H$  sont prévisibles. Dans le cas régénératif il suffit même qu'ils évitent  $D$ , et la filtration est quasi continue à gauche. Cela permet d'améliorer un peu les résultats de [10] sur le "processus de l'âge"  $(t-g_t^+)$ . On sait que ce processus est fortement markovien sans aucune hypothèse sur la mesure de Lévy  $N$ . Si l'on suppose maintenant que  $N$  est diffuse, ce processus devient quasi continu à gauche (puisque l'ensemble de ses temps de saut est  $D$ ), et sa filtration naturelle est quasi continue à gauche ; c'est donc un processus de Hunt.

##### 5) Etude des extrémités gauches.

Commençons par un petit rappel sur les ensembles minces. Plaçons-nous sur un espace quelconque satisfaisant aux conditions habituelles et donnons-nous un ensemble aléatoire mesurable mince  $\Gamma$ . Il existe une décomposition unique  $\Gamma = \Gamma^0 + \Gamma^r$  de  $\Gamma$  telle que

- $\Gamma^0$  soit contenu dans un ensemble optionnel mince
- $\Gamma^r$  évite tout temps d'arrêt.

(On commence par se ramener au cas où  $\Gamma$  est le graphe d'une variable aléatoire, et l'on procède, dans ce cas, comme pour décomposer un temps d'arrêt en ses parties accessible et totalement inaccessible). Supposons maintenant  $\Gamma$  progressif, et écrivons  $\Gamma^0 = \Gamma \cap M$  où  $M$  est optionnel mince ;  $\Gamma^0$  est progressif, contenu dans un optionnel mince, donc optionnel. De plus on a, pour tout temps d'arrêt  $T$ ,  $1_{\Gamma^0}(T)1_{\{T < \infty\}} = 1_{\Gamma}(T)1_{\{T < \infty\}}$  ; il en résulte que  $\Gamma^0$  est la projection de  $\Gamma$  ; on vient de démontrer le résultat suivant

(96) Si  $\Gamma$  est progressif mince, la projection optionnelle de  $\Gamma$  est un ensemble aléatoire  $\Gamma^0$  contenu dans  $\Gamma$  et  $\Gamma^r = \Gamma - \Gamma^0$  évite tous les temps d'arrêt.

Revenons maintenant au cas où  $\Gamma$  est l'ensemble aléatoire  $G$  des extrémités gauches des intervalles contigus à un ensemble optionnel  $H$ .

Posons  $Z_t = e^{-(d_t - t)}$  et appelons  $(X_t)$  la projection optionnelle de  $(Z_t)$ ; on a

$$G^0 = \{t; X_t < 1\} \cap H \quad G^r = G \cap \{t; X_t = 1\}.$$

Montrons cela rapidement.

a) En projetant l'inégalité  $Z1_G < 1_G$  sur la tribu optionnelle, on obtient  $X1_{G^0} < 1_{G^0}$ , ce qui montre que  $(X_t)$  est strictement inférieur à 1 sur  $G^0$ .

b) Projetons maintenant l'égalité  $Z1_{H-G} = 1_{H-G}$ ; il vient  $X1_{H-G^0} = 1_{H-G^0}$ .

Il en résulte que  $(X_t)$  est égal à 1 sur  $H-G^0$ . (On a utilisé à deux reprises le résultat facile suivant de théorie générale des processus : si  $(Z_t)$  est mesurable et  $(Y_t)$  progressif  ${}^0(YZ) = {}^0Y \times {}^0Z$ ).

(97) THEOREME :  $G^0 = \{t; \ell_t > \ell_t^-\} = \{t; N_t(E) < \infty\} \cap G$

$$G^r = \{t; \ell_t = \ell_t^-\} \cap G = \{t; N_t(E) = \infty\} \cap G$$

Démonstration : Pour démontrer la première égalité, nous pouvons supposer  $(d\ell_t, N_t)$  normalisé; rappelons la formule (54) : si  $T$  est un temps d'arrêt

$$E[e^{-d_T^-}] = E\left[\int_{[T, \infty[} e^{-s} d\ell_s\right];$$

par régularisation à droite, on obtient aussi

$$E[e^{-d_T^-}] = E\left[\int_{]T, \infty[} e^{-s} d\ell_s\right],$$

puis par différence

$$E[e^{-d_T^-} - e^{-d_T^-}/E_T] = e^{-T} \Delta\ell_T.$$

Cela peut se transformer en une égalité entre processus ; on a  $\Delta \lambda_s = X_{s-} - X_s$  ; mais les sauts de  $(\lambda_t)$  étant portés par  $H$ , on peut écrire  $\Delta \lambda_s = 1_H \Delta \lambda_s = 1_H(X_{s-} - X_s) = 1_H(1 - X_s)$ , de sorte que  $\{t ; \Delta \lambda_t > 0\} = \{t ; X_t < 1\} \cap H = G^0$ . Passons à la seconde égalité. Appliquons la proposition ((85), a) à  $\phi(x) = 1 - e^{-x}$  ; il vient (en supposant toujours que  $0 \in H$ )

$$1_{\{g^+ < T\}} E(1 - e^{-(d_T - g_T^+)}/\underline{E}_T) = 1_{\{g_T^+ < T\}} U\phi(g_T^+, T - g_T^+)$$

ce qui peut se transformer en une égalité entre processus

$$1_{H^c}(t) [1 - e^{g_t} E(e^{-d_t}/\underline{E}_t)] = 1_{H^c}(t) U\phi(g_t^+, t - g_t^+).$$

Soit  $s \in G$  ; faisons décroître  $t$  vers  $s$  ; il vient

$$1_G(s) [1 - e^{-s} E(e^{-d_s}/\underline{E}_s)] = 1_G(s) U\phi(s, 0) = 1_G(s) (1 - X_s)$$

Remarquons que le second membre est nul si  $N(s, E) = \infty$  et strictement positif si  $N(s, E) < \infty$  ; on a donc

$$G^0 = G \cap \{t ; X_t = 1\} = \{t ; N(t, E) = \infty\} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(98) REMARQUE : Supposons  $H$  parfait. On peut, compte tenu de (89) remplacer  $N_t$  par  $\dot{N}_t$  dans la seconde partie de la démonstration. On a donc

$$G^r = \{t \in G ; \dot{N}(t, E) = \infty\}.$$

En particulier, si  $\dot{N}(t, E)$  est infini sur  $G$ ,  $G^r = G$  et le temps local est continu d'après (97). Il en résulte facilement que  $(d\lambda_t, \dot{N}_t)$  est une désintégration optionnelle de  $\pi_g$  ; on peut donc choisir  $N_t$  prévisible.



# §6. UNE SOUS-MARTINGALE REMARQUABLE.

Le moyen le plus rapide de construire le temps local en 0 du mouvement Brownien  $(B_t)$  est d'effectuer la décomposition de Doob - Meyer de la sous-martingale  $|B_t|$ . Nous allons, dans ce chapitre, trouver une sous-martingale locale simple qui tiendra le rôle de  $|B_t|$  ; rappelons les notations du §5 et posons  $b_t = \inf\{x ; \tilde{N}(t, x) > 0\}$ . Nous noterons  $D_p$  la partie prévisible de  $D$  :

$$D_p = \{(t, \omega) / t - g_t(\omega) = b_{g_t}(\omega)\} = \{t, \omega / t - g_t = b_{g_t} ; N(g_t, \{b_{g_t}\}) > 0\}.$$

Nous nous consacrerons, dans ce paragraphe à montrer le résultat suivant

(99) THEOREME : Soit  $(\lambda_t, N_t)$  une désintégration optionnelle de  $\Pi_g$ .

Posons 
$$Y_t = \frac{1}{N(g_t^+, t - g_t^+)} \frac{1}{H^c}(t)$$

$$\bar{Y}_t = Y_t + \sum_{\substack{s < t \\ s \in D}} Y_s^- = Y_t + \sum_{\substack{s < t \\ s \in D_p}} \frac{1}{N(g_s, \{b_{g_s}\})}$$

$(\bar{Y}_t - \lambda_t^-)$  est alors une martingale locale.

(Cela signifie que  $(\bar{Y}_t)$  est une sous-martingale locale forte régulière et que le processus croissant optionnel dans sa décomposition de Doob - Meyer - Mertens est  $(\lambda_t)$ ).

Sous l'hypothèse supplémentaire  $N(t, E) = \infty \quad \forall t$ ,  $(\bar{Y}_t)$  est continue à droite,  $(\lambda_t)$  est continu ;  $(\lambda_t)$  est alors le processus croissant prévisible de la décomposition de Doob - Meyer de  $(\bar{Y}_t)$ .

Nous ferons quelques commentaires et donnerons des exemples à la fin de ce paragraphe. Pour l'instant attachons-nous à montrer ce théorème, dont la démonstration est rendue compliquée par le fait que les mesures  $(N_t)$  peuvent avoir des comportements très différents quand  $t$  varie ; dans le cas régénératif, elle se réduirait à peu de choses. Nous aurons besoin de résultats intermédiaires.

(100) PROPOSITION : Soit  $(\beta_t)$  un processus optionnel borné inférieurement par une constante  $h$  strictement positive. Définissons

$$T^\beta = \inf\{t ; t - g_t^+ > \beta_{g_t^+}\} \quad \tau^\beta = g_{T^\beta}.$$

On a les égalités suivantes, quand  $(Z_t)$  est un processus optionnel positif,  $S$  un temps d'arrêt

$$(101) \quad E[Z_{\tau^\beta} ; T^\beta < \infty] = E\left[\int_{[0, T^\beta]} Z_s \tilde{N}(g_s^+, \beta_{g_s^+}) d\lambda_s\right]$$

$$(102) \quad 1_{\{S < T^\beta\}} P[S > \tau^\beta ; T^\beta < \infty / \mathcal{F}_S] = 1_{\{g_S^+ < S < T^\beta\}} \frac{\tilde{N}(g_S^+, \beta_{g_S^+})}{\tilde{N}(g_S^+, S - g_S^+)}.$$

Démonstration : La condition, " $\beta$  est bornée inférieurement", est là pour assurer que  $[[T^\beta]] \subset H^C$  ; elle pourrait être affaiblie (on pourrait par exemple se contenter d'exiger que la constante  $h$  dépende de  $\omega$ , puis que cette propriété n'ait lieu que localement). Quoi qu'il en soit, on a  $\tau^\beta = g_{T^\beta}^+$ . L'égalité (101) résulte d'une application immédiate

de la formule de désintégration (44) au processus paramétré

$$u(s, x) = Z_s 1_{[[0, T^\beta]]}(s) 1_{\{x > \beta_{g_s^+}\}}.$$

Pour montrer (102), appliquons (85) au processus paramétré

$$\phi(s, y) = 1_{[[0, T^\beta]]}(s) 1_{\{y > \beta_{g_s^+}\}},$$

il vient

$$1_{\{g_S^+ < S < d_{T^\beta}^-\}} P[T^\beta < \infty ; S > \tau^\beta / \mathcal{F}_S] = 1_{\{g_S^+ < S < d_{T^\beta}^-\}} \frac{\tilde{N}(g_S^+, (S - g_S^+) \vee \beta_{g_S^+})}{\tilde{N}(g_S^+, S - g_S^+)}.$$

Restreignons cette égalité à l'évènement  $\{S < T^\beta\}$ , sur lequel  $S - g_S^+$  est majoré par  $\beta_{g_S^+}$ , ce qui permet de simplifier le second membre ; on a

$$1_{\{g_S^+ < S < T^\beta\}} P[T^\beta < \infty ; S > \tau^\beta / \mathcal{F}_S] = 1_{\{g_S^+ < S < T^\beta\}} \frac{\tilde{N}(g_S^+, \beta_{g_S^+})}{\tilde{N}(g_S^+, S - g_S^+)}.$$

Il reste simplement à faire disparaître l'évènement  $\{g_S^+ < S\}$  du premier membre ; à cet effet, introduisons la projection optionnelle de l'ensemble aléatoire  $[[0, \tau^\beta]]$  ;  $\tau^\beta$  étant une fin d'optionnel, il est classique (cf. [1], [2]) que cette surmartingale forte régulière prend

la valeur 1 sur tout ensemble optionnel situé à gauche de  $\tau^\beta$ , en particulier sur  $H \cap [0, T^\beta]$ .

Il en résulte que la variable aléatoire  $P[S > \tau^\beta / \mathcal{F}_S]$  est nulle sur l'événement  $\{g_S^+ = S\} \cap \{S < T^\beta\}$ .

Donnons maintenant une interprétation plus ramassée des égalités (101) et (102). Posons

$$Y_t' = \tilde{N}(g_t^+, \beta_{g_t^+}) Y_t, \quad Y_t^\beta = Y_{t \wedge T^\beta}', \quad dB_t^\beta = 1_{[0, T^\beta]}(t) \tilde{N}(g_t^+, \beta_{g_t^+}) d\ell_t.$$

(103) PROPOSITION : On a, pour tout temps d'arrêt  $S$ ,

$$E[Y_S^\beta] = E[B_S^\beta -].$$

Démonstration : Remarquons d'abord que  $Y_t^\beta$  est égal à 1 pour  $t > T^\beta$ .

On a donc

$$[Y_S^\beta] = E\left[g_S^+ < S; S < T^\beta; \frac{\tilde{N}(g_S^+, \beta_{g_S^+})}{\tilde{N}(g_S^+, S - g_S^+)}\right] + P[S > T^\beta].$$

Appliquons maintenant (101) et (102); le second membre peut s'écrire

$$P[\tau^\beta < S < T^\beta; T^\beta < \infty] + P[S > T^\beta] = P[S > \tau^\beta; T^\beta < \infty] = E[B_S^\beta -].$$

On a, bien entendu, envie de simplifier (103) en "divisant" les deux membres par  $\tilde{N}(g_t^+, \beta_{g_t^+})$ . Cela est possible en reprenant l'astuce des balayeurs

(Azéma - Yor [3]) adaptée au cas régulier non continu à droite. Posons

$$Y_S^0 = 1_{\{\tilde{N}(g_S^+, \beta_{g_S^+}) > 0\}} \cdot Y_S, \quad d\ell_S^0 = 1_{\{\tilde{N}(g_S^+, \beta_{g_S^+}) > 0\}} d\ell_S.$$

(104) PROPOSITION :  $E\left[Y_{S \wedge T^\beta}^0\right] = E\left[\ell_{(S \wedge T^\beta)-}^0\right]$ , pour tout temps d'arrêt  $S$ .

Démonstration : Considérons la famille des processus  $(Z_t)$  optionnels positifs vérifiant

$$(105) \quad E\left[Z_{S \wedge T^\beta}^+ Y_{S \wedge T^\beta}^\beta\right] = E\left[\int_{[0, T^\beta \wedge S[} Z_{g_S^+}^+ dB_S^\beta\right]$$

pour tout temps d'arrêt  $S$ .

(105) est vérifiée quand  $Z$  est l'indicateur d'un intervalle stochastique  $[[0, U]]$  ; elle se réduit en effet dans ce cas à l'égalité

$$E[Y_S^\beta] = E[B_S^\beta] \quad \text{où l'on a posé } S' = S \wedge T^\beta \wedge d_U^-.$$

Un argument de classe monotone prouve alors que (105) est vérifiée pour tout  $(Z_t)$  optionnel positif ; il reste à l'appliquer au processus

$$Z_t = \frac{1}{N(t, \beta_t)} 1_{\{N(t, \beta_t) > 0\}} \quad \text{pour obtenir (104).}$$

(104) se généralise d'elle même en modifiant le processus  $(\beta_t)$  ; on peut par exemple énoncer

(106) PROPOSITION : Soit  $\Gamma$  un ensemble optionnel et  $(\beta_t)$  un processus optionnel  $\geq 0$  satisfaisant aux conditions suivantes

a)  $(\beta_t)$  est strictement borné inférieurement sur  $\Gamma$ .

b)  $N(g_t^+, \beta_{g_t^+})$  ne s'annule pas sur  $\Gamma$ .

Posons  $T_\Gamma^\beta = \inf\{t ; g_t^+ \in \Gamma ; t - g_t^+ > \beta_{g_t^+}\},$

$$Y_t^\Gamma = 1_\Gamma(g_t^+) Y_t \quad d\lambda_t^\Gamma = 1_\Gamma(t) \cdot d\lambda_t.$$

On a l'égalité  $E\left[Y_{S \wedge T_\Gamma^\beta}^\Gamma\right] = E\left[\lambda_{(S \wedge T_\Gamma^\beta)^-}^\Gamma\right] \quad \text{pour tout temps d'arrêt } S.$

C'est la proposition (104) appliquée au processus  $\beta_t^\Gamma$  défini par

$$\beta_t^\Gamma = \beta_t 1_\Gamma(t) + \infty 1_{\Gamma^c}(t).$$

On y est presque, mais les conditions demandées a) et b) sont antagonistes : pour que b) soit vérifiée, il faut que  $(\beta_t)$  soit strictement inférieur à  $(b_t)$ . Or, il y a des ensembles aléatoires tout à fait convenables, (par exemple un ensemble de Cantor déterministe), pour lesquels  $(b_t)$  n'est pas (même localement) strictement minoré ; il est alors impossible de prendre pour  $\Gamma$   $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  tout entier, ou même un intervalle stochastique. De plus le cas où  $N(t, \cdot)$  charge la fin de son support pose des problèmes particuliers. Sérions les difficultés, et énonçons une moitié du théorème (99).

(107) PROPOSITION : Posons  $\Gamma = \{(t, \omega) / b_t(\omega) = \infty \text{ ou } N(t, \{b_t\}) = 0\}$

$$Y_t^1 = 1_\Gamma(g_t^+)Y_t \quad d\ell_t^1 = 1_\Gamma(t)d\ell_t.$$

Alors  $(Y_t^1) - (\ell_t^1)$  est une martingale locale.

Démonstration : Introduisons les ensembles aléatoires

$$\Gamma^k = \Gamma \cap \{(t, \omega) / b_t > \frac{1}{k}\} \quad \text{et les processus } Y_t^k, \ell_t^k \text{ définis par}$$

$$Y_t^k = 1_{\Gamma^k}(g_t^+)Y_t \quad d\ell_t^k = 1_{\Gamma^k}(t)d\ell_t.$$

Nous allons, dans une première étape, montrer que  $Y_t^k - \ell_t^k$  est une martingale locale. Introduisons encore quelques notations et posons

$$\beta_t^n = (1 - \frac{1}{n})b_t 1_{\{b_t < \infty\}} + n 1_{\{b_t < \infty\}}$$

$$T_n^k = \inf\{t ; g_t^+ \in \Gamma^k \text{ (} t - g_t^+) > \beta_{g_t^+}^n\}.$$

Il est clair que  $\beta_t^n$  est strictement minoré sur  $\Gamma^k$  et que  $\hat{N}(g_t^+, \beta_{g_t^+}^n)$

ne s'annule pas ; on peut donc appliquer la proposition (106), et l'on a, pour tout temps d'arrêt  $S$ ,  $E[Y_{S \wedge T_n^k}^k] = E[\ell_{(S \wedge T_n^k)-}^k]$ . Notre première

étape sera achevée si l'on montre que  $T^k = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^k = \infty$ . Ecrivons pour cela

$$(108) \quad T_n^k - g_{T_n^k} = \beta_{g_{T_n^k}}^n = (1 - \frac{1}{n})\ell_{g_{T_n^k}} 1_{\{b_{g_{T_n^k}} < \infty\}} + n 1_{\{b_{g_{T_n^k}} = \infty\}}.$$

Le membre de gauche tend vers  $T^k - g_{T^k}$  quand  $n \rightarrow \infty$  (puisque le processus  $(t - g_t)$  est continu à gauche). Il est clair que, sur  $\{T^k < \infty\}$

$T^k - g_{T^k} > \frac{1}{k}$ , d'où il résulte que  $[[T^k]] \subset H^C \cup D$  ; la convergence de

$g_{T_n^k}$  vers  $g_{T^k}$  se fait de façon stationnaire, et l'on peut passer aussi à la limite dans le membre de droite de (108) de sorte que, sur  $\{T^k < \infty\}$

$$T^k - g_{T^k} = b_{g_{T^k}}.$$

On a donc les inclusions

$$\{T^k_{\infty}\} \subset \{T^k - g_{T^k}^{\infty}\} \subset \{b_{g_{T^k}^{\infty}}\} \cap \{T^k - g_{T^k}^k = b_{g_{T^k}^k}\} \subset \{b_{g_{T^k}^k}\} \cap \{N(g_{T^k}^k, \{b_{g_{T^k}^k}\}) > 0\}$$

(La dernière inclusion résultant de la remarque (92 bis)).

Mais le caractère stationnaire de la convergence des  $g_{T_n}^k$  prouve égale-

ment que  $g_{T^k}$  est dans  $\Gamma^k$  ; l'évènement d'extrême droite est donc de probabilité nulle et  $T^k$  presque sûrement infini.

Il reste à montrer que la propriété d'être une sous-martingale locale est conservée après passage à la limite, quand  $k \rightarrow \infty$ .

Il est tout d'abord facile de voir, en appliquant deux fois le lemme de Fatou, que l'on a l'inégalité  $E[Y_S^1] \leq E[\ell_S^1]$  pour tout temps d'arrêt  $S$ .

Appelons alors  $R_p$  une suite de temps d'arrêt tendant vers l'infini telle que  $E[\ell_{R_p}^1] < \infty$  et posons  $S_p = \inf\{t ; Y_t^1 > p\} \wedge R_p$ . On peut écrire, pour tout temps d'arrêt  $S$ ,

$$Y_{S \wedge S_p}^1 = Y_S^1 1_{\{S < S_p\}} + Y_{S_p}^1 1_{\{S \geq S_p\}} \leq p + Y_{S_p}^1.$$

Pour  $p$  fixé, la famille des variables aléatoires  $(Y_{S \wedge S_p}^1)$  est donc majorée par une variable aléatoire intégrable ; on en profite pour appliquer le théorème de Lebesgue en écrivant

$$E[Y_{S_p \wedge S}^k] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_{S_p \wedge S \wedge T_n^k}^k] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\ell_{(S_p \wedge S \wedge T_n^k)^-}^k] = E[\ell_{(S_p \wedge S)^-}^k].$$

Faisons maintenant tendre  $k$  vers l'infini ; en appliquant le théorème de convergence monotone aux deux membres, on obtient

$$E[Y_{S_p \wedge S}^1] = E[\ell_{(S_p \wedge S)^-}^1], \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Passons à la démonstration de la deuxième moitié du théorème (99).

(109) PROPOSITION : On pose  $\Gamma' = \{(t, \omega) / b_t < \infty \text{ et } N(t, \{b_t\}) > 0\} = \Gamma^c$

$$Y_t' = 1_{\Gamma'}(g_t^+)Y_t \quad d\ell_t' = 1_{\Gamma'}(t)d\ell_t.$$

On a alors, pour tout temps d'arrêt S

$$E[Y'_S] + E\left[\sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq S}} Y'_s\right] = E[\ell'_S].$$

Démonstration : Posons, comme précédemment

$$\Gamma_t^k = \Gamma \cap \{t; b_t > \frac{1}{k}\} ; \quad Y_t^k = 1_{\Gamma^k}(g_t^+) Y_t ; \quad d\ell_t^k = 1_{\Gamma^k}(t) d\ell_t$$

$$\beta_t^n = (1 - \frac{1}{n})b_t \quad T_n^k = \inf\{t; g_t^+ \in \Gamma^k ; t - g_t^+ > \beta_t^n\}$$

On commence par recopier la démonstration de (108) et l'on trouve que, pour tout temps d'arrêt S

$$(110) \quad E\left[Y_{S \wedge T_n^k}^k\right] = E\left[\ell_{(S \wedge T_n^k)-}^k\right]$$

Mais, maintenant, les temps d'arrêt  $T_n^k$  ne tendent plus vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$  ; il est facile de voir qu'ils ont pour limite le temps d'arrêt  $\sigma^k$  défini par

$$\sigma^k = \inf\{t; g_t^+ \in \Gamma^k ; t - g_t^+ = b_{g_t^+}\}.$$

Si l'on veut des renseignements sur ce qui se passe après  $\sigma^k$ , il faut itérer le procédé. Posons donc

$$\sigma^{k,1} = \sigma, \dots, \sigma^{k,p} = \inf\{t > \sigma^{k,p-1}; g_t^+ \in \Gamma^k ; t - g_t^+ = b_{g_t^+}\}$$

$$T_n^{k,p} = \inf\{t > \sigma^{k,p-1} ; g_t^+ \in \Gamma^k ; t - g_t^+ > \beta_{g_t^+}^n\}$$

Et remarquons que  $\sup_p \sigma^{k,p} = \infty$ , puisque  $\sigma^{k,p} - \sigma^{k,p-1} > \frac{1}{k}$ .

On est amené à généraliser (110) et l'on démontre l'égalité

$$(111) \quad E\left[S > \sigma^{k,(p-1)} ; Y_{S \wedge T_n^{k,p}}^k\right] = E\left[\int_{[\sigma^{k,(p-1)}, S \wedge T_n^{k,p}]} d\ell_t^k\right]$$

(ce qui peut se faire en remplaçant, dans la démonstration de (110),  $\Gamma^k$  par l'ensemble aléatoire  $\Gamma^k \cap [\sigma^{k,p-1}, \infty[$ ).

On voudrait maintenant faire tendre  $n$  vers l'infini, mais on est gêné pour appliquer le théorème de Lebesgue dans le membre de gauche ; qu'à cela ne tienne, la formule du balayage permet de remplacer

$(Y_t^k)$  par  $Y_t'' = Z_t + Y_t'^k$  et  $d\ell_t^k$  par  $Z_t d\ell_t^k$  dans la formule (111),

quelque soit le processus optionnel  $(Z_t)$  positif. Si l'on prend

$Z_t = N(t, \{b_t\})$ , les variables aléatoires  $1_{\{S >_{\sigma}^{k,p-1}\}} Y_{S \wedge T_n}^{k,p}$  sont

majorées par 1, et l'on est sorti d'affaire. Passons à la limite quand

$n \rightarrow \infty$  ; on obtient, puisque  $T_n^{k,p}$  croît strictement vers  $\sigma^{k,p}$

$$\begin{aligned} E[\sigma^{k,p-1} < S < \sigma^{k,p} ; N(g_S^+, \{b_{g_S^+}\})] + E[S >_{\sigma}^{k,p} ; N(g_{\sigma^{k,p}}, \{b_{g_{\sigma^{k,p}}}\}) Y_{\sigma^{k,p}}^k] \\ = E\left[\int_{[\sigma^{k,p-1}, \sigma^{k,p} \wedge S]} N(s, \{b_s\}) d\ell_s^k\right]. \end{aligned}$$

Puis on "divise" par les termes parasites, la justification étant toujours la même, pour obtenir

$$E[\sigma^{k,p-1} < S < \sigma^{k,p} ; Y_S^k] + E[S >_{\sigma}^{k,p} ; Y_{\sigma^{k,p}}^k] = E\left[\int_{[\sigma^{k,p-1}, \sigma^{k,p} \wedge S]} d\ell_s^k\right]$$

Sommons en  $p$  ; il vient :

$$E[Y_S^k] + E\left[\sum_p 1_{\{S >_{\sigma}^{k,p}\}} Y_{\sigma^{k,p}}^k\right] = E\left[\int_{[0, S]} d\ell_s^k\right].$$

Mais, d'après la caractérisation (99) de  $D_p$ , cela s'écrit aussi bien

$$E[Y_S^k] + E\left[\sum_{\substack{u \in D_p \\ u \leq S}} 1_{\Gamma, k}(g_u) Y_u^k\right] = E\left[\int_{[0, S]} d\ell_s^k\right]$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre  $k$  vers l'infini pour obtenir (109) ; la démonstration du théorème (99) est donc achevée, ou presque : si  $(N(t, E))$  est infini, on sait déjà que  $(\ell_t)$  est continue, la continuité à droite de  $(Y_t)$  en résulte immédiatement.



(112) DEFINITION : Nous dirons que  $(\bar{Y}_t)$  est la sous-martingale d'équilibre de  $H$

(113) REMARQUES : 1) On notera que  $(Y_t)$  est continue à gauche aux points de  $D_p$  ; on a en effet, si  $t \in D_p(\omega)$

$$Y_{t-}(\omega) = Y_t(\omega) + \sum_{\substack{s < t \\ s \in D_p}} Y_s(\omega) = \sum_{\substack{s < t \\ s \in D_p}} Y_s(\omega) = Y_t(\omega),$$

la dernière égalité provenant de ce que  $(Y_t)$  est nulle sur  $H$ .

2) Si  $E[\ell_t]$  est fini pour tout  $t$ , ce qui est le cas de la désintégration normalisée de  $\pi^g$ , (109) nous donne une vraie sous-martingale. Ce n'est pas le cas pour (107) qui continue à ne fournir qu'une sous-martingale locale.

(114) EXEMPLES : 1) Le cas déterministe, la formule (99), si elle n'est pas déraisonnable, doit fournir la trivialité  $\bar{Y}_t = \ell_t^-$  ; vérifions le :

le processus ponctuel  $\pi^g$  est optionnel, sa désintégration optionnelle fournit donc un temps local  $\ell_t$  purement discontinu, dont les temps de sauts se trouvent aux points de  $G$ . Appliquant la formule de désintégration

$$E\left[\sum_{s \in G} Z_s \phi(d_s - s)\right] = E\left[\int_0^\infty d\ell_s N_s \phi\right]$$

au processus  $Z_s = 1_{\{t\}}(s)$  ( $t \in G$ ), on trouve  $\Delta \ell_t \cdot N(t, dy) = \varepsilon_{(d_t - t)}(dy)$

• En particulier  $\Delta \ell_t = \frac{1}{N(t, E)}$  pour tout  $t \in G$ . On a donc

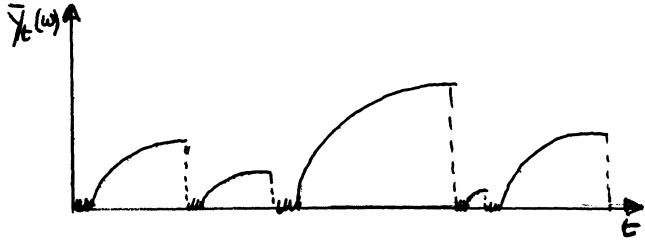
$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{s \in G} 1_{]s, d_s[}(t) \frac{1}{N(s, E)} + \sum_{\substack{s \in D \\ s < t}} \frac{1}{N(g_s, E)} = \sum_{\substack{s \in G \\ s < t}} \frac{1}{N(s, E)} + \sum_{\substack{s \in G \\ s < t}} \Delta \ell_s \\ &= \ell_t^- \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2) Le cas régénératif. Appelons  $N(dx)$  la mesure de Lévy et supposons  $N(E) = \infty$ .

- Dans le cas où  $N$  ne charge pas la fin de son support, on a

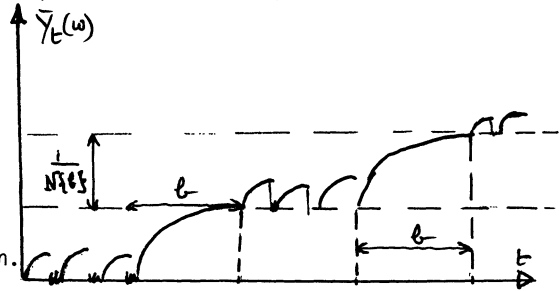
$$\bar{Y}_t = Y_t = \frac{1}{\bar{N}(t-g_t^+)} \quad (\text{le terme } 1_{H^c}(t) \text{ disparaît de lui-même dans les cas}$$

de masse infinie) et le graphe de  $t \rightarrow \bar{Y}_t$  prend une allure gentiment périodique.



- Si, au contraire,  $N$  charge la fin de son support  $b$ , autrement dit si  $N\{b\} > 0$ , il faut remonter le graphe précédent à chaque extrémité droite  $\sigma^D$  telle que  $\sigma^D - g_{\sigma^D} = b$  de manière à effacer la discontinuité qui serait tentée de s'y produire. Cela est conforme aux règles de la morale Strasbourgeoise qui interdisent aux processus réguliers, (en l'occurrence  $(\bar{Y}_t)$ ), de

sauter en des temps d'arrêt prévisibles. Serait-on tenté d'y désobéir, qu'un coup d'oeil rétrospectif au cas déterministe nous ramènerait dans le droit chemin.



Reportons-nous maintenant à la fin de la démonstration de (107) ; et considérons les temps d'arrêt  $S_p = \inf\{t ; Y_t^1 > p\} \wedge p$ . Supposons que la mesure  $N(dx)$  ne soit pas à support compact, et désignons par  $U$  l'inverse continue à droite de la fonction  $\frac{1}{\bar{N}}$ . On a

$$\inf\{t ; Y_t > p\} = \inf\{t ; (t-g_t^+) > u(p)\} > u(p).$$

On a donc

$$E[Y_{u(p) \wedge S}] = E[\ell_{(u(p) \wedge S)}]$$

pour tout temps d'arrêt  $S$ .

Comme les constantes  $u(p)$  tendent vers l'infini, cela signifie que  $(Y_t)$  est une vraie sous-martingale. Récapitulons avec (113)-2 : on a démontré :

(115) La sous-martingale locale d'équilibre  $(Y_t)$  associée à la mesure de Lévy  $N$  est une vraie sous-martingale dans les deux cas suivants

- \*  $N$  n'est pas à support compact
- \*  $N$  est à support compact et charge la fin de son support.

3) Le cas des zéros du mouvement Brownien correspond à l'ensemble régénératif de mesure de Lévy  $n(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} dx$ . La sous-martingale d'équilibre (une vraie sous-martingale d'après (115)) est donc donnée par

$$Y_t = \frac{1}{\tilde{n}(t-g_t^+)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t-g_t^+}.$$

Donnons une interprétation plus naturelle de cette sous-martingale ; pour cela nous changerons les notations :

$(\Omega, \underline{G}_t, B_t, P)$  désignera, dans ce paragraphe, la réalisation canonique du mouvement Brownien issu de 0,  $H$  sera  $\{t ; B_t = 0\}$ , et  $(\underline{F}_t)$  la filtration naturelle (rendue continue à droite et complète) du processus  $(g_t^+)$  ;  $(L_t)$  désignera le temps local en 0 du mouvement Brownien. Nous avons vu précédemment que  $(L_t)$  était optionnel dans la filtration  $(\underline{F}_t)$  et que c'était aussi le temps local de l'ensemble régénératif  $H$ . Récapitulons :

- $(|B_t| - L_t)$  est une martingale de la filtration  $(\underline{G}_t)$
- $(Y_t - L_t)$  est une martingale de la filtration  $(\underline{F}_t)$ .

Il paraît naturel que  $(Y_t)$  soit la projection optionnelle de  $(|B_t|)$  sur la filtration  $(\underline{F}_t)$  ; c'est effectivement ce qui se passe :

(116) PROPOSITION : La projection optionnelle de  $(|B_t|)$  sur la filtration  $\underline{F}_t$  est le processus  $Y_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t-g_t^+}$ .

Démonstration : Appelons  $Y'_t$  la projection optionnelle de  $|B_t|$  ; pour tout temps d'arrêt borné  $S$  de la filtration  $(\underline{F}_t)$ , on

$$E[Y'_S] = E[|B_S|] = E[L_S] = E[Y_S],$$

de sorte que le processus  $\mu_t = Y'_t - Y_t$  est une martingale continue à droite dans  $(\underline{F}_t)$ . Reste à montrer qu'elle est nulle. Projetons l'égalité  $|B_t| 1_H(t) = 0$  sur  $(\underline{F}_t)$  ; il vient  $Y''_t 1_H(t) = 0$  ;  $(\mu_t)$  est donc en tout cas nulle sur  $H$ . La formule de balayage nous indique alors que pour tout processus  $(Z_t)$  prévisible borné,  $(Z_{g_t} \mu_t)$  est encore une martingale ; fixons  $t$  ; on peut écrire

$$E[Z_{g_t} \mu_t] = E[Z_{g_t} \{g_t^+ < t\} \mu_t] = 0.$$

Appliquons alors (21) : on a  $E[\mu_t 1_A] = 0 \quad A \in \underline{F}_t$  ;  $\mu_t$  est donc presque sûrement nulle. C.Q.F.D.

Des raisonnements similaires prouvent facilement que les projections optionnelles sur  $(\underline{F}_t)$  de  $(B_t^+)$  et  $(B_t^-)$  sont égales à  $\frac{1}{2} Y_t$ . La projection de  $(B_t)$  est nulle.

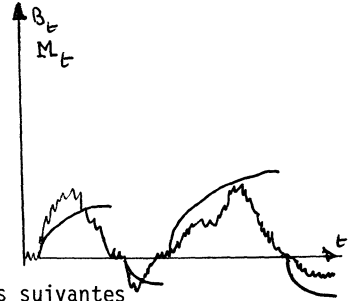
REMARQUE : Revenons à la situation générale. La fin de la démonstration de (116) montre que toute martingale de la filtration  $(\underline{F}_t)$  qui s'annule sur  $H$  est identiquement nulle.

Il est alors facile de répondre par la négative à une question de Dellacherie : on se donne une filtration  $(\phi_t)$  et un fermé optionnel  $H$  tel que  $G$  évite les temps d'arrêt. Y-a-t-il une martingale continue admettant  $H$  pour ensemble de ses zéros. En fait, dans la filtration  $(\underline{F}_t)$ , il n'existe aucune martingale non triviale (continue ou non) s'annulant sur  $H$ . On échappe à cette situation dès que l'on grossit un petit peu la filtration  $(\underline{F}_t)$  (cf. (117)). Nous verrons plus loin que dans des cas très généraux, il n'y a aucune martingale continue non triviale dans  $(\underline{F}_t)$ . A la question un peu plus difficile : "plaçons-nous dans la situation de Dellacherie ; y-a-t-il une martingale continue dans la filtration  $(\phi_t)$  ?", il faudra répondre également par la négative.

(117) Une application à la théorie du grossissement

On peut espérer obtenir une approximation de  $(B_t)$ , et non plus seulement de  $|B_t|$  en imposant à l'arche  $\pm \sqrt{t-g_t^+}$  d'être du même signe que  $(B_t)$ .

Il faut naturellement élargir la filtration  $(\underline{F}_t)$ . On posera les définitions suivantes



$M_t = \text{signe}(B_t)Y_t$  ;  $(\underline{F}_t')$  sera la filtration naturelle satisfaisant aux conditions habituelles engendrée par  $(M_t)$ . La proposition suivante peut se montrer par des méthodes analogues à celles qui ont été développées en (116). La martingale  $(M_t)$  peut servir de contre-exemple à d'autres problèmes ; nous donnerons une rédaction plus détaillée dans le compte rendu de l'Ecole d'Eté de Saint-Flour (Annales de l'Université de Clermont-Ferrand).

(118) PROPOSITION : 1)  $(M_t)$  est une martingale dans la filtration  $(\underline{F}_t')$  ; c'est la projection optionnelle de  $B_t$  sur cette filtration.

2)  $(M_t^+)$  est une sous-martingale et le processus croissant de sa décomposition de Meyer dans  $(\underline{F}_t'')$  est  $\frac{1}{2} L_t$  ;  $(M_t^+)$  est la projection optionnelle  $(B_t^+)$  sur  $(\underline{F}_t')$ .

Démonstration :  $(M_t)$  est donc une martingale dans sa propre filtration ; nous allons montrer maintenant qu'elle n'est même pas une semi-martingale dans la filtration  $(\underline{G}_t)$ . Cela raffine un exemple de Dudley qui donne un moyen de plonger un processus de Poisson dans la filtration Brownienne, et par conséquent, fournit une martingale pour sa filtration propre ne restant pas une martingale dans  $(\underline{G}_t)$ . Montrons tout d'abord que  $(Y_t)$  est à variation infinie sur tout intervalle  $[0, t]$ .

Posons  $V_t^\varepsilon = \sum_{\substack{s \in G \\ N(d_s - s) \leq \varepsilon}} 1_{\{d_s - s > \varepsilon\}}$  ;  $V_t = V_t^0$  ; la variation de  $(Y_t)$

sur l'intervalle  $[0, d_t]$  est égale à  $2V_t$ .

On peut écrire :

$$e^{-V_t^\varepsilon} = 1 - \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in G}} e^{-V_s^\varepsilon} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{N(d_s - s)}\right) \right] 1_{\{d_s - s > \varepsilon\}}$$

Le processus  $(V_t^\varepsilon)$  n'est pas optionnel puisque ses temps de sauts se trouvent dans  $G$  ; mais il coïncide sur  $H-D$  avec le processus prévisi-

ble  $V_t^\varepsilon = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \frac{1}{N(s - g_s)} 1_{\{s - g_s > \varepsilon\}}$ . On peut donc utiliser la formule de

désintégration et écrire

$$E[e^{-V_t^\varepsilon}] = 1 - \int_\varepsilon^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{N(y)}\right) \right] \cdot N(dy) \cdot E\left[\int_0^t e^{-V_s^\varepsilon} d\lambda_s\right].$$

Posons  $\alpha(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{N(y)}\right) \right] N(dy)$ . L'égalité précédente s'écrit

$$E[e^{-V_t^\varepsilon}] + \alpha(\varepsilon) E\left[\int_0^t e^{-V_s^\varepsilon} d\lambda_s\right] = 1,$$

Faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro ;  $\alpha(\varepsilon)$  tend vers l'infini ; il en résulte facilement que

$$E\left[\int_0^t e^{-V_s^\varepsilon} d\lambda_s\right] = 0,$$

ce qui n'est possible que si  $V_t$  est infinie pour tout  $t > 0$ . La variation de  $(Y_t)$  sur  $[0, d_t]$  étant presque sûrement infinie, il en est de même de sa variation sur  $[0, t]$  qui ne diffère de la précédente que par une quantité finie. Pour achever l'étude de cet exemple, nous allons montrer que  $(M_t)$  n'est pas une semi-martingale dans la filtration  $(\underline{G}_t)$ .

Considérons l'ensemble aléatoire prévisible (dans  $(\underline{G}_t)$ )

$$J_\varepsilon = \bigcup_p [T_p^\varepsilon, d_{T_p^\varepsilon}] \text{ où } T_p^\varepsilon = \inf\{t > T_p^{\varepsilon-1} ; t - g_t > \varepsilon\}.$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $(M_t)$  soit une semi-martingale ; les variables aléatoires  $W_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{J_\varepsilon}(s) \text{ signe}(B_s) dM_s$  tendraient alors en probabilité, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers la variable aléatoire finie

$$\int_0^t 1_{H^c}(s) \operatorname{signe} B_s \, dM_s.$$

Mais  $W_t^\varepsilon$  n'est autre que la variation de  $(Y_t)$  sur  $J_\varepsilon \cap [0, t]$ , qui tend presque sûrement vers l'infini d'après ce que nous venons de voir.

En fait, nous avons démontré que  $(M_s)$  ne pouvait être une semi-martingale sur aucun intervalle  $[0, t]$ . On voit sur ce calcul que, pour permettre à  $(M_t)$  de devenir une semi-martingale, il fallait nécessairement rendre  $D$  inaccessible dans la petite filtration.

### §7. QUELQUES PROCESSUS SIMPLES A VARIATION FINIE.

Nous nous intéresserons dans ce court paragraphe à des processus paramétrés  $(s, \omega, x) \rightarrow F(s, \omega, x)$  que l'on notera plus rapidement  $F(s, x)$ , qui auront les propriétés suivantes

$$(120) \quad F(s, 0) = 0 \quad \forall s.$$

$\forall s > 0 \quad x \rightarrow F(s, x)$  est croissante continue à droite.

On notera  $F_-(s, x)$  le processus paramétré défini par

$$F_-(s, x) = \lim_{y \uparrow x} F(s, y) \quad \text{si } x > 0, \quad F_-(s, 0) = 0.$$

On associe à  $F$  le processus  $Z_s = F(g_s^+, s - g_s^+)$  et l'on va donner des conditions suffisantes pour que  $(Z_s)$  soit à variations finies.

Si  $I$  est un intervalle ouvert contigu à  $H$ , d'extrémités  $g$  et  $d$ , il est clair que la variation de  $Z$  sur  $I$  est égale à  $2F_-(g, d-g)$ . De là, on déduit facilement que la variation de  $Z$  sur  $[0, d_t]$  est égale à  $2 \sum_{\substack{s \in G \\ s < t}} F_-(s, d_s - s)$ . Si l'on appelle  $V_t$  la variation de  $(Z_s)$  sur

l'intervalle  $[0, t]$ , on a donc

$$(121) \quad V_t < V_{d_t} = 2 \sum_{\substack{s \in G \\ s < t}} F_-(s, d_s - s).$$

On peut énoncer un premier résultat

(122) PROPOSITION : Soit  $F$  un processus paramétré optionnel vérifiant les conditions (120) et tel que le processus  $(N_t(F_-))$  soit localement borné ;  $(Z_t)$  est alors à variation localement intégrable.

Démonstration : On a, pour tout d'arrêt  $T$ , en intégrant (121)

$$E[V_T] < 2E\left[\int_0^T N_s(F_-) d\ell_s\right]$$

Il suffit donc de construire une suite  $T_n$  de temps d'arrêt tendant vers l'infini, pour lesquels le second membre est fini, pour conclure.



(123) PROPOSITION : Soit  $F$  un processus paramétré vérifiant (120). Supposons qu'il existe un processus optionnel  $(a_s)$  tel que les processus

$$(\tilde{N}(t, a_t)) \text{ et } \left( \int_{[0, a_t[} F_-(t, x) N(t, dx) \right) \text{ soient tous deux localement}$$

bornés.  $(\mathbb{H}_t)$  est alors un processus à variation localement finie.

Démonstration : On peut écrire, si  $T$  est un temps d'arrêt,

$$V_T < 2 \left[ \sum_{\substack{s \in G \\ s < T}} F_-(s, d_s - s) 1_{\{d_s - s < a_s\}} + \sum_{\substack{s \in G \\ s < T}} F_-(s, d_s - s) 1_{\{d_s - s > a_s\}} \right]$$

Le premier terme du second membre est à variation localement intégrable ; en effet,

$$E \left[ \sum_{s \in G} F_-(s, d_s - s) 1_{\{d_s - s < a_s\}} \right] = E \left[ \int_0^T d\ell_s \int_{[0, a_s]} N(s, dy) F_-(s, y) \right].$$

Occupons-nous maintenant du second terme ; nous allons montrer qu'il existe une suite  $T_n$  tendant vers l'infini telle que

$\{s ; s < T_n, d_s - s > a_s\}$  soit fini pour tout  $n$  ; cela montrera bien

que le second terme définit un processus à variation finie. Pour cela formons

$$E \left[ \sum_{\substack{s \in G \\ s < t}} 1_{\{d_s - s > a_s\}} \right] = E \left[ \int_0^T d\ell_s \tilde{N}_s(a_s) \right].$$

L'hypothèse faite sur  $(\tilde{N}_s(a_s))$  entraîne immédiatement le résultat.

(124) EXEMPLE : Supposons  $N(s, E) = \infty \quad \forall s$  ; le processus  $\frac{1}{[\tilde{N}(g_t^+, t - g_t^+)]^2}$

est à variation localement finie

Posons  $a_s = \inf\{x ; N(s, x) < 1\}$ . On a  $\tilde{N}(s, a_s) < 1$  par continuité à droite. Calculons maintenant

$$\int_{[0, a_s]} \frac{1}{\tilde{N}_-(s, x)^2} N(s, dx) < \int_{[0, a_s]} \frac{1}{\tilde{N}_- \tilde{N}_-(s, x)} N(s, dx) + \frac{N(s, \{a_s\})}{\tilde{N}_-(s, a_s)^2}$$

$$< \frac{1}{\tilde{N}_-(a_s)} + \frac{\tilde{N}_-(s, a_s) - \tilde{N}(s, a_s)}{\tilde{N}_-(s, a_s)^2} < \frac{2}{\tilde{N}_-(s, a_s)} < 2.$$

La proposition (123) donne alors le résultat.  $\square$

Allons un peu plus loin et donnons la décomposition de la mesure  $dZ_t$  en différence de deux mesures aléatoires positives. Cette décomposition est triviale ; nous introduirons cependant le vocabulaire suivant qui nous sera utile un peu plus loin.

(125) DEFINITION : Soit  $K(s, dx)$  un noyau mesurable positif de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans  $(E, \mathcal{E})$ . On définit les mesures aléatoires  $\mathcal{D}^K(dt)$  et  $\mathcal{D}'^K(dt)$  par les formules

$$\mathcal{D}^K((Z_t)) = \sum_{g \in G} \int_{[0, d_g - g]} Z_{u+g} K(g, du)$$

$$\mathcal{D}'^K((Z_t)) = \sum_{g \in G} \int_{[0, d_g - g]} Z_{u+g} K(g, du).$$

On dira que  $\mathcal{D}^K(dt)$  (resp.  $\mathcal{D}'^K(dt)$ ) est le développement de  $K$  sur  $H^c$  (resp. sur  $H^c \cup D$ ).

Une interprétation plus imagée de  $\mathcal{D}^K(dt)$  est la suivante ; pour  $g$  fixé dans  $G$ , on considère l'image par l'application  $x \rightarrow g + x$  de la restriction de la mesure  $K(g, \cdot)$  à l'intervalle  $]0, d_g - g[$ . On fait ensuite la somme quand  $g$  parcourt  $G$  des mesures ainsi obtenues.

Le résultat qui suit est immédiat à partir des définitions.

(126) PROPOSITION : Soient  $K$  et  $L$  deux noyaux mesurables tels que

$K(s, x) = \phi(s, x) L(s, dx)$  pour un processus paramétré mesurable  $\phi$ .

Alors  $\mathcal{D}^K(dt) = \phi(g_t^+, t - g_t^+) \mathcal{D}^L(dt)$ ,  $\mathcal{D}'^K(dt) = \phi(g_t, t - g_t) \mathcal{D}'^L(dt)$

En particulier, si  $K(s, x) = \phi(s, x) dx$ ,  $\mathcal{D}^K(dt) = \phi(g_t^+, t - g_t^+) dt$ .

(127) PROPOSITION : Soit  $K$  un noyau positif optionnel.

$\mathcal{D}^{K(dt)}$  est une mesure aléatoire optionnelle et  $\mathcal{D}^{K(dt)}$  est prévisi-  
ble.

Démonstration : On se limitera au cas (qui est le seul que nous utilise-  
rons) où  $\mathcal{D}^K$  intègre les intervalles  $[0, t]$ . Traitons le second point :  
on écrit  $\mathcal{D}^{K(dt)} = dB_t$  avec  $B_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}(s+u) K(s, du)$

$$= \sum_{\substack{s \in G \\ s < g_t}} \int_{[0, d_s - s]} K(s, du) + 1_{\{g_t < t\}} \int_{[0, d_t - g_t]} K(g_t, du) 1_{[0, t]}(g_t + u)$$

$$= \sum_{\substack{s \in G \\ s < g_t}} \int_{[0, d_s - s]} K(s, du) + 1_{\{g_t < t\}} K(g_t, t - g_t)$$

où  $\bar{K}(s, x)$  désigne la primitive  $\int_{(0, x)} K(s, dy)$  du noyau  $K$ .

Sous cette forme, il est clair que l'on a  $B_t = B_t \circ k_t$  si l'on a pris la  
précaution de choisir le noyau  $K$  vérifiant  $K(s, k_t(\omega), dy) = K(s, \omega, dy)$   
pour  $s < t$ . Le premier point se montre de manière analogue.

Revenons au processus  $Z_t = F(g_t^+, t - g_t^+)$  du début de ce paragraphe ; si ce  
processus est à variation localement finie (ce qui est le cas sous les  
hypothèses de (123)), on dispose d'une mesure aléatoire  $\mu(\omega, dt) = dZ_t(\omega)$  ;  
on se propose d'expliciter la décomposition  $\mu(\omega, dt) = \mu^+(\omega, dt) - \mu^-(\omega, dt)$ .

(128) PROPOSITION : Soit  $F$  un processus paramétré vérifiant les conditions  
(120). On suppose que le processus  $Z_t = F(g_t^+, t - g_t^+)$  est à variation loca-  
lement finie. Alors

1)  $(Z_t)$  est continu à droite limité à gauche et  $Z_{t-} = F_{-}(g_t, t - g_t)$ .

2)  $\mu^+(dt)$  est le développement sur  $H^G$  du noyau  $F(s, dx)$  et

$$\mu^-(dt) = \sum_{s \in D} F_{-}(g_s, s - g_s) \epsilon_s(dt).$$

$$(129) \quad 3) \text{ On a } Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s[}^{1[0, t]} (s+u) F(s, du) - \sum_{\substack{s \in D \\ 0 < s < t}} F_-(g_s, s-g_s).$$

Démonstration :  $(Z_t)$  est, par hypothèse, différence de deux processus croissants; il est donc réglé. Il est clair qu'il est continu sur  $H^C \cup G$ . Si  $t \in H-G$ ,  $t$  est limite d'une suite  $t_n$  strictement décroissante de points de  $G$ , et l'on peut écrire  $Z_{t+} = \lim_n Z_{t_n} = 0 = Z_t$ . L'assertion relative aux limites à gauche se montre de la même façon.

Appelons alors  $(Z_t')$  le processus défini par le second membre de (129), et  $\mu'(dt)$  la restriction de  $\mu$  à  $H^C \cup D$ . Si  $I$  est un intervalle contigu à  $H$  d'extrémités  $g$  et  $d$ , alors

(\*)  $\mu/ ]g, d[$  est l'image par l'application  $u \rightarrow g + u$  de la restriction de  $F(g, dx)$  à  $]0, d-g[$ .

(\*\*)  $\mu/ ]g, d] = \mu/ ]g, d[ - \varepsilon_d F_-(g, d-g)$ .

Sommant sur les intervalles contigus à  $H$ , on obtient

$$\mu'(dt) = dF(dt) - \sum_{\substack{s \in D \\ s > 0}} F_-(g_s, s-g_s) \varepsilon_s(dt)$$

et, par conséquent,

$$\mu' ]0, t] = Z_t'.$$

Il nous reste simplement à montrer que  $\mu' = \mu$ , autrement dit, que  $\mu$  ne charge pas  $H-D$ . A titre récréatif, montrons cela à l'aide d'un argument de balayage : le processus  $Z_t'' = Z_t - Z_t'$  est à variation finie, continu, nul sur  $H$ .

Le processus mesurable  $\alpha_t = 1_{H-G}(t)$  vérifie  $\alpha_t = \alpha_{g_t}^+$  et l'argument de balayage usuel (s'agissant de processus à variation finie, nous avons droit aux processus mesurables et pas seulement aux processus optionnels) montre que  $0 = d(\alpha_t Z_t'') = \alpha_t dZ_t''$ ;  $dZ_t''$  ne charge donc pas  $H-G$ . C.Q.F.D.

## §8. LE DEUXIEME PROCESSUS PONCTUEL ASSOCIE A H.

(130) DEFINITION : On posera  $\Pi_d(dt, dx) = \sum_{s \in D} \varepsilon(s, s-g_s) (dt, dx)$ .

Contrairement à  $\Pi_g$ , ce processus ponctuel est optionnel. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe à sa projection duale prévisible. Nous retrouverons les résultats connus du cas discret (Jacod [8])  
On s'apercevra que, dans l'expression de cette projection, le temps local disparaît complètement.

Dans la définition (130), l'intervalle contigu à H de longueur infinie qui existe quand H est borné, n'est pas représenté. Il sera parfois utile de poser  $D'(\omega) = D(\omega) \cup \{\infty\}$  si  $\gamma(\omega) < \infty$   $D'(\omega) = D(\omega)$  si  $\gamma(\omega) = \infty$ .

$$\Pi'_d(dt, dx) = \sum_{s \in D'} \varepsilon(s, s-g_s) (dt, dx) \quad \text{avec } g_\infty = \gamma.$$

On notera la relation

$$(131) \quad \sum_{\substack{s \in G \\ s \leq T}} \beta(s, d_s - s) = \sum_{\substack{s \in D' \\ s \leq T}} \beta(g_s, s - g_s) + \beta(g_T^+, d_T - g_T^+) 1_{\{d_T > T\}}$$

où  $\beta$  est un processus paramétré mesurable positif et T une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

(132) PROPOSITION : Soit  $\beta$  un processus paramétré optionnel positif tel que le processus  $(N_t \beta)$  soit localement borné. Le processus

$$\Gamma_t^\beta = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \beta(g_s, s - g_s) + (U_\beta)(g_t^+, t - g_t^+) 1_{H^c \cup G^0}(t) - \int_{[0, t]} N_s \beta \, d\lambda_s$$

est une martingale locale.

Démonstration : Soit T un temps d'arrêt ; on sait que

$$E \left[ \sum_{s \in G} \beta(s, d_s - s) \right] = E \left[ \int_{[0, T]} N_s \beta \, d\lambda_s \right].$$

Le premier membre s'écrit encore, compte tenu de (131) et de (85)

$$E \left[ \sum_{\substack{s \in D' \\ s \leq T}} \beta(g_s, s - g_s) \right] + E \left[ N_\beta(g_T^+, T - g_T^+) 1_{H^c \cup G^0}(T) \right].$$

Soit  $S_n$  une suite croissante de temps d'arrêt tels que

$$E\left[\int_{[0, S_n]} N_{S_n}^\beta d\ell_s\right] < \infty.$$

Pour tout  $n$ ,  $r_{S_n \wedge T}^\beta$  est intégrable et vérifie  $E[r_{S_n \wedge T}^\beta] = 0$  ; le processus  $(r_t^\beta)$  arrêté à  $S_n$  est donc une martingale uniformément intégrable, d'où le résultat.

On remarquera qu'on peut faire disparaître le terme inesthétique

$1_{H^C \cup G^0}(t)$  de la filtration de  $r_t^\beta$  dans les deux cas suivants

\*  $H$  est discret :  $H^C \cup G^0 = H^C \cup G = \mathbb{R}_+$

\*  $N(t, E) = \infty \quad \forall t : H^C \cup G^0 = H^C$  ; d'autre part  $U_\beta(g_t^+, t - g_t^+)$  est nul sur  $H$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce paragraphe. Auparavant, donnons les deux définitions suivantes

(133) DEFINITIONS : 1) Nous noterons  $\mathcal{M}_{loc}^+$  l'ensemble des processus paramétrés positifs optionnels  $\beta$  tels que  $(N_t^\beta)$  soit localement borné. On notera

$$\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}_{loc}^+ - \mathcal{M}_{loc}^+.$$

2) On notera  $V$  le noyau défini par

$$V\beta(s, x) = \int_{[0, x]} \beta(s, y) \frac{N(s, dy)}{\tilde{N}_-(s, y)}.$$

$V$  est parfaitement défini sur  $\mathcal{M}_{loc}$ .

Nous avons renvoyé en appendice<sup>(\*)</sup> un certain nombre de propriétés des noyaux  $U$  et  $V$  ; en particulier, nous verrons que pour  $\beta > 0$   $NV\beta = N\beta$  de sorte que  $V$  envoie  $\mathcal{M}_{loc}$  dans  $\mathcal{M}_{loc}$ .

---

(\*) L'appendice n'est pas rédigé dans ce volume ; nous nous servons uniquement ici des égalités  $NV = N$   $UV = U + V$  qui sont des conséquences faciles du théorème de Fubini.

(134) THEOREME : Soit  $h$  un processus paramétré de  $\mathcal{M}_{loc}^+$  ; le processus croissant optionnel  $\sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} h(g_s, s-g_s)$  est localement intégrable et sa projection duale prévisible est le développement sur  $H^2 \cup D$  du noyau

$$h(s, x) \frac{N(s, dx)}{\tilde{N}_-(s, x)}.$$

Démonstration : Puisque  $\sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} h(g_s, 1-g_s) < \sum_{\substack{s \in G \\ s \leq t}} h(s, d_s-s)$ , l'intégrabilité

locale du premier membre est facile à montrer. Posons maintenant

$\beta = h - Vh$  et considérons la martingale locale  $r_t^\beta$  de la proposition

(132) ; puisque  $N\beta = 0$ , elle s'écrit

$$r_t^\beta = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} \beta(g_s, s-g_s) + U_\beta(g_t^+, t-g_t^+) 1_{H^c \cup G^0}(t).$$

Mais, (voir appendice),  $U_\beta = U[h-Vh] = -Vh$  sur  $\{\tilde{N} > 0\}$ , d'où il résulte que  $U_\beta(g_t^+, t-g_t^+) = -Vh(g_t^+, t-g_t^+)$  ; on a donc

$$(135) \quad r_t^\beta = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} (h - Vh)(g_s, s-g_s) - Vh(g_t^+, t-g_t^+).$$

Posons  $\phi = Vh$  ;  $(\phi(g_t^+, t-g_t^+))$  est à variation localement intégrable

d'après (122) et l'on peut écrire la décomposition (129) de ce processus

$$\phi(g_t^+, t-g_t^+) = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s-s[} 1_{[0, t]}(s+u) \phi(s, du) - \sum_{\substack{s \in D \\ 0 \leq s \leq t}} \phi_-(g_s, s-g_s).$$

De sorte que  $r_t^\beta$  devient, quand on a posé  $\Delta\phi = \phi - \phi_-$ ,

$$r_t^\beta = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} h(g_s, s-g_s) - \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} \Delta\phi(g_s, s-g_s) - \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s-s[} 1_{[0, t]}(s+u) \phi(s, du)$$

$$\text{soit encore} \quad r_t^\beta = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} h(g_s, s-g_s) - \sum_{\substack{s \in G \\ s \leq t}} \int_{[0, d_s-s[} 1_{[0, t]}(s+u) \phi(s, du).$$

Le résultat en découle immédiatement.

(136) NOTATIONS : Il est plus naturel de prendre des notations qui font intervenir  $h$  et non pas  $\beta$ . On posera dans la suite  $C_t^h = \Gamma_t^\beta$  ; récapitulons

$$(137) \quad C_t^h = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} h(g_s, s - g_s) - \sum_{\substack{s \in G \\ s \leq t}} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}^{(s+u)} \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)}$$

est une martingale locale que l'on peut encore écrire (cf. (135)).

$$(138) \quad C_t^h = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (h - Vh)(g_s, s - g_s) - Vh(g_t^+, t - g_t^+).$$

Nous allons voir maintenant que le théorème (134) reste vrai sous des hypothèses plus faibles.

(139) DEFINITION : Nous dirons que  $h \in \mathcal{M}_{loc}^{loc+}$  s'il existe une suite croissante  $(a_t^n)$  de processus optionnels  $> 0$  tels que,

(\*) En le processus défini par  $\int_{[0, a_t^n]} h(t, y) N(t, dy)$  soit localement borné.

(\*\*) La suite de temps d'arrêt  $S_a^n$  définie par  $S_a^n = \inf\{t ; t - g_t > a_{g_t}^n\}$  tend vers l'infini avec  $n$ .

(140) PROPOSITION : Si  $h \in \mathcal{M}_{loc}^{loc+}$ , la conclusion du théorème (134) et la formule (138) subsistent.

Démonstration : On pose

$$A_t^h = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} h(g_s, s - g_s) \quad \dot{A}_t^h = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}^{(s+u)} h(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)}$$

Soit  $T$  un temps d'arrêt ; l'égalité  $E[A_T^h] = E[\dot{A}_T^h]$  démontrée en (134) pour  $h \in \mathcal{M}_{loc}^+$  se prolonge à tout processus paramétré positif, si bien qu'il suffit de montrer que le processus  $(\dot{A}_t^h)$  est localement intégrable ; s'agissant d'un processus prévisible, cela est équivalent au fait qu'il soit fini.



Considérons alors les processus paramétrés  $h_n(s, y) = h(s, y)1_{\{y < a_s^n\}}$

qui sont dans  $\mathcal{M}_{loc}^+$  ; on voit immédiatement que si  $t < S_a^n$ , on a

$s - g_s < a_{g_s}^n$  pour tout  $s < t$ . On a donc  $\dot{A}_t^h = \dot{A}_t^{h_n}$  pour tout  $t < S_a^n$

d'où le résultat. Donnons maintenant deux critères un peu plus commodes d'appartenance à  $\mathcal{M}_{loc}^{loc}$ .

(140 bis) PROPOSITION : Soit  $h$  un processus paramétré positif ; chacune des deux conditions suivantes est suffisante pour que  $h \in \mathcal{M}_{loc}^{loc}$ .

1) Il existe une suite  $(\alpha_t^n)$  vérifiant (139) (\*), croissant vers l'infini et telle que  $\{s \in G ; d_s - s > \alpha_{g_s}^n\}$  soit presque sûrement discret ;

2)  $\int_{[0, \alpha_t^n]} h(t, y) N(t, dy)$  est un processus localement borné, quand  $\alpha_t^n$

est la suite de processus définie par  $\alpha_t^n = \inf\{u ; \frac{1}{N(t, u)} > n\}$ .

Montrons le 2) (la démonstration du 1) étant analogue en plus simple) ; appelons  $\Gamma_n$  l'ensemble aléatoire  $\{t ; t - g_t > \alpha_{g_t}^n\}$  ; nous avons à montrer

que le début  $S_n^\alpha$  de  $\Gamma_n$  tend vers l'infini avec  $n$ . Remarquons d'abord

que l'ensemble aléatoire  $\{s \in G ; d_s - s > \alpha_s^n\}$  est presque sûrement discret puisque  $N(s, \alpha_s^n)$  est borné par  $\frac{1}{n}$ . On a

$\Gamma_n = \{t ; t - g_t > \alpha_{g_t}^n\} = \{t ; t - g_t > \alpha_{g_t}^n ; \alpha_{g_t}^n < b_{g_t}\}$ . Considérons maintenant la fermeture  $\bar{\Gamma}_n$  de  $\Gamma_n$ . Il est facile d'établir en tenant compte de

la remarque du début que

$$\bar{\Gamma}_n \subset \{t ; t - g_t > \alpha_{g_t}^n, \alpha_{g_t}^n < b_{g_t}\}.$$

Il suffit alors de montrer que l'intersection en  $n$  des ensembles aléatoires figurant au second membre est évanescente (un argument de compacité établissant alors que le début de  $\bar{\Gamma}_n$  tend vers l'infini avec  $n$ ).

Cela résulte immédiatement de l'inclusion

$$\bigcap_n \{t; t - g_t > \alpha_{g_t}^n, \alpha_{g_t}^n < b_t\} \subset \{t; t - g_t > b_{g_t}, \hat{N}_-(b_{g_t}) = 0\}.$$

(140 ter) REMARQUE : Faisons l'hypothèse plus faible :  $\int_{[0, \alpha_t^n]} h(t, y) N(t, dy)$  est

localement borné. Le processus paramétré  $h' = h1_{\{\hat{N} = \hat{N}_-\}}$  est dans

$M_{loc}^{loc}$ , et la proposition (110) appliquée à  $h'$  donne le résultat suivant:

$\sum_{\substack{s \in D_i \\ s \leq t}} h(g_s, s - g_s)$  est localement intégrable de projection duale prévisible

$$\sum_{s \in D} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}(s+u) h(s, u) \frac{N^C(s, du)}{\hat{N}_-(s, u)} \quad \text{où } D_i \text{ désigne la partie}$$

inaccessible de  $D$ , et  $N^C$  la partie diffuse de  $N$ .

(141) EXEMPLES : 1) La fonction  $h(s, x) = x$  satisfait aux hypothèses (140) pour la désintégration normalisée de  $\pi^g$ . Prenons pour processus  $a_s^n$  la constante strictement positive  $a^n$  racine de l'équation  $(n+1)(1 - e^{-x}) = x$ . On a

$$\int_{[0, a^n]} x N(s, dx) \leq (n+1) \int_{[0, a^n]} (1 - e^{-x}) N(s, dx) \leq (n+1);$$

il est clair que  $a^n \rightarrow \infty$  et que  $\{s \in G; d_s - s > a^n\}$  est discret. On

sait donc calculer la projection duale prévisible de  $g_t^+ = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (s - g_s)$ .

Si nous appelons  $A_t$  cette projection,  $dA_t$  est le développement sur

$$H^C \cup D \text{ du noyau } x \frac{N(s, dx)}{\hat{N}_-(s, x)}.$$

C'est moins rébarbatif qu'il n'y paraît dans les cas usuels. Supposons par exemple que  $H$  soit un ensemble régénératif de noyau de Lévy

$$N(dx) = \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx \quad (0 < \alpha < 1), \text{ correspondant au subordonateur stable}$$

$$\text{d'indice } \alpha. \text{ On a } \hat{N}(x) = \frac{1}{\alpha x^\alpha}, \quad \frac{N(dx)}{\hat{N}(x)} = \alpha \frac{dx}{x}, \quad x \frac{N(dx)}{\hat{N}(x)} = \alpha dx.$$

Si l'on veut bien se souvenir de la trivialité (126), on en déduit tout de suite que  $A_t = \alpha t$ . En particulier, si  $H$  est l'ensemble des zéros du Brownien,  $A_t = \frac{1}{2} t$ .

2) La fonction  $h(s,x) = \frac{1}{[N_-(s,x)]^2}$  est dans  $\mathcal{M}_{loc}^{1,loc}$  ; on a

en effet

$$\int_{[0, \alpha_s^n]} \frac{1}{[\tilde{N}_-(s,x)]^2} N(s, dx) \leq \frac{1}{\tilde{N}_-(s, \alpha_s^n)} + \frac{\tilde{N}_- - \tilde{N}}{\tilde{N}_-^2}(s, \alpha_s^n) \leq \frac{2}{\tilde{N}_-(s, \alpha_s^n)} \leq 2n$$

Le processus croissant  $\sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} \frac{1}{\tilde{N}_-^2(g_s, s - g_s)}$  est donc localement intégrable

et sa projection duale prévisible est le développement sur  $H^c \cup D$  du noyau  $\frac{N(s, dx)}{\tilde{N}_-^3(s, x)}$ .

(142) La projection duale prévisible de  $\pi_d$ .

Soit  $(Z_t)$  un processus prévisible borné ; on peut écrire d'après (134)

$$E \left[ \sum_{s \in D} Z_s h(s - g_s) \right] = E \left[ \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} Z_{s+u} h(u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right]$$

quelque soit la fonction positive  $h$  sur  $E$ . Cette formule peut se prolonger aux processus paramétrés prévisibles positifs  $\phi$  ; on a

$$E \left[ \sum_{s \in D} \phi(s, s - g_s) \right] = E \left[ \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} \phi(s+u, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right].$$

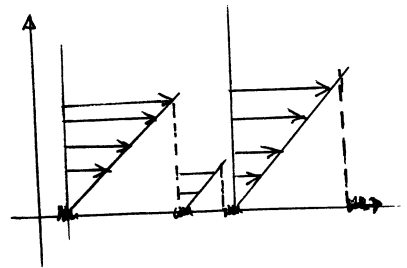
On en tire la construction suivante de la projection duale prévisible

$\pi_d^p(dt, du)$  de  $\pi_d$  : Pour chaque

$s$  de  $G$  on considère la mesure

$$\phi(s, dy) = \frac{N(s, dy)}{\tilde{N}_-(s, y)} 1_{\{y < d_s - s\}}$$

concentrée sur la verticale d'abscisse  $s$



(et qui définit ainsi une mesure sur  $\mathbb{R}_+ \times E$ ). On fait la somme de ces mesures quand  $s$  parcourt  $G$ . On prend ensuite l'image de cette mesure par l'application  $(s,y) \rightarrow (s+y,y)$ , ce qui fournit une mesure portée par le graphe du processus  $(s-g_s)$ . C'est la projection duale prévisible cherchée.

On voit, sur cette interprétation, que les projections duales de  $\pi_g$  et  $\pi_d$  n'ont pas beaucoup de rapport (ce sont même des mesures étrangères dans le cas où les mesures  $N(s,dy)$  sont diffuses). Ce n'est qu'à moitié étonnant :  $\pi_d$  étant portée par l'ensemble prévisible  $(H^C \cup D) \times E$ , il en est de même de sa projection duale prévisible. Cela explique que le temps local disparaisse des formules relatives à  $\pi_d$ .

# §9. QUELQUES SEMI-MARTINGALES SPECIALES ET

## LEUR DECOMPOSITION CANONIQUE.

Revenons à la situation du §7 :  $F$  est un processus paramétré vérifiant (120),  $(Z_t)$  est le processus  $F(g_t^+, t-g_t^+)$ . Sous les hypothèses (123),  $(Z_t)$  est à variation localement finie et l'on peut recopier la formule (129)

$$Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]} (s+u) F(s, du) - \sum_{\substack{s \in D \\ s < t}} F(g_s, s-g_s).$$

Commençons par un résultat simple

(144) PROPOSITION : Soit  $F$  un processus paramétré de  $\mathcal{M}_{loc}^{loc+}$  vérifiant les conditions (120).  $(Z_t)$  est alors une semi-martingale spéciale à variation localement intégrable, dont la décomposition canonique s'écrit

$$Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]} (s+u) \left[ F(s, du) - F(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right] - C_t^F$$

Le premier terme du second membre est le développement sur  $H^c \cup D$  du noyau  $\left[ F(s, du) - F(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right]$ . Le second est une martingale locale (qui a été définie en (136)).

Démonstration : On commence par ajouter et retrancher au deuxième membre de la formule (129) rappelée au début de ce paragraphe la quantité

$$\sum_{\substack{s \in D \\ s < t}} \Delta F(g_s, s-g_s)$$

qui est finie (et même à variation localement intégrable d'après (139)).

On obtient

$$Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]} (s+u) F(s, du) - \sum_{\substack{s \in D \\ s < t}} F(g_s, s-g_s).$$

Ajoutons et retranchons maintenant la projection duale prévisible du deuxième terme ; on obtient le résultat.

La proposition (144) est tout à fait satisfaisante dans le cas où le noyau  $N$  diffus, comme le montre l'étude des exemples suivants

(145) EXEMPLES : On suppose  $N$  diffus et de masse infinie ; on pose

$$F(s, x) = \left[ \frac{1}{\tilde{N}(s, x)} \right]^p \quad (p > 1)$$

Vérifions que  $F$  est dans  $\mathcal{M}_{loc}^{loc}$  : on a

$$(146) \quad \int_{[0, a]} \frac{1}{\tilde{N}^p} (s, x) N(s, dx) = \frac{1}{p+1} \frac{1}{[\tilde{N}(s, a)]^{1-p}}$$

la suite de processus  $(a_s^n)$  définie par  $a_s^n = \inf\{s ; N(s, x) < n\}$  vérifie les conditions (140) relativement à  $F$ , de sorte qu'on peut appliquer la proposition précédente. Désignons par  $A_t^{(p)}$  le processus prévisible à variation localement intégrable figurant dans la décomposition canonique de  $(Z_t)$  ; alors (144) nous dit que

$$(147) \quad dA_t^{(p)} \text{ est le développement sur } H^C \cup D \text{ du noyau } (p-1) \frac{N(s, dx)}{\tilde{N}^{p+1}(s, x)}.$$

Particularisons un peu plus, et supposons que  $N(t, dx) = n(t, x)dx$  soit absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue ; on peut alors écrire

$$(148) \quad A_t^{(p)} = (p-1) \int_0^t \frac{n(g_s, s-g_s)}{\tilde{N}^{p+1}(g_s, s-g_s)} ds.$$

On peut, en particulier, considérer les ensembles régénératifs stables d'ordre  $\alpha$  déjà étudiés en (141) correspondant à la mesure de Lévy

$$N(dx) = \frac{dx}{x^{\alpha+1}} ; \text{ on obtient le résultat suivant :}$$

(149) Soit  $H$  l'ensemble régénératif stable d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) et soit  $q > \alpha$  ; le processus  $(t-g_t^+)^q$  est un processus à variation localement intégrable et

$$(t-g_t^+)^q - (q-\alpha) \int_0^t (s-g_s)^{q-1} ds$$

est une martingale locale.

(En particulier, pour  $q = 1$ , on retrouve la martingale locale  $(g_t^+ - \alpha t)$  déjà rencontrée en (141)). On peut avoir une attention particulière pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  (qui correspond aux zéros du Brownien). Dans ce cas  $\forall q > \frac{1}{2}$

$$(150) \quad (t-g_t^+)^q - (q - \frac{1}{2}) \int_0^t (s-g_s)^{q-1} ds$$

est une martingale locale.

On peut se demander ce qui se passe dans (148) quand  $p \rightarrow 1$ . S'il y a une justice,  $A_t^{(p)}$  va converger vers le processus croissant prévisible de la décomposition de  $\frac{1}{N(g_t^+, t-g_t^+)}$ , c'est-à-dire le temps local quand les hypothèses sont raisonnables.

C'est effectivement ce que nous verrons à la fin de ce chapitre.

Les démonstrations précédentes tombent en défaut quand  $N$  n'est plus diffus. Dans les propositions suivantes nous donnons des hypothèses un peu moins fortes qui permettent d'affirmer que  $F(g_t^+, t-g_t^+)$  est une semimartingale spéciale. Les résultats obtenus ne sont pas enthousiasmants. Il me semble tout de même que les martingales locales que nous allons introduire maintenant ne sont pas totalement dénuées d'intérêt.

- Nous aurons besoin d'un retour en arrière : la régularité de la sous-martingale d'équilibre  $(Y_t)$  entraîne l'existence de martingales un peu curieuses que nous présentons ici. Dans la suite nous noterons, pour plus de clarté,

$$\Delta N(s, x) = - \tilde{\Delta} N(s, x) = N(s, \{x\}).$$

(151) PROPOSITION : Si  $\Gamma$  est un ensemble aléatoire prévisible mince,  $(\beta_t)$  un processus prévisible positif, on a l'égalité

$$E \left[ \sum_{s \in D \cap \Gamma} \frac{\tilde{N}}{N_-} (g_s, s-g_s) \beta_s \right] = E \left[ \sum_{s \in H^c \cap \Gamma} \frac{\Delta N}{N_-} (g_s, s-g_s) \beta_s \right].$$

Démonstration : Remarquer que si  $N$  est diffus, le second membre est nul. Par bonheur, le premier l'est aussi puisque  $D \cap \Gamma$  est évanescent. On peut que supposer que  $\Gamma \subset H^c \cup D$ . Soit  $T$  un temps d'arrêt prévisible dont le graphe est contenu dans  $H^c \cup D$ ; écrivons que  $(Y_t)$  est régulière; on a si  $(\Delta Y_t)$  désigne  $(Y_t - Y_{t-})$ ,  $\phi(s, x) = \frac{1}{N(s, x)}$

$$0 = E[\Delta Y_T ; T < \infty] = E[\Delta Y_T 1_{(D_p)^c}(T) ; T < \infty]$$

$$= E[-\phi_-(g_T, T-g_T) 1_{D-D_p}(T) ; T < \infty] + E[\Delta \phi(g_T, T-g_T) 1_{H^c}(T) ; T < \infty].$$

Nous aurons appliqué successivement (99) et (113), et fait semblant de croire que  $\bar{Y}_T 1_{\{T < \infty\}}$  était intégrable ; il faudrait effectuer d'abord une localisation dont nous faisons grâce au lecteur. On a donc l'égalité

$$E[\phi_-(g_T, T-g_T) 1_{D-D_p}(T) ; T < \infty] = E[\Delta\phi(g_T, T-g_T) 1_{H^c}(T) ; T < \infty].$$

Si  $(\alpha_t)$  est un processus prévisible, cela se prolonge en

$$E[\phi_-(g_T, T-g_T) 1_{D-D_p}(T) \alpha_T] = E[\Delta\phi(g_T, T-g_T) 1_{H^c}(T) \alpha_T].$$

Soit  $(T_n)$  une suite de temps d'arrêt prévisible telle que  $\sum_n [[T_n]] = \Gamma$ .

Ecrivant l'égalité précédente pour chaque  $T_n$  et sommant en  $n$ , il vient

$$E\left[\sum_{s \in (D-D_p) \cap \Gamma} \frac{1}{\tilde{N}_-} (g_s, s-g_s) \alpha_s\right] = E\left[\sum_{s \in H^c \cap \Gamma} \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-} (g_s, s-g_s) \alpha_s\right].$$

Appliquant ce résultat à  $\alpha_s = \tilde{N}(g_s, s-g_s) \beta_s$ , on trouve

$$E\left[\sum_{s \in D \cap \Gamma} \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} (g_s, s-g_s) \beta_s\right] = E\left[\sum_{s \in H^c \cap \Gamma} \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-} (g_s, s-g_s) \beta_s\right].$$

( $D_p$  ayant disparu du premier membre parce que  $(\tilde{N}(g_s, s-g_s))$  est nul sur  $D_p$ ).

Introduisons maintenant les martingales annoncées ; soit  $F$  un processus paramétré positif vérifiant les conditions suivantes

$$(152) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall s \quad x \rightarrow F(s, x) \text{ est croissante continue à droite nulle à l'origine.} \\ F_- \text{ et } F \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} \text{ sont dans } \mathcal{M}_{loc}^{loc} \\ \text{Alors} \end{array} \right.$$

(153) PROPOSITION : Le processus  $(x_t^F)$  défini par

$$x_t^F = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \left( \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} \Delta F \right) (g_s, -s-g_s) - \sum_{\substack{s \in H^c \\ s \leq t}} \left( \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-} \Delta F \right) (g_s, -s-g_s)$$

est une martingale locale.



Démonstration : Appliquons la proposition (151) à  $\beta_t = \Delta F(g_t, t - g_t)$  et à l'ensemble prévisible mince  $\Gamma = \{t ; \Delta F(g_t, t - g_t) > 0\} \cap [0, T]$  ( $T$  étant un temps d'arrêt quelconque) ; on obtient l'égalité

$$E \left[ \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq T}} \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} \Delta F(g_s, s - g_s) \right] = E \left[ \sum_{\substack{s \in H^C \\ s \leq T}} \left( \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-} \Delta F \right) (g_s, s - g_s) \right]$$

Mais, sous les hypothèses (152), le processus croissant  $\sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} \Delta F(g_s, s - g_s)$

est localement intégrable (cf. (140)). Le résultat en découle facilement.

On est maintenant en mesure d'énoncer l'extension suivante de la proposition (144).

(154) THEOREME : Soit  $F$  un processus paramétré satisfaisant aux conditions

(152). On pose

$$V_t^F = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}^{(s+u)} \left[ F(s, du) - F(s, u) \frac{\tilde{N}(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right]$$

$(V_t^F)$  est un processus à variation localement intégrable et

$$F(g_t^+, t - g_t^+) = V_t^F - (C_t^F + X_t^F).$$

• Le terme à variation finie est le même qu'en (144), mais on n'a plus le droit de calculer séparément les sommes relatives aux noyaux  $F(s, du)$  et  $F(s, u) \frac{\tilde{N}(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)}$ . En ce qui concerne la partie martingale locale, on n'est plus assuré de l'existence de la projection duale prévisible du processus croissant  $\sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} F(g_s, s - g_s)$  (qui n'est plus nécessairement localement

intégrable). La comparaison de (144) et (154) entraîne

$$(155) \quad C_t^F = C_t^{F-} + X_t^F \quad \text{si } F \in \mathcal{M}_{loc}^{loc}.$$

Si  $F$  satisfait aux hypothèses plus faibles (152), on considèrera (155) comme une définition de  $C_t^F$ .

Démonstration du théorème : Revenons à l'égalité (129)

$$Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}^{(s+u)} F(s, du) - \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} F_-(g_s, s - g_s).$$

Ajoutons et retranchons la projection duale prévisible du deuxième terme du second membre

$$Z_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s[} 1_{[0, t]}(s+u) \left[ F(s, du) - F_-(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right] - \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} F_-(g_s, s - g_s) \frac{\Delta N(g_s, s - g_s)}{\tilde{N}_-(g_s, s - g_s)} - C_t^-$$

Notons  $I_t$  le premier terme du second membre ; ajoutons et retranchons

à  $I_t$  la quantité finie

$$\sum_{\substack{s \in H^C \\ s \leq t}} \Delta F(g_s, s - g_s) \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-}(g_s, s - g_s) = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s[} 1_{[0, t]}(s+u) \Delta F(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)}.$$

Il vient

$$I_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s[} 1_{[0, t]}(s+u) \left[ F(s, u) - F_-(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)} \right] + \sum_{\substack{s \in H^C \\ s \leq t}} (\Delta F \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-})(g_s, s - g_s)$$

Il s'agit maintenant de fermer l'intervalle  $[0, d_s - s[$ . Pour cela ajoutons et retranchons à  $I_t$  la quantité finie

$$\sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (\Delta F - F \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-})(g_s, s - g_s) = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (\Delta F \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} - F_- \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-})(g_s, s - g_s).$$

$I_t$  s'écrit alors

$$I_t = V_t^F - X_t^F + \sum_{s \leq t} F_- \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-}(g_s, s - g_s)$$

$$\text{et } Z_t = V_t^F - (X_t^F + C_t^F) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Revenons maintenant à la sous-martingale d'équilibre  $\bar{Y}_t$  du § 6 et considérons la martingale locale  $\mu_t = \bar{Y}_t - \ell_{t-}$  ; nous allons montrer que  $(\mu_t)$  admet un crochet oblique que l'on peut calculer à l'aide du noyau de Lévy.

(156) PROPOSITION :  $(\mu_t)$  est purement discontinue et localement de carré intégrable. De plus,  $\langle \mu, \mu \rangle_t$  est le développement sur  $H^2 \cup (D-D)$  du noyau  $\frac{1}{N} \frac{1}{N_-^2} (s, u) N(s, du)$ .

Démonstration : Montrons d'abord que  $(\mu_t)$  est localement de carré intégrable. On peut majorer comme au début du § 7 la variation de  $(Y_s)^2$  sur  $[0, t]$  ; on a

$$\text{Var}_{[0, t]}(Y_s^2) \leq 2 \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \frac{1}{N_-^2(g_s, s - g_s)}.$$

Le membre de droite est localement intégrable d'après (141). Le processus  $(Y_t)^2$  est à variation localement intégrable ; il est donc localement intégrable. Intéressons-nous maintenant à

$$\bar{Y}_t = Y_t + \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D_p}} Y_{s-} = Y_t + B_t$$

$B_t^2$  est croissant, prévisible ; il est donc localement intégrable ; il en est de même pour  $\bar{Y}_t^2$  qui est majoré par  $2(Y_t^2 + B_t^2)$ . Il ne reste plus qu'à écrire  $\mu_t^2 \leq 2[\bar{Y}_t^2 + \ell_{t-}^2]$ , et à remarquer que le processus  $(\ell_{t-})$  est localement borné.

$(Y_{t+}^2)$  est une martingale à variation localement intégrable, elle est donc purement discontinue (au sens de la théorie des martingales). Un petit exercice de calcul stochastique prouve alors qu'il en est de même pour  $(Y_{t+})$ , donc pour  $(\bar{Y}_{t+})$ , et enfin pour  $(\mu_t)$ . On a donc

$$[\mu, \mu]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta \mu_s)^2 = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D - D_p}} \frac{1}{\tilde{N}_-^2(g_s, s - g_s)} + \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in H^c}} \left[ \frac{\Delta N}{\tilde{N}_- \tilde{N}_-} \right]^2 (g_s, s - g_s).$$

Notons  $(A_t)$  le premier terme du second membre,  $(B_t)$  le second ; ces deux processus croissants sont localement intégrables, et l'on sait déjà que la projection duale prévisible de  $A_t$  est égale à (cf. (141)).

$$\dot{A}_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}(s+u) 1_{\{u < b_s\}} \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-^3(s, u)}.$$

Occupons-nous de  $\dot{B}_t$  ; appliquons la formule (151) à

$$\Gamma = \{s ; \Delta N(g_s, s - g_s) > 0\} \quad \beta_s = \frac{\Delta N}{\tilde{N}_- \tilde{N}_-^2} (g_s, s - g_s) 1_{\{\tilde{N}(g_s, s - g_s) > 0\}} 1_{[[0, T]]}(s)$$

où  $T$  est un temps d'arrêt. Il vient

$$E[B_T] = E[B_T']$$

$$\text{quand on a posé } B_t' = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D - D_p}} \frac{\Delta N}{\tilde{N}_-^3} (g_s, s - g_s)$$

Il est alors clair que  $(B_t')$  est localement intégrable et qu'il a même projection prévisible que  $(B_t)$  ; on a donc

$$\langle \mu, \mu \rangle_t = \dot{A}_t + \dot{B}_t' = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{\{u < b_s\}} 1_{[0, t]}(s+u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_- \tilde{N}_-^2(s, u)}$$

(157) REMARQUE : On peut noter que  $\langle \mu, \mu \rangle_t$  est la projection duale prévisible

$$\text{du processus } \sum_{\substack{s \in D - D_p \\ s \leq t}} \frac{1}{\tilde{N}_- \tilde{N}_-} (g_s, s - g_s).$$

(158) EXEMPLES : Etudions le cas des ensembles régénératifs admettant la mesure de Lévy  $n(dx) = \alpha x^{-(\alpha+1)} dx$ . On a

$$\tilde{n}(x) = x^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \langle \mu, \mu \rangle_t = \alpha \int_0^t (s - g_s)^{2\alpha-1} ds$$

ou encore

$$\langle \mu, \mu \rangle_t = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} (s - g_s)^{2\alpha} + (t - g_t)^{2\alpha} \right].$$

En particulier, pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on trouve  $\langle \mu, \mu \rangle_t = \frac{1}{2} t$ , ( $\frac{\pi}{4} t$  si l'on tient à la normalisation  $(d\ell_t, n(dx))$  correspondant au temps local usuel du Brownien.

(159) REMARQUE : Soit  $F$  un processus paramétré vérifiant les conditions (152) ; on a

$$C_t^F = - \int_0^t \tilde{N}(g_s, s-g_s) F(g_s, s-g_s) d\mu_s.$$

Les deux membres sont des martingales locales purement discontinues, elles sont égales dès qu'elles ont même sauts, ce qui se vérifie aisément. Il nous sera utile d'étendre (140) et (154) à des processus paramétrés prenant des valeurs infinies. Si  $h$  est un processus paramétré à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  et appartenant à  $\mathcal{M}_{loc}^{loc}$ , la proposition (140) reste vraie (il n'y a rien à changer à la démonstration). Donnons-nous maintenant un processus paramétré  $F$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  satisfaisant aux conditions (152) ; la remarque que nous venons de faire prouve que le processus  $C_t^F$  défini par (155) reste une martingale locale. En revanche, on ne peut pas continuer à énoncer le théorème (154) de cette façon :  $F(s, b_s)$  peut en effet être infini et le noyau  $F(s, du) - F(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}'(s, u)}$  n'a alors plus de sens pour  $u = b_s$ . Cela prouve que cette formule est mal écrite, puisqu'on peut remarquer que les conditions (152) d'une part, les valeurs du processus  $(F(g_t^+, t-g_t^+))$  d'autre part, ne font pas intervenir  $F(s, b_s)$ .

(160) DEFINITION (\*) : Appelons  $J_s$  le processus paramétré défini par

$$J_s(u) = 1_{\{u < b_s\}} 1_{\{N(s, \{b_s\}) > 0\}} + 1_{\{u < b_s\}} 1_{\{N(s, \{b_s\}) = 0\}}.$$

Soit  $(K(s, du))$  un noyau positif ; la mesure aléatoire qui opère sur les processus mesurables positifs par la formule

$$Z \mapsto \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} J_s(u) Z_{s+u} K(s, du)$$

sera appelée développement de  $K$  sur  $H^c \cup (D - D_p)$

---

(\*) La mesure aléatoire  $\tilde{w}(\tilde{a}t)$  définie en (160) n'est pas autre chose que le développement sur  $H^c \cup D$  du noyau  $K(s, du) 1_{\{u < b_s\}}$  ; cette définition ne s'imposait pas.

La primitive de cette mesure est, quand elle existe donnée par l'expression

$$W_t = \sum_{s \in G} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}(s+u) J_s(u) K(s, du)$$

$(W_t)$  est alors un processus croissant prévisible.

(161) PROPOSITION : Soit  $F$  un processus paramétré positif à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  vérifiant les conditions suivantes

$$(162) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow F(s, x) \text{ est croissante continue à droite nulle à l'origine quelque} \\ \text{soit } s \\ \left( \int_{[0, \alpha_t^n]} F_-(t, y) N(t, dy) \right) \text{ et } \left( \int_{[0, \alpha_t^n]} \left( F \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-} \right)(t, dy) N(t, dy) \right) \end{array} \right.$$

sont des processus localement bornés, quelque soit  $n$  (la suite  $(\alpha_t^n)$  ayant été définie en (140 bis).

Le processus  $F(g_t^+, t-g_t^+)$  est alors une semi-martingale spéciale : on peut écrire

$$(163) \quad F(g_t^+, t-g_t^+) = W_t^F - \sum_{\substack{s < t \\ s \in D_p}} F_-(g_s, b_{g_s}) - C_t^F$$

où  $-W^F(dt)$  est le développement sur  $H^2 \cup (D-D_p)$  du noyau

$$F(s, du) - F(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}_-(s, u)}$$

$-C_t^F$  est la martingale locale définie en (155).

Les trois processus figurant au second membre sont localement intégrables. Les deux premiers d'entre eux sont prévisibles.

Démonstration : Supposons tout d'abord  $F$  finie ; sous les conditions

(162)  $F_-$  et  $F \times \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-}$  sont dans  $\mathcal{M}_{loc}^{loc}$  et (163) n'est qu'une réécriture de (154).

Passons au cas général et posons  $F^{(n)}(s, x) = F(s, x) 1_{\{x < \alpha_t^n\}}$  ; appliquant (163) à  $F^{(n)}$ , il vient

$$(164) \quad F^{(n)}(g_t^+, t - g_t^+) = W_t^{F^{(n)}} - \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D_p}} F^{(n)}(g_s, b_{g_s}) - C_t^{F^{(n)}}.$$

Réintroduisons maintenant les temps d'arrêt  $S_n^\alpha = \inf\{t ; t - g_t > \alpha_{g_t}^n\}$  qui tendent vers l'infini avec  $n$  ((140 bis)), et supposons  $t < S_n^\alpha$  ; on peut remplacer partout  $F^{(n)}$  par  $F$  dans (164). Il en résulte au passage que  $W_t^F$  est fini, et, par suite, que  $(W_t^F)$  est localement intégrable. Quant à la formule (163), elle devient évidente.

Quelques approximations du temps local.

(165) PROPOSITION : Posons  $\phi(s, x) = \frac{1}{N(s, x)}$  et donnons-nous une suite croissante  $\phi^{(n)}$  de processus paramétrés positifs satisfaisant aux conditions (162) et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(s, x) = \phi(s, x) \quad \forall s > 0 \quad \forall x > 0.$$

Il existe alors une sous-suite  $\phi^{(n_k)}$  extraite de la suite  $\phi^{(n)}$  et un évènement  $\Omega_0$  de probabilité 1 tels que

$$\forall \omega \in \Omega_0 \quad \forall t \quad W_t^{(n_k)}(\omega) \rightarrow W_t(\omega).$$

Démonstration : Ecrivons la formule (164) pour  $\phi^{(n)}$  ; on a, avec des notations allégées,

$$\phi^{(n)}(g_t^+, t - g_t^+) = W_t^{(\phi^{(n)})} - \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} \phi^{(n)}(g_s, s - g_s) - C_t^{(\phi^{(n)})}$$

Considérons le dernier terme : il s'écrit  $\int_0^t (\phi^{(n)})_{g_s}^N (g_s, s - g_s) d\mu_s$ , de

sorte que  $\mu_t + C_t^{(\phi^{(n)})} = \int_0^t (1 - \frac{\phi^{(n)}}{\phi})(g_s, s - g_s) d\mu_s$ . Mais le processus

$((1 - \frac{\phi^{(n)}}{\phi})(g_s, s - g_s))$  tend vers 0 sur l'ensemble aléatoire  $H^C \cup D$

qui porte  $(d_{\mu, \mu}^t)$ . Il existe donc  $\Omega_0$  de probabilité 1 et une sous-suite  $(\phi^{(n_k)})$  tels que pour  $\omega$  dans  $\Omega_0$

$$\mu_*(\omega) + C^{(n_k)}_*(\omega) \rightarrow 0$$

uniformément sur tout compact.

Il est clair d'autre part que les processus  $(\phi^{(n_k)}(g_t^+, t - q_t^+))$  et

$$\left( \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D_p}} \phi^{(n_k)}(g_s, b_{g_s}) \right) \text{ ont des limites respectivement égales à } Y_t \text{ et } \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} Y_{s-}$$

La suite  $W_t^{(n_k)}$  admet donc une limite  $W_t$  vérifiant

$$Y_t + \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D_p}} Y_{s-} = W_t + \mu_t; \text{ il en résulte que } W_t = \ell_{t-}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour l'application qui va suivre, nous aurons besoin d'une légère extension de (165). Remarquons d'abord que l'on a, si  $(Z_t)$  est un processus optionnel borné

$$(166) \quad Y_t Z_{g_t^+} = \int_{[0, t[} Z_s d\ell_s - \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} Z_{g_s} Y_{s-} + \int_0^t Z_{g_s} d\mu_s.$$

Cette formule se démontrant en considérant d'abord le cas où  $(Z_t)$  est l'indicateur d'un intervalle stochastique. En particulier, en appliquant ce résultat au processus  $Z_s = 1_{\{N(s, E) = \infty\}}$ , on peut obtenir une sous-martingale locale engendrant la partie continue  $(\ell_t^C)$  du temps local : si l'on pose  $Y'_t = Y_t 1_{\{N(g_t^+, E) = \infty\}}$ ,  $\bar{Y}'_t = Y'_t + \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} Y'_{s-}$  ;

on a

$$(167) \quad \bar{Y}'_t = \ell_t^C + \int_0^t 1_{\{N(g_s, E) = \infty\}} d\mu_s.$$

On peut alors énoncer l'extension annoncée dont la démonstration est identique à celle de (165).



(168) PROPOSITION : Soit  $M$  un ensemble aléatoire optionnel et  $\phi^{(n)}$  une suite croissante de processus paramétrés ; on suppose que la suite  $\phi^{(n)}$  définie par  $\phi^{(n)}(s, x) = \phi^{(n)} 1_M(s)$  satisfait aux conditions (162) et que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(s, x) = \phi(s, x) \quad \forall s \in M \quad \forall x > 0$$

On pose

$$W'_t = \sum_{s \in G \cap M} \int_{[0, d_s - s]} 1_{[0, t]}^{(s+u)} 1_{[0, b_s^{(u)}} \left[ \phi^{(n)}(s, du) - \phi^{(n)}(s, u) \frac{N(s, du)}{N_-(s, u)} \right]$$

$$L'_t = \int_0^t 1_M(s) dL_s.$$

Il existe alors un ensemble  $\Omega_0$  de probabilité 1 et une sous-suite

$W'^{(n_k)}$  tels que pour tout  $\omega \in \Omega_0$  et  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W'_t^{(n_k)}(\omega) = L'_t(\omega).$$

Si l'on n'aime pas les sous-suites, on peut les supprimer, à condition d'énoncer (165) et (168) avec la convergence en probabilité.

Nous allons appliquer les résultats précédents à la situation suivante :  $M$  sera l'ensemble aléatoire  $\{s ; N(s, E) = \infty\}$ , de sorte que  $M \cap G = G_r$  ;

nous poserons ensuite  $\beta_s^{(n)} = \inf\{u ; u < b_s \frac{1}{N(s, u)} > \frac{1}{n}\}$  ;

$$\phi^{(n)}(s, u) = \phi(s, u) 1_{\{u > \beta_s^{(n)}\}}.$$

Nous désignerons enfin par  $I_n$  l'ensemble optionnel mince

$\{s + \beta_s^{(n)}\}_{s \in G_r}$  ; c'est l'ensemble des temps successifs de traversée du niveau  $\frac{1}{n}$  par le processus

$$\frac{1}{N(g_t, t - g_t)} 1_{\{t - g_t^+ < b_{g_t}\}} 1_{\{N(g_t, E) = \infty\}}.$$

(On notera en passant une petite subtilité :  $I_n$  n'est pas constructible avec la seule connaissance du processus  $(Y_t)$  ; rien ne permet d'affirmer qu'il est discret ; ces ennuis disparaissent dans les cas usuels (N diffus ou H régénératif)).

Voici maintenant un résultat qui permet de reconstituer le temps local (et donc la projection optionnelle duale du processus ponctuel  $\pi_g$ ) à l'aide de la seule donnée du noyau de Lévy.

(169) THEOREME :

$$l_t = \sum_{\substack{s \in G_0 \\ s < t}} \frac{1}{N(s, E)} + \lim_P \sum_{\substack{s \in I_n \\ s < t}} \frac{1}{\tilde{N}_-(g_s, s - g_s)}$$

$\lim_P$  signifiant limite en probabilité.

Démonstration : On a

$$\phi_-^{(n)}(s, x) = \frac{1}{\tilde{N}_-(s, x)} 1_{\{x > \beta_s^n\}}$$

$$(\phi \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-})^{(n)}(s, x) = \frac{1}{\tilde{N}_-(s, x)} 1_{\{\beta_s^n < x < b_s\}}.$$

Il est facile de montrer que ces deux processus sont dans  $\mathcal{M}_{loc}^{loc}$  ; on a en effet si  $(t, \omega) \in M$ .

$$\int_{[0, \alpha_t^{(m)}]} \phi_-^{(n)}(t, x) N(t, dx) = \int_{[\beta_t^{(n)}, \alpha_t^{(m)}]} \frac{1}{\tilde{N}_-(t, x)} N(t, dx) < mn$$

$$\int_{[0, \alpha_t^{(m)}]} \phi^{(n)}(t, x) \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_-}(t, x) N(t, x) < mn + \frac{\Delta N(t, \beta_t^{(n)})}{\tilde{N}_-(t, \beta_t^{(n)})} < 1 + mn.$$

$$\text{D'autre part } \phi^{(n)}(t, du) - \phi(t, u) \frac{N(t, du)}{\tilde{N}_-(t, u)} = \frac{1}{\tilde{N}_-(t, \beta_t^{(n)})} \epsilon_{\beta_t^{(n)}}(du).$$

Appliquons la proposition (166) ; il en résulte immédiatement que

$$\ell_t^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{s \in I_n \\ s \leq t}} \frac{1}{\tilde{N}_-(g_s, s - g_s)}$$

d'où le résultat.

Ces formules sont bien connues dans le cas régénératif ; ce sont alors des conséquences faciles de la loi des grands nombres.

D'autres approximations de  $\phi$  peuvent être amusantes. Supposons, pour simplifier, que le noyau  $N$  est diffus et de masse infinie et considérons pour  $p > 1$  la famille de fonctions

$$\phi^{(p)} = \left[ \frac{1}{\tilde{N}} \right]^p 1_{\{\tilde{N} > 1\}} + \frac{1}{\tilde{N}} 1_{\{\tilde{N} < 1\}}.$$

La famille  $\phi^{(p)}$  tend en croissant vers  $\phi$  quand  $p$  décroît vers 1.

On vérifie sans peine que  $\phi^{(p)} \in \mathcal{M}_{loc}^1$  ; en effet

$$\int_{[0, \alpha_t(n)]} \phi^{(p)}(s, x) N(s, dx) \leq \frac{1}{p-1} + \text{Log } n$$

Le noyau  $\phi^{(p)}(s, du) - \phi^{(p)}(s, u) \frac{N(s, du)}{\tilde{N}(s, u)}$  est égal à

$$\frac{1}{q} d \left[ \frac{1}{\tilde{N}(s, \cdot)} \right]^p 1_{\{\tilde{N} > 1\}}$$

( $q$  désignant l'exposant conjugué de  $p$ ) et son développement sur  $H^c$  s'écrit

$$w_t^{(p)} = \frac{1}{q} \left[ \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \left( \frac{1}{\tilde{N}(g_s, s - g_s)} \wedge 1 \right) + \frac{1}{\tilde{N}(g_t^+, t - g_t^+)} \wedge 1 \right]$$

$q$  tend vers l'infini quand  $p \downarrow 1$  ; on ne change pas la limite de  $w_t^{(p)}$  si l'on modifie un nombre fini de termes du second membre, de sorte qu'on peut énoncer

(170) PROPOSITION :

$$\ell_t = \lim_{p \downarrow 1} \frac{1}{q} \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \frac{1}{[\tilde{N}(g_s, s - g_s)]^p}.$$

Ce résultat est moins classique que le précédent, y compris dans le cas régénératif ; peut être même est-il nouveau.

Il serait intéressant de le rapprocher des théorèmes antérieurs (Bretagnolle, Claire Dupuis, Taylor) permettant de calculer la dimension de Hausdorff de  $H$  connaissant sa mesure de Lévy.

#### B I B L I O G R A P H I E

- [1]     J. AZEMA                             : Quelques applications de la théorie générale des processus.  
Inventiones Math. 18, p. 293-336 (1972).
- [2]     J. AZEMA                             : Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée.  
Z.W. 45, p. 191-211 (1978).
- [3]     J. AZEMA, M. YOR                   : En guise d'introduction.  
Astérisque 52-53 (1978).
- [4]     P. BREMAUD                           : The martingale theory of point processes over the real half line.  
Lecture Notes in Economics and Math. Systems (1974).
- [5]     C.S. CHOU, P.A. MEYER               : La représentation des martingales relatives à un processus ponctuel discret.  
C.R.A.S Paris, A, 278, p. 1561-1563 (1974).
- [6]     C. DELLACHERIE                      : Un exemple de la théorie générale des processus.  
Sém. de Proba. IV, Lecture Notes 124. Springer 1970.
- [7]     C. DELLACHERIE, P.A. MEYER: Probabilités et potentiels, B, Théorie des martingales. Hermann 1979.
- [8]     J. JACOD                               : Multivariate point processes.  
Z.W. 31, p. 235-253 (1975).
- [9]     J. JACOD                               : Calcul stochastique et problème des martingales.  
Lecture Notes 714 (1979).
- [10]    B. MAISONNEUVE                      : Systèmes régénératifs.  
Astérisque, 15 (1974).
- [11]    B. MAISONNEUVE, P.A. MEYER: Ensembles aléatoires markoviens homogènes.  
Sém. de Proba. VIII, p. 172-261 (1974).
- [12]    M. WEIL                               : Conditionnement par rapport au passé strict.  
Séminaire de Probabilités V, p. 362-372 (1971).
- [13]    J. JACOD, J. MEMIN                   : Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs.  
Séminaire de Probabilités X, p. 24-39 (1976).