SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 350-365

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__350_0>

RENORMALISATION ET CONVERGENCE EN LOI POUR LES TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION DU MOUVEMENT BROWNIEN DANS $\mathbb{R}^3$.

M. YOR

1. Introduction et énoncé des résultats.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$, ou 3), issu de 0.
Notons par ailleurs, pour tout $t > 0$, $T_t = \{(s,u) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq s \leq u \leq t\}$.
D'après Rosen [2], il existe une fonction : $(y,t) \to \alpha(y\ ;\ T_t)$ continue sur $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, borélienne, on ait :

$$\int_0^t ds \int_s^t du\ f(B_u - B_s) = \int dy\ f(y)\ \alpha(y\ ;\ T_t).$$

$\alpha(y\ ;\ T_t)$ est la mesure donnée à l'ensemble T_t par le temps local d'intersection de $B_\cdot$, au point y (pour la définition complète de ce temps local, voir Rosen [2] et Le Gall [1]).
On montre aisément que, pour tout $t > 0$ fixé, $\alpha(y\ ;\ T_t) \xrightarrow[y\to 0]{(P)} \infty$; cette "explosion" est dûe aux recoupements immédiats de la trajectoire Brownienne $(B_{u+v}\ ;\ v \geq 0)$, considérée à partir de n'importe quel réel $u \geq 0$, avec elle-même.

En dimension $d = 2$, Varadhan [5] a montré que, néanmoins :

$$\pi\alpha(y\ ;\ T_t) - t \log \frac{1}{|y|} \quad \text{converge dans } L^2, \text{ lorsque } y \to 0\ ;$$

ce résultat, que l'on désigne souvent sous le terme de "renormalisation de Varadhan" a été très récemment expliqué de différentes manières (voir Rosen [3], Le Gall [1], Yor [6]).
L'objet principal du présent travail est de démontrer la modification suivante du résultat de Varadhan, pour la dimension $d = 3$.

Théorème : On a :

$$(1.a) \qquad \left(B_t\ ;\ \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}}\left\{2\pi\alpha(y\ ;\ T_t) - \frac{t}{|y|}\right\};\ t \geq 0\right) \xrightarrow[y\to 0]{(d)} (B_t\ ;\ 2\beta_t\ ;\ t \geq 0)$$

où $(\beta_t, t \geq 0)$ *désigne un mouvement Brownien réel issu de* 0, *indépendant de* B, *et* (d) *indique la convergence en loi associée à la topologie la convergence compacte sur l'espace canonique* $C(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R}^4)$.

Le théorème admet diverses variantes et extensions que nous énonçons maintenant.

Proposition 1 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *continue, à support compact. Alors le processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^4$:

$$(B_t ; \frac{1}{\sqrt{\log n}} \{n^3 \int_0^t ds \int_s^t du\, f(n(B_s - B_u)) - \frac{tn}{2\pi} \int \frac{dy}{|y|} f(y)\} ; t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(B_t ; \frac{1}{\pi} (\int f(y) dy) \beta_t ; t \geq 0),$$

le couple (B, β) *étant distribué comme dans le théorème.*

Nous étudions maintenant les distributions asymptotiques de $(\alpha(0 ; T_t^\delta), t \geq 0)$ où $T_t^\delta = \{(s,u) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < s < u - \delta < t - \delta\}$.

Proposition 2 : Posons, pour tout $t \geq 0$, $y \neq 0$, $\delta > 0$:

$$\Phi_y(t) = 2\pi\alpha(y ; T_t) - \frac{t}{|y|} ; \Phi^\delta(t) = 2\pi\alpha(0 ; T_t^\delta) - \frac{t}{\sqrt{\delta}} E(\frac{1}{|B_1|}).$$

Alors, pour tout $t > 0$,

$$\text{(1.b)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} |\Phi_y(t) - \Phi^{|y|^2}(t)| \xrightarrow[y \to 0]{(P)} 0.$$

En conséquence,

$$(B_t ; \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{\delta}}} (2\pi\alpha(0 ; T_t^\delta) - \frac{t}{\sqrt{\delta}} E(\frac{1}{|B_1|})) \xrightarrow[\delta \to 0]{(d.f)} (B_t ; \sqrt{2} \cdot \beta_t ; t \geq 0)$$

le couple (B, β) *étant distribué comme dans le théorème, et* $(d.f)$ *indiquant la convergence en loi des marginales de rang fini.*

Remarque : Il devrait être possible de remplacer, dans l'énoncé de la proposition, (d.f) par (d), comme dans l'énoncé du théorème. Cependant, une difficulté technique (mineure ?) nous empêche de le faire ; voir le paragraphe (3.2), pour les détails.

Nous présentons enfin une troisième variante du théorème, en considérant, pour le mouvement Brownien (B_t) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 4)$, une quantité qui joue le rôle de $2\pi\alpha(y\ ;\ T_t) - \frac{t}{|y|}$ pour la dimension $d = 3$.

Proposition 3 : Soit $(B_t\ ;\ t \geq 0)$ mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$. Alors :

$$\left(B_t\ ;\ \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}}\left\{\frac{d-3}{2}\int_0^t ds \int_s^t du\ \frac{1}{|B_u - B_s - y|^3} - \frac{t}{|y|}\right\}\ ;\ t \geq 0\right)$$

converge en loi vers : $\left(B_t\ ;\ \left[\frac{8}{(d-1)(d-2)}\right]^{1/2} \beta_t\ ;\ t \geq 0\right)$, où $(\beta_t,\ t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel indépendant de B.

En conclusion de cette Introduction, rappelons que J. Westwater (Comm. Math. Physics, 72, 131-174, 1980) a montré que, en dimension $d = 3$, pour tout $g > 0$, et $t > 0$ fixés, les probabilités

$$\pi_g^{(y)} \equiv \frac{\exp - g\alpha(y\ ;\ T_t)}{E[\exp - g\alpha(y\ ;\ T_t)]} \cdot W$$

(où W désigne la mesure de Wiener restreinte à $\sigma\{B_u\ ;\ u \leq t\}$) convergent étroitement, l'espace $C([0,t]\ ;\ \mathbb{R}^3)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme. Les probabilités limites π_g ainsi obtenues sont étrangères entre elles ainsi qu'à W. Il serait très intéressant de relier ces résultats et le théorème ci-dessus.

2. Démonstration du théorème :

(2.1) Nous montrerons, dans un premier temps, la convergence en loi des marginales de rang fini des processus considérés en (1.a), puis, dans un deuxième temps, que les lois de ces processus sont tendues, lorsque $y \to 0$.

Les deux parties de la démonstration reposent sur la formule de Tanaka - Rosen suivante :

$$(2.a)\qquad \int_0^t ds\{\frac{1}{|B_t-B_s-y|} - \frac{1}{|y|}\} = -\int_0^t (dB_u \,;\, S_0^u(y)) - 2\pi\alpha(y\,;\,T_t),$$

où :

$$(2.b)\qquad S_a^b(y) \equiv \int_a^b ds\,\frac{B_b-B_s-y}{|B_b-B_s-y|^3} \qquad (a < b),$$

et $(\ ;\ )$ indique le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$.

(voir Rosen [4] pour la démonstration d'origine de la formule (2.a), et Yor [6] pour quelques précisions supplémentaires).

(2.2) (i) Considérons, pour l'instant, $t > 0$ fixé.

Lorsque $y \to 0$, le terme $\int_0^t \frac{ds}{|B_t-B_s-y|}$ converge en probabilité vers $\int_0^t \frac{ds}{|B_t-B_s|}$.

On en déduit, en notant dorénavant $\rho(r) = \sqrt{|\log r|}$ $(r > 0)$:

$$(2.c)\qquad \frac{1}{\rho(|y|)}\{2\pi\alpha(y\,;\,T_t) - \frac{t}{|y|}\} \underset{y\to 0}{\sim} \frac{-1}{\rho(|y|)}\int_0^t (dB_u \,;\, S_0^u(y)),$$

où le signe $\underset{y\to 0}{\sim}$ signifie que la différence des deux termes ci-dessus converge en probabilité vers 0, lorsque $y \to 0$.

Montrons maintenant l'existence d'une limite en loi, pour $u > 0$ fixé, de :

$$(2.d)\qquad \frac{1}{\rho(|y|)} S_0^u(y) \overset{(d)}{=} \frac{1}{\rho(|y|)}\int_0^u ds\,\frac{B_s-y}{|B_s-y|^3} \overset{(d)}{=} \frac{1}{\rho(|y|)}\int_0^{u/|y|^2} ds\,\frac{B_s-1}{|B_s-1|^3},$$

les deux identités en loi étant conséquences des propriétés classiques d'invariance en loi du mouvement Brownien.

(ii) Pour simplifier l'écriture, (B_t) désigne, dans les calculs qui suivent, un mouvement Brownien issu de -1. On a, d'après la formule d'Itô :

$$(2.e)\qquad \frac{B_t}{|B_t|} = \frac{B_0}{|B_0|} + \int_0^t \frac{\sigma^{0,1}(B_u)\cdot dB_u}{|B_u|} - \int_0^t dv\,\frac{B_v}{|B_v|^3},$$

où l'on a adopté la notation de Krylov ([9], p. 21) pour le champ de matrices $(\sigma^{0,1}(x)\ ;\ x\in\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ défini par :

$$\sigma^{0,1}_{i,j}(x) = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \qquad (1 < i,j < 3).$$

La matrice $\sigma^{0,1}(x)$ est caractérisée par :

$$\sigma^{0,1}(x)\cdot x = 0\ ; \qquad \sigma^{0,1}(x)\cdot y = y,\ \text{ si } (x;y) = 0$$

On a, d'après la formule (2.e) :

$$(2.f)\qquad \frac{1}{\rho(t)}\int_0^t dv\,\frac{B_v}{|B_v|^3} \underset{(t\to\infty)}{\sim} \frac{1}{\rho(t)}\int_0^t \frac{\sigma^{0,1}(B_u)\cdot dB_u}{|B_u|}.$$

Notons $\{X_t = (X_t^i\ ;\ i = 1,2,3)\ ;\ t > 0\}$ la martingale tri-dimensionnelle :

$$X_t = \int_0^t \frac{\sigma^{0,1}(B_u)\cdot dB_u}{|B_u|}.$$

On a alors :

$$\langle X^i\rangle_t = \int_0^t \frac{du}{|B_u|^2}\,\sigma^{0,1}_{i,i}(B_u) = \int_0^t \frac{du}{|B_u|^2}\Big(1 - \frac{(B_u^i)^2}{|B_u|^2}\Big),$$

et, pour $i \neq j$:

$$\langle X^i,X^j\rangle_t = \int_0^t \frac{du}{|B_u|^2}\,\sigma^{0,1}_{i,j}(B_u) = \int_0^t \frac{du}{|B_u|^2}(-1)\,\frac{B_u^i\,B_u^j}{|B_u|^2}.$$

Nous montrons maintenant le

Lemme 1 :

1) $\dfrac{1}{\log t}\langle X^i\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 2/3$ *et* $\dfrac{1}{\log t}\langle X^i,X^j\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 0 \qquad (i \neq j).$

2) $\frac{1}{\sqrt{\log t}} X_t \xrightarrow[t\to\infty]{(d)} (\frac{2}{3})^{1/2} N_3,$

où N_3 *désigne une variable gaussienne, à valeurs dans* $\mathbb{R}^3$, *centrée, et ayant pour covariance la matrice identité.*

Démonstration : a) Remarquons tout d'abord que, si l'on note $C_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}$, on a :

(2.g) $\quad \frac{1}{\log t} C_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 1.$

On se ramène aisément à montrer que, si (B_t) est issu de 0, $\frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 1.$

Soit $a > 1$. On peut appliquer le théorème ergodique à l'expression :

$$\frac{1}{N}\int_1^{a^N} \frac{ds}{|B_s|^2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C \circ T^k,$$

où $C = \int_1^a \frac{ds}{|B_s|^2}$, et $B_s(T\omega) \equiv \frac{1}{a^{1/2}} B_{as}$ $(s > 0)$, ce qui implique (2.g).

b) D'après la décomposition en skew-product du mouvement Brownien (B_t) (cf : Itô - Mc Kean [7], p. 270), il existe un mouvement Brownien standard $(\theta_t, t > 0)$ sur la sphère S_2, tel que :

$$B_t = |B_t| \theta_{C_t}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\log t} \langle X^i \rangle_t = \frac{1}{\log t}\int_0^{C_t} du \, [1 - (\theta_u^i)^2].$$

A l'aide de (2.g), on peut se ramener à considérer, lorsque $T(= \log t) \to \infty$, l'expression : $\frac{1}{T}\int_0^T du \, [1 - (\theta_u^i)^2]$ qui, d'après le théorème ergodique, converge p.s. vers $\int \sigma(d\theta) \, [1 - (\theta^i)^2]$, où $\sigma(d\theta)$ désigne la probabilité uniforme sur la sphère S_2.

On a, par symétrie : $\int\sigma(d\theta) \, (\theta^i)^2 = \frac{1}{3}$, et donc : $\int\sigma(d\theta) \, [1 - (\theta^i)^2] = \frac{2}{3}$.

La première partie de l'assertion 1) est démontrée.

Le même raisonnement et l'égalité : $\int\sigma(d\theta) \, \theta^i \, \theta^j = 0 \quad (i \neq j)$ impliquent la seconde partie de l'assertion 1).

c) La seconde assertion du lemme découle maintenant aisément de la première, et d'une version asymptotique du théorème de représentation - dû à F. Knight [8] - d'un nombre fini de martingales continues orthogonales comme mouvements Browniens réels indépendants changés de temps.

Remarque : La méthode développée ci-dessus pour parvenir à la conclusion du lemme 1 n'est qu'un exemple - particulièrement explicite - d'application de la méthode générale de Papanicolaou - Stroock - Varadhan [10].

(iii) Revenons à la formule (2.c). On trouve, à l'aide de l'équivalence (2.d) :

$$(2.h) \qquad \frac{1}{\rho(|y|)} S_0^u(y) \xrightarrow[y\to 0]{(d)} [2\cdot(\tfrac{2}{3})]^{1/2} N_3$$

(à partir de maintenant, (B_t) désigne à nouveau un mouvement Brownien issu de 0).

Remarquons ensuite que, pour $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$, on a :

$$(2.i) \qquad \frac{1}{\rho(|y|)} (S_0^{u_1}(y), S_0^{u_2}(y), \ldots, S_0^{u_n}(y)) \xrightarrow[|y|\to 0]{(d)} \left[2\cdot(\tfrac{2}{3})\right]^{1/2} (N_3^{(1)}, \ldots, N_3^{(n)})$$

où $(N_3^{(i)}\ ;\ 1 \leq i \leq n)$ sont n variables gaussiennes indépendantes, chacune d'elles étant distribuée comme N_3.

En effet, il est immédiat que le membre de gauche de (2.i) est $\underset{y\to 0}{\sim}$ à :

$$\frac{1}{\rho(|y|)} (S_0^{u_1}(y), S_{u_1}^{u_2}(y), \ldots, S_{u_{n-1}}^{u_n}(y)),$$

vecteur qui est composé de n variables réelles <u>indépendantes</u>.

Le résultat (2.i) découle alors immédiatement de (2.h).

Nous utilisons maintenant (2.i), avec $n = 2$, pour étudier le comportement asymptotique de l'intégrale stochastique qui figure en (2.a), c'est-à-dire :

$$(2.j) \qquad M_t(y) \equiv \frac{1}{\rho(|y|)} \int_0^t (dB_u\ ;\ S_0^u(y)).$$

Montrons tout d'abord que, pour t fixé, le processus croissant :

$$<M_{\bullet}(y)>_t \equiv \frac{1}{\log \frac{1}{|y|}} \int_0^t du \; |S_0^u(y)|^2$$

converge dans L^2 vers une constante (précisément, vers $(4t)$).

En effet, on a :

$$\text{(2.k)} \qquad E[<M_{\bullet}(y)>_t] = \frac{1}{\log \frac{1}{|y|}} \int_0^t du \; E[|S_0^u(y)|^2] \longrightarrow t(\tfrac{4}{3}) \; E(|N_3|^2) = 4t$$

et :

$$\text{(2.}\ell\text{)} \qquad E[(<M_{\bullet}(y)>_t)^2] = \frac{2}{(\log \frac{1}{|y|})^2} \int_0^t du \int_u^t dv \; E[|S_0^u(y)|^2 \; |S_0^v(y)|^2] \longrightarrow (4t)^2$$

à l'aide de (2.i) [voir (2.3), (i), pour la justification des passages à la limite].

De la même façon, on montre que, pour tout $t > 0$:

$$<M_{\bullet}(y), B^i>_t = \frac{1}{\rho(|y|)} \int_0^t (S_0^u(y))^i \; du$$

converge vers 0 dans L^2, ce dont on déduit aisément :

$$(B_t \; ; \; M_t(y) \; ; \; t > 0 \xrightarrow[y \to 0]{(d.f)} (B_t \; ; \; 2\beta_t \; ; \; t > 0)$$

avec (β_t) mouvement Brownien réel indépendant de (B_t), où (d.f) indique la convergence en loi des marginales de rang fini. Ainsi la convergence en loi des marginales de rang fini des processus considérés en (1.a) est démontrée, à l'aide de l'équivalence (2.c).

(2.3) (i) Avant de commencer la seconde partie de la démonstration du théorème, il nous faut déjà justifier les passages à la limite en (2.k) et (2.ℓ). Ces passages à la limite peuvent être justifiés grâce au théorème de convergence dominée d'une part, et au résultat de convergence en loi (2.i) d'autre part, à l'aide des majorations suivantes :

<u>Lemme 2</u> : <u>On a</u> :

1) <u>pour tout</u> $k > 0$, $\quad \sup_{t \geq 2} E\left[\left(\frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{|B_s - 1|^2}\right)^k\right] < \infty$

2) pour tout $k > 0$, *et* $T > 0$,

$$\sup_{u\leq T\ ;\ |y|^2 \leq \frac{T\wedge 1}{2}} E\Big[\big|\frac{1}{\rho(|y|)} S_0^u(y)\big|^k\Big] < \infty.$$

Démonstration : 1) Il existe, d'après la formule d'Itô, un mouvement Brownien réel $(\beta_u, u \geq 0)$ tel que :

$$(2.m) \qquad \log |B_t - 1| = \int_0^t \frac{d\beta_s}{|B_s - 1|} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s-1|^2}.$$

Posons $C_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s-1|^2}$. On montre aisément, à l'aide de (2.m), que, pour tout $k>0$, $E[C_t^k] < \infty$, puis, toujours à l'aide de (2.m), et des inégalités de Burkholder - Gundy, on obtient :

$$E[C_t^k] \leq c_k\{E[|\log|B_t-1||^k] + E[C_t^{k/2}]\}$$

$$\leq c_k\{E[|\log|B_t-1||^k] + E[C_t^k]^{1/2}\}.$$

En résolvant cette inégalité du second degré en $x \equiv E[C_t^k]^{1/2}$, on obtient finalement : $\quad E[C_t^k] = O((\log t)^k) \qquad (t \to \infty)$.

2) On obtient de même, à partir de la formule (2.e), dans laquelle on remplace (B_t) par $(B_t - y)$, avec l'aide des inégalités de Burkholder - Gundy :

$$E\Big[\big|\frac{1}{\rho(|y|)} S_0^u(y)\big|^k\Big] \leq c_k\Big\{\frac{1}{\rho(|y|)^k} + \frac{1}{\rho(|y|)^k} E\Big[\Big(\int_0^u \frac{ds}{|B_s-y|^2}\Big)^{k/2}\Big]\Big\}$$

$$\leq \frac{c_k}{(\log(\frac{1}{|y|}))^{k/2}}\{1 + (\log \frac{T}{|y|^2})^{k/2}\},$$

d'après la première partie du lemme. La seconde assertion est maintenant démontrée.

(ii) Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de montrer que, pour tout $T > 0$, les lois des processus

$$M_t(y) \equiv \frac{1}{\rho(|y|)} \int_0^t (dB_u\ ;\ S_0^u(y)) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

et $R_t(y) \equiv \dfrac{1}{\rho(|y|)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{ds}{|B_t-B_s-y|}$ $\qquad (0 \leq t \leq T)$

sont tendues, lorsque $y \to 0$. Nous montrons en fait que ces deux familles de processus satisfont le critère de Kolmogorov.

En effet, on a, pour $0 \leq s \leq t \leq T$, et $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} E[|M_t(y) - M_s(y)|^k] &\leq \frac{c_k}{\rho(|y|)^k} E\Big[\Big(\int_s^t du|S_0^u(y)|^2\Big)^{k/2}\Big] \\ &\leq \frac{c_k}{\rho(|y|)^k} (t-s)^{\frac{k}{2}-1} \int_s^t du\, E[|S_0^u(y)|^k] \\ &\leq c_k(t-s)^{k/2}, \end{aligned}$$

d'après la seconde assertion du lemme 2, appliquée avec y suffisamment petit.

D'autre part, on a :

$$E[|R_t(y) - R_s(y)|^k]$$

$$(2.n) \qquad \leq \frac{c_k}{\rho(|y|)^k} \Big\{E\Big[\Big(\int_s^t \frac{du}{|B_t-B_u-y|}\Big)^k\Big] + E\Big[\Big(\int_0^s du\Big\{\frac{1}{|B_t-B_u-y|} - \frac{1}{|B_s-B_u-y|}\Big\}\Big)^k\Big]\Big\}.$$

La première espérance est égale à : $E\Big[\Big(\displaystyle\int_0^{t-s} \frac{du}{|B_u-y|}\Big)^k\Big]$, expression qu'il est aisé de majorer par $c_k(t-s)^{k/2}$, indépendamment de y, grâce à la formule :

$$(2.o) \qquad |B_t-y| = |y| + \beta_t + \int_0^t \frac{du}{|B_u-y|},$$

avec (β_t) mouvement Brownien réel issu de 0.

Ensuite, on réécrit la seconde espérance qui figure en (2.n) sous la forme :

$$\delta_k(y\ ;\ s,t) \equiv E\Big[\Big|\int_0^s du\ \Big\{\frac{1}{|B'_u-(y+z)|} - \frac{1}{|B'_u-y|}\Big\}\Big|^k\Big]$$

où l'on a posé : $z = -B_t + B_s$, variable aléatoire indépendante du mouvement Brownien $B'_u = B_s - B_{s-u}$ $\quad (u \leq s)$.

Réécrivons maintenant l'expression (2.o) de façon développée, en remplaçant $|B_t-y|$ par $|B'_s-(y+z)|$ d'une part, puis $|B'_s-y|$ d'autre part. Il vient :

$$|B'_s-(y+z)|-|B'_s-y|$$

(2.p)
$$=\int_0^t (dB'_u\ ;\ \frac{B'_u-(y+z)}{|B'_u-(y+z)|}-\frac{B'_u-y}{|B'_u-y|})+\int_0^s du\ \{\frac{1}{|B'_u-(y+z)|}-\frac{1}{|B'_u-y|}\}.$$

Pour estimer l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique ci-dessus, on utilise l'inégalité élémentaire :

$$\left|\frac{a}{|a|}-\frac{b}{|b|}\right| < \frac{2|a-b|}{|a|}.$$

On a alors, à l'aide de (2.p), et des inégalités de Burkholder - Gundy :

$$\begin{aligned}\delta_k(y\ ;\ s,t) &< c_k\ E\Big[|z|^k+\Big(\int_0^s du\ \frac{|z|^2}{|B'_u-y|^2}\Big)^{k/2}\Big]\\ &< c_k\ E(|z|^k)\ E\Big(1+\Big(\int_0^{s/|y|^2} du\ \frac{1}{|B'_u-1|^2}\Big)^{k/2}\Big)\\ &< c_k(t-s)^{k/2}\ \Big(1+\Big(\log\frac{T}{|y|^2}\Big)^{k/2}\Big),\end{aligned}$$

d'après la première partie du lemme 2.

Finalement, en reportant ces inégalités en (2.n), on obtient :

$$E(|R_t(y)-R_s(y)|^k) < c_k(t-s)^{k/2},$$

indépendamment de y, choisi suffisamment petit (en fonction seulement de T). Ceci termine complètement la démonstration du théorème.

3. Démonstration des propositions.

Les trois paragraphes ci-dessous sont consacrés aux démonstrations respectives des propositions 1, 2, 3.

(3.1) Réécrivons l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}}\ \{n^3\int_0^t ds\int_s^t du\ f(n(B_s-B_u))-\frac{tn}{2\pi}\int\frac{dy}{|y|}\ f(y)\}$$

sous la forme :

$$(3.a)\qquad \frac{1}{2\pi}\int dy\ f(y)\ \frac{1}{\sqrt{\log n}}\ \{2\pi\alpha(\frac{y}{n}\ ;\ T_t) - \frac{t}{|\frac{y}{n}|}\}.$$

A l'aide de la formule de Tanaka - Rosen, et des notations utilisées en (2.3), (ii), on a :

$$2\pi\alpha(\frac{y}{n}\ ;\ T_t) - \frac{t}{|\frac{y}{n}|} = -\int_0^t (dB_u\ ;\ S_0^u(\frac{y}{n})) - \sqrt{|\log \frac{n}{|y|}|}\,R_t(\frac{y}{n}).$$

Pour tout $y \neq 0$, on a : $E\Big[\sup_{t<T} |R_t(\frac{y}{n})|\Big] \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$, à l'aide des majorations faites en (2.3), (ii) ; d'autre part $E\Big[\sup_{t<T} |R_t(y)|\Big]$ est bornée, lorsque y reste dans un voisinage de 0.

D'après le théorème de convergence dominée , on a donc :

$$\int dy\ |f(y)|\ \frac{1}{\sqrt{\log n}}\ \sqrt{|\log \frac{n}{|y|}|}\ E\Big[\sup_{t<T}|R_t(\frac{y}{n})|\Big] \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Nous pouvons donc remplacer l'expression (3.a) par :

$$(3.a')\qquad \frac{-1}{2\pi}\int dy\ f(y)\ \frac{1}{\sqrt{\log n}}\int_0^t (dB_u\ ;\ S_0^u(\frac{y}{n})),$$

et, à l'aide de la fin de (2.2), (ii), la proposition 1 sera démontrée dès que l'on aura prouvé :

$$(3.b)\qquad \int dy|f(y)|\ \frac{1}{\sqrt{\log n}}\ E\Big[\sup_{t<T}\ \Big|\int_0^t (dB_u\ ;\ S_0^u(\frac{y}{n}) - S_0^u(\frac{1}{n}))\Big|\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On majore cette expression, à l'aide des inégalités de Burkholder - Gundy, par :

$$(3.b')\qquad c\int dy\ |f(y)|\Big|\int_0^t du(\frac{1}{\log n}\ E[|S_0^u(\frac{y}{n}) - S_0^u(\frac{1}{n})|^2])^{1/2}.$$

Remarquons maintenant que par scaling, on a, pour u et y fixés :

$$S_0^u(\frac{y}{n}) - S_0^u(\frac{1}{n}) \overset{(d)}{=} \int_0^{nu} ds(\frac{B_s - y}{|B_s - y|^3} - \frac{B_s - 1}{|B_s - 1|^3}),$$

et il est facile de voir que cette intégrale (en ds) est absolument convergente lorsque $n \to \infty$.

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{\log n}}(S_o^u(\frac{y}{n}) - S_o^u(\frac{1}{n}))$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

On déduit des majorations de la partie 2 du lemme 2 que cette convergence a lieu, en fait, dans tout L^p, et, à l'aide du théorème de convergence dominée, que l'expression (3.b') converge vers 0, lorsque $n \to \infty$.

(3.2) Le rôle joué par la formule (2.a) pour la démonstration du théorème est maintenant tenu par la formule :

$$\text{(3.c)} \qquad \begin{aligned} &\int_0^{t-\delta} ds\{\frac{1}{|B_t-B_s|} - \frac{1}{|B_{s+\delta}-B_s|}\} \\ &= -\int_\delta^t (dB_u \; ; \int_0^{u-\delta} ds \frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|^3}) - 2\pi\alpha(0 \; ; T_t^\delta). \end{aligned}$$

Posons $\delta = |y|^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(|y|)}\Phi_t^\delta &\equiv \frac{1}{\rho(|y|)}(2\pi\alpha(0 \; ; T_t^\delta) - \frac{t}{\sqrt{\delta}}E(\frac{1}{|B_1|})). \\ &= -M_t^\delta - R_t^{1,\delta} + R_t^{2,\delta}, \end{aligned}$$

où : $M_t^\delta = \frac{1}{\rho(|y|)}\int_0^t (dB_u \; ; \int_0^{(u-\delta)^+} ds \frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|^3})$

$$R_t^{1,\delta} = \frac{1}{\rho(|y|)}\int_0^{(t-\delta)^+} ds \frac{1}{|B_t-B_s|} \; ; \; R_t^{2,\delta} = \frac{1}{\rho(|y|)}\int_0^{t-\delta} ds\{\frac{1}{|B_{s+\delta}-B_s|} - E(\frac{1}{|B_\delta|})\}.$$

Nous montrerons les trois résultats suivants, dont découle a fortiori le résultat (1.b) :

(3.d) $\quad E\left[\sup_{t<T} |M_t^\delta - M_t(y)|^2\right] \xrightarrow[y\to 0]{} 0$;

(3.e) $\quad$ pour tout $t > 0$, $R_t^{1,\delta} + |R_t^{2,\delta}| \xrightarrow[\delta\to 0]{(P)} 0$;

(3.f) $\quad$ les lois des processus $(R_t^{1,\delta} \; ; t < T)$ sont tendues, lorsque $\delta \to 0$.

Remarque : Si l'on pouvait montrer également que les lois des processus $(R_t^{2,\delta} \; ; t<T)$, sont tendues, on pourrait remplacer, dans l'énoncé de la proposition 2, (d.f) par (d).

(ii) En remplaçant les martingales qui figurent en (3.d) par leurs processus croissants, on peut majorer l'espérance en question par :

$$\frac{4}{\rho(|y|)^2}\int_0^T du\, E\Big[\Big|\int_0^{(u-\delta)^+} ds\,\frac{B_u-B_s}{|B_u-B_s|^3}-\int_0^u ds\,\frac{B_u-B_s-y}{|B_u-B_s-y|^3}\Big|^2\Big].$$

D'après la deuxième partie du lemme 2, la contribution à l'intégrale en (du) de l'intervalle $(0,\delta)$ est $O(\delta)$. D'autre part, on peut réécrire l'intégrale restante, après avoir fait les opérations - maintenant habituelles - de retournement du mouvement Brownien au temps u, et de scaling, sous la forme :

$$\text{(3.g)}\qquad h(\delta) \equiv \frac{c}{(\log\frac{1}{\delta})}\int_\delta^T du\, E\Big[\Big|\int_1^{u/\delta} ds\,\frac{B_s}{|B_s|^3}-\int_0^{u/\delta} ds\,\frac{B_s-1}{|B_s-1|^3}\Big|^2\Big]$$

Pour la seconde intégrale en (ds), on peut remplacer sans problème l'intervalle d'intégration $(0\,;\frac{u}{\delta})$ par $(1\,;\frac{u}{\delta})$. De plus, on montre aisément que :

$$\int_1^\infty ds\,\Big|\frac{B_s}{|B_s|^3}-\frac{B_s-1}{|B_s-1|^3}\Big| < \infty \quad \text{p.s.},$$

et donc, pour tout $u > 0$, $\frac{1}{(\log\frac{1}{\delta})^{1/2}}\int_1^{u/\delta} ds\,\{\frac{B_s}{|B_s|^3}-\frac{B_s-1}{|B_s-1|^3}\}$ converge en probabilité vers 0, lorsque $\delta \to 0$. En outre, une légère modification de la partie 2 du lemme 2 montre que l'expression ci-dessus est bornéedans tout espace L^p, indépendamment de $u < T$, lorsque $\delta \to 0$.

En conséquence, l'expression $h(\delta)$ qui figure en (3.g) tend vers 0 lorsque $\delta\to 0$.

L'assertion (3.e) est immédiate en ce qui concerne $(R_t^{1,\delta})$; d'autre part, on obtient aisément, à l'aide de l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien : $E[(R_t^{2,\delta})^2] = \frac{1}{(\log\frac{1}{\delta})}\,O(1) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$

Pour montrer l'assertion (3.f), on s'inspire beaucoup des majorations faites en (2.3), (ii) ; en effet, on a :

$$E[|R_t^{1,\delta}-R_s^{1,\delta}|^k]$$

$$< \frac{c_k}{(\log\frac{1}{\delta})^{k/2}}\,\{E\Big[\Big(\int_{(s-\delta)^+}^{(t-\delta)^+}\frac{du}{|B_t-B_u|}\Big)^k\Big]+E\Big[\Big(\int_0^{(s-\delta)^+} du\{\frac{1}{|B_t-B_u|}-\frac{1}{|B_s-B_u|}\}\Big)^k\Big]\}$$

Dans la première espérance, $(B_t - B_{t-\delta})$ joue le rôle pris par y en (2.3), (ii), alors que, dans la seconde espérance, $(B_s - B_{s-\delta})$, resp : $(B_t - B_s)$, joue le rôle pris par y, resp : z, précédemment, et on obtient encore, finalement :

$$E[|R_t^{1,\delta} - R_s^{1,\delta}|^k] \le c_k(t-s)^{k/2},$$

pour δ suffisamment petit.

(3.3) (B_t) désigne maintenant un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 4)$. Remarquons tout d'abord que, pour tout $p > 0$, on a :

$$\int_0^t ds\left\{\frac{1}{|B_t - B_s - y|^p} - \frac{1}{|y|^p}\right\}$$

(3.h)

$$= -p \int_0^t \left(dB_u \,;\, \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^{p+2}}\right) + \frac{p(p+2-n)}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u - B_s - y|^{p+2}}.$$

Cette formule, valable pour tout $y \neq 0$, est une conséquence immédiate de la formule d'Itô, et du théorème de Fubini, applicables sans problème grâce à la non-existence de couples (s,u) tels que : $B_u - B_s = y$.

A l'aide de la formule (3.h), prise avec $p = 1$, la démonstration de la proposition 3 se ramène à l'étude asymptotique de :

$$\left(B_t \,;\, \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} \int_0^t (dB_u \,;\, S_0^u(y))\right),$$

en reprenant les notations du paragraphe 2. Les arguments de la démonstration du théorème sont toujours valables, les seules modifications à faire étant celles des constantes suivantes : dans la formule (2.e), l'intégrale en (dv) doit être affectée du coefficient $\left(\frac{d-1}{2}\right)$; dans le lemme 1, si l'on note $C_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}$, avec (B_t) mouvement Brownien, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 1, alors : $\frac{1}{\log t} C_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \frac{1}{d-2}$, puis, on déduit du théorème ergodique que, avec les notations du lemme 1 :

$$\frac{1}{\log t} \langle X^i \rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \frac{d-1}{d(d-2)} \quad (1 \le i \le d), \text{ et donc que } \frac{1}{\sqrt{\log t}} X_t \xrightarrow[t\to\infty]{(d)} \left(\frac{d-1}{d(d-2)}\right)^{1/2} N_d,$$

où N_d désigne une variable gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centrée, et ayant pour covariance la matrice identité.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] J.F. LE GALL : Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan.
Dans ce volume.

[2] J. ROSEN : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space.
Comm. Math. Physics 88, p. 327-338 (1983).

[3] J. ROSEN : Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion.
Preprint (1984).

[4] J. ROSEN : A representation for the intersection local time of Brownian motion in space.
Preprint (1984).

[5] S. VARADHAN : Appendice à "Euclidean quantum field theory", par K. Symanzik, in : Local quantum theory, R. Jost (ed.), Academic Press (1969).

[6] M. YOR : Compléments aux formules de Tanaka - Rosen.
Dans ce volume.

(Les références ci-dessus sont relatives aux points doubles du mouvement Brownien, et au calcul stochastique associé : les suivantes sont d'ordre plus général).

[7] K. ITÔ, H.P. Mc KEAN : Diffusion processes and their sample paths.
Springer (1965).

[8] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion.
Lect. Notes in Maths n° 190, Springer (1971).

[9] N.V. KRYLOV : Controlled diffusion processes.
Springer - Verlag (1980).

[10] G. PAPANICOLAOU, D. STROOCK, S. VARADHAN : Martingale approach to some limit theorems.
Duke Univ. Maths. Series III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems (1977).

Je voudrais remercier D.W. Stroock et J.F. Le Gall pour de nombreuses discussions.