SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 297-313

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__297_0>

SUR LA MESURE DE HAUSDORFF DE LA COURBE BROWNIENNE

J.F. LE GALL

0. Introduction.

Soit B un mouvement brownien à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, issu de 0. On note Γ la trajectoire de B entre les instants 0 et 1. De nombreux auteurs ont cherché à déterminer une "bonne" fonction de mesure pour la courbe Γ, i.e. une fonction h telle que, P p.s.

$$(0\text{-a}) \qquad 0 < h\text{-}m(\Gamma) < \infty$$

où $h\text{-}m$ désigne la mesure de Hausdorff associée à h.

Ciesielski et Taylor [1], pour $d \geq 3$, et Taylor [10] pour $d=2$ ont obtenu (0-a) avec la fonction h définie par :

$$(0\text{-b}) \qquad h(a) = \begin{cases} a^2 \log\log \frac{1}{a} & \text{si } d \geq 3 \\ a^2 \log \frac{1}{a} \log\log\log \frac{1}{a} & \text{si } d = 2. \end{cases}$$

La preuve de (0-a) passe par la démonstration de théorèmes limites pour les temps d'occupation. On note pour tout $a > 0$:

$$(0\text{-c}) \qquad V(a) = \begin{cases} \int_0^\infty 1_{(|B_s|<a)} ds & \text{si } d \geq 3, \\ \int_0^{T_1} 1_{(|B_s|<a)} & \text{si } d = 2, \end{cases}$$

où $\quad T_1 = \inf\{s \; ; \; |B_s| = 1\}$.

Ciesielski et Taylor, pour $d \geq 3$, et Ray, pour $d=2$, ont montré l'existence d'une constante C_d strictement positive telle que, h étant toujours définie par (0-b) :

$$(0\text{-d}) \qquad \limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} = C_d \qquad P \text{ p.s.}$$

A l'aide de résultats généraux sur les mesures de Hausdorff dûs à Rogers et Taylor [9] on déduit facilement de (0-d) une minoration de la h-mesure de Hausdorff de Γ. Il semble malheureusement beaucoup plus difficile d'obtenir la majoration correspondante. Les résultats généraux de Rogers et Taylor permettent seulement de majorer la h-mesure de Hausdorff d'une partie de la trajectoire correspondant à un ensemble de temps de mesure pleine. Pour majorer la mesure de Hausdorff de l'ensemble complémentaire il est nécessaire d'obtenir des résultats plus précis que (0-d), de la forme suivante ; on note pour tout $k \geqslant 1$:

$$a_k = \begin{cases} 2^{-k} & \text{si} \quad d \geqslant 3, \\ 2^{-2^k} & \text{si} \quad d = 2. \end{cases}$$

Alors on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit et un entier n_0 assez grand tels que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\text{(0-e)} \qquad P\left[\bigcap_{k=n_0}^{n} \{V(a_k) \leqslant \varepsilon h(a_k)\} \right] \leqslant \exp(-C(n-n_0)^{\beta})$$

où C et β sont des constantes positives.

L'objet du présent travail est de donner une démonstration unifiée, aussi simple que possible, de ces résultats. Nous espérons que cette simplification des méthodes sera utile pour traiter des problèmes plus difficiles, comme par exemple la détermination de la "bonne" fonction de mesure pour l'ensemble des points doubles du mouvement brownien plan. Dans la partie 1 nous utilisons une représentation du processus des temps locaux du processus de Bessel de dimension d pour démontrer des inégalités de la forme (0-e). Il est ensuite facile d'en déduire (0-d). On obtient ainsi une preuve de (0-d) assez différente des preuves originales. Dans le cas $d \geqslant 3$ la preuve de Ciesielski et Taylor reposait sur un calcul explicite de la loi de $V(a)$, alors que pour $d=2$, Ray [8] utilisait une approximation par des marches aléatoires. L'inconvénient de notre approche est qu'elle ne permet pas d'identifier les constantes C_d pour $d \geqslant 3$. Dans la partie 2 nous passons à l'étude de la h-mesure de Hausdorff de Γ. Notre méthode est ici assez proche de celle employée par Taylor [10] dans le cas $d=2$. Cependant nous utilisons les résultats généraux de Rogers et Taylor [9] à la fois pour minorer et pour majorer la h-mesure de Hausdorff de Γ, alors que Taylor [10] construisait "à la main" les recouvrements conduisant à une majoration.

1. *Théorèmes limites pour les temps d'occupation.*

On reprend les notations de l'introduction et on pose, pour tout $t \geqslant 0$, $R_t = |B_t|$, de sorte que R est un processus de Bessel de dimension d issu de 0. On note $(L_t^a(R)\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0)$ la famille des temps locaux du processus R. On a

$$(1\text{-a}) \qquad V(a)= \begin{cases} \displaystyle\int_0^a L_\infty^b(R)\, db & \text{si} \quad d \geqslant 3 \\ \displaystyle\int_0^a L_{T_1}^b(R)\, db & \text{si} \quad d = 2. \end{cases}$$

Proposition 1.1 :

Il existe un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, noté X, tel que :

(i) si $d \geqslant 3$, pour tout $t > 0$:

$$(1\text{-b}) \qquad (R_t)^{2-d} = X_{\sup\{u\ ;\ (d-2)^{-2} \int_u^\infty X_s^{-2\left(\frac{d-1}{d-2}\right)} ds > t\}}$$

(ii) si $d = 2$, pour tout $T_1 \geqslant t > 0$:

$$(1\text{-c}) \qquad \log \frac{1}{R_t} = X_{\sup\{u\ ;\ \int_u^\infty \exp(-2X_s) ds > t\}}.$$

En conséquence il existe un carré de processus de Bessel de dimension 2, noté U, tel que :

(i) si $d \geqslant 3$, pour tout $b \geqslant 0$:

$$(1\text{-d}) \qquad L_\infty^b(R) = (d-2)^{-1}\, b^{d-1}\, U_{b^{2-d}},$$

(ii) si $d = 2$, pour tout $1 \geqslant b \geqslant 0$:

(1-e) $$L^b_{T_1}(R) = b\, U_{\log \frac{1}{b}} .$$

Preuve.

Montrons par exemple (1-c). Supposons d'abord que R est issu de $r > 0$. Le calcul stochastique montre l'existence d'un mouvement brownien réel β tel que :

$$\log \frac{1}{R_t} = \log \frac{1}{r} + \int_0^t \frac{d\beta_s}{R_s} .$$

On en déduit qu'il existe un mouvement brownien γ issu de $\log \frac{1}{r}$ tel que

(1-f) $$\log \frac{1}{R_t} = \gamma_{\int_0^t \frac{ds}{R_s^2}} = \gamma_{\inf\{u \,;\, \int_0^u \exp(-2\gamma_s)ds > t\}}$$

soit $\tau_0 = \inf\{s; \gamma_s = 0\}$. Posons pour $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$: $Y_t = \gamma_{\tau_0 - t}$.

Les résultats de retournement de Williams ([11]) montrent que Y est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et arrêté au dernier instant, noté σ_r, où il se trouve en $\log \frac{1}{r}$. (1-f) entraîne alors, pour tout $0 \leqslant t \leqslant T_1$:

$$\log \frac{1}{R_t} = Y_{\sup\{u,\, \int_u^{\sigma_r} \exp(-2Y_s)ds > t\}}.$$

On obtient la représentation (1-c) en faisant tendre r vers 0. La preuve de (1-b) est exactement similaire . (1-d) et (1-e) sont alors des conséquences faciles de (1-b) et (1-c) et de l'identité en loi des processus $(L^b_\infty(X),\ b \geqslant 0)$ et $(U_b,\ b \geqslant 0)$ (voir par exemple Williams [12] p. 38). □

Remarque. On peut également obtenir les représentations (1-d) et (1-e) à l'aide d'une forme généralisée des théorèmes de Ray-Knight sur les temps locaux du mouvement brownien linéaire : voir par exemple M c Gill [6].

Théorème 1.2 :

Soit pour tout $k \geq 1$: $a_k = \begin{cases} 2^{-k} & \text{si} \quad d \geq 3 \\ 2^{-2^k} & \text{si} \quad d = 2 \end{cases}$.

La fonction h étant définie par (0-b) on pose pour $\varepsilon > 0$ et $k \geq 1$:

$$E_k(\varepsilon) = \{V(a_k) \leq \varepsilon h(a_k)\}.$$

Alors, pour tout $\beta < 1$, on peut choisir ε assez petit de façon qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$

$$\text{(1-g)} \qquad P\left[\bigcap_{k=n_0}^{n} E_k(\varepsilon)\right] \leq \exp(-c(n-n_0)^{\beta}).$$

Preuve.

Commençons par le cas $d \geq 3$ qui est un peu plus facile. On note $\delta = d-2$. La représentation (1-b) montre que :

$$V(a_k) \geq \int_{\sigma(a_k^{-\delta})}^{\infty} \delta^{-2}(X_s)^{-2(\frac{\delta+1}{\delta})} ds,$$

où on note : $\sigma(a) = \sup\{s \,;\, X_s = a\}$.

Posons pour $k \geq 1$

$$Y_k = \int_{\sigma(a_k^{-\delta})}^{\sigma(a_{k+1}^{-\delta})} \delta^{-2} X_s^{-2(\frac{\delta+1}{\delta})} ds.$$

Les Y_k sont indépendantes ; un changement d'échelle montre :

$$Y_k \overset{(d)}{=} a_k^2 \int_{\sigma(1)}^{\sigma(2^{\delta})} \delta^{-2}(X_s)^{-2(\frac{\delta+1}{\delta})} ds \geq a_k^2\, \delta^{-2} \int_0^{2^{\delta}-1} (1+u)^{-2(\frac{\delta+1}{\delta})} U_u du$$

où U est comme dans la proposition 1.1, on a utilisé le fait que $(X_{\sigma(1)+u}{}^{-1} \,;\, u \geq 0)$ a même loi que X.

Des minorations très grossières montrent l'existence d'une constante b_δ telle que, pour tout $\theta > 0$:

$$P[Y_k \geq \theta a_k^2] \geq P\left[\delta^{-2} \int_0^{2^{\delta}-1} (1+u)^{-2(\frac{\delta+1}{\delta})} U_u du \geq \theta\right] \geq \exp(-b_\delta \theta).$$

L'indépendance des Y_k entraîne alors

$$P[\bigcap_{k=n_o}^{n} E_k(\varepsilon)] \leqslant \prod_{k=n_o}^{n} P[Y_k < \varepsilon\, \alpha_k^2 \log\log \frac{1}{\alpha_k}]$$

$$\leqslant \prod_{k=n_o}^{n} (1-(k \log 2)^{-\varepsilon b_\delta})$$

d'où :

$$\log P[\bigcap_{k=n_o}^{n} E_k(\varepsilon)] \leqslant \sum_{k=n_o}^{n} \log(1-(k \log 2)^{-\varepsilon b_\delta}$$

$$\leqslant -\sum_{k=n_o}^{n} (k \log 2)^{-\varepsilon b_\delta}$$

$$\leqslant -c_\delta (n-n_o)^{1-\varepsilon b_\delta},$$

pour une certaine constante c_δ. On obtient le résultat voulu en prenant ε assez petit pour que $1-\varepsilon b_\delta > \beta$.

Passons maintenant au cas $d=2$. On utilise la représentation (1-c) pour écrire :

$$V(a_k) = \int_{\tau(\log \frac{1}{a_k})}^{\infty} \exp(-2X_s) 1_{(X_s > \log \frac{1}{a_k})} ds,$$

où on note : $\tau(a) = \inf\{s \geqslant 0 \ ; \ X_s = a\}$.

Posons pour $k \geqslant 1$:

$$Y_k = \int_{\tau(\log \frac{1}{a_k})}^{\tau(\log \frac{1}{a_{k+1}})} \exp(-2X_s) 1_{(X_s > \log \frac{1}{a_k})} ds.$$

A nouveau les Y_k sont indépendantes. Rappelons maintenant l'identité en loi, U désignant toujours un carré de processus de Bessel de dimension deux issu de 0 :

$$\text{(1-h)} \qquad (L^u_{\tau(a)}(X) \ ; \ 0 \leqslant u \leqslant a) \overset{(d)}{=} (u^2\, U_{\frac{1}{u} - \frac{1}{a}} \ ; \ 0 \leqslant u \leqslant a)$$

(voir par exemple Pitman Yor [7], on peut aussi montrer (1-h) en utilisant les mêmes techniques que pour la *proposition 1.1*).

On en déduit :

$$Y_k \overset{(d)}{=} \int_{\log \frac{1}{a_k}}^{\log \frac{1}{a_{k+1}}} \exp(-2b) b^2 \, U_{(b^{-1} - (\log \frac{1}{a_{k+1}})^{-1})} \, db.$$

Le changement de variable $u = b - \log \frac{1}{a_k}$ donne :

$$Y_k \overset{(d)}{=} \int_0^{\log \frac{a_k}{a_{k+1}}} \exp(-2(u + \log \frac{1}{a_k}))\, (u + \log \frac{1}{a_k})^2 \quad \ldots$$

$$\ldots \quad U_{(\log \frac{a_k}{a_{k+1}} - u)(\log \frac{1}{a_{k+1}})^{-1}(\log \frac{1}{a_k}) + u)^{-1}} \, du.$$

$$\overset{(d)}{=} a_k^2 \log \frac{1}{a_k} Z_k,$$

à condition de poser :

$$Z_k = \int_0^{\log \frac{a_k}{a_{k+1}}} du \exp(-2u)(\log \frac{1}{a_k} + u)^2 \quad \ldots$$

$$\ldots \quad (\log \frac{1}{a_k})^{-1} (\log \frac{1}{a_{k+1}})^{-1} \, U_{(\log \frac{a_k}{a_{k+1}} - u)(\log \frac{1}{a_k} + u)^{-1}} \, du.$$

Maintenant, compte tenu du choix de la suite (a_k) on voit que, pour tout $\theta > 0$:

$$P[Y_k \geqslant \theta \, a_k^2 \log \frac{1}{a_k}] = P[Z_k \geqslant \theta] \xrightarrow[k \to \infty]{} P[U_1 \geqslant 4\theta].$$

On obtient ainsi, pour tout $\gamma > 0$ et tout k assez grand :

$$P[Y_k \geqslant \theta \, a_k^2 \log \frac{1}{a_k}] \geqslant \exp(-(2+\gamma)\theta).$$

On écrit ensuite :

$$P[\bigcap_{k=n_0}^{n} E_k(\varepsilon)] \leqslant P[\bigcap_{k=n_0}^{n} \{Y_k < \varepsilon \, a_k^2 \log \frac{1}{a_k} \log \log \log \frac{1}{a_k}\}]$$

$$\leqslant \prod_{k=n_0}^{n} (1 - (k \log 2 + \log \log 2)^{-\varepsilon(2+\gamma)})$$

La fin de la preuve est tout à fait semblable à celle du cas $d \geqslant 3$. □

Remarque. Dans le cas $d=2$ la preuve ci-dessus donne des résultats plus précis que l'énoncé du théorème. On obtient que pour tout $\varepsilon < \frac{1}{2}$ on peut trouver $\beta > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$P\left[\bigcap_{k=n_0}^{n} E_k(\varepsilon)\right] \leqslant \exp\left(-c(n-n_0)^{\beta}\right).$$

On aurait pu faire mieux en modifiant la suite (a_k). Prenons pour $k \geqslant 1$ et $\eta > 1$:

$$a_k = 2^{-\eta^k}.$$

La même méthode montre que pour tout $\varepsilon < \frac{\eta-1}{\eta}$ on peut trouver $\beta > 0$ et $c > 0$ avec :

$$P\left[\bigcap_{k=n_0}^{n} E_k(\varepsilon)\right] \leqslant \exp\left(-c(n-n_0)^{\beta}\right)$$

En prenant η grand on voit que $\limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} \geqslant 1$.

Corollaire 1.3.

<u>Il existe une constante</u> $C_d > 0$ <u>telle que</u>, P <u>p.s.</u> :

$$\limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} = C_d.$$

<u>On a</u> : $C_2 = 1$.

Preuve.

Le *théorème 1.2* montre que, P p.s. :

$$\limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} > 0.$$

Compte-tenu de la loi du tout ou rien il suffit pour montrer la première assertion du *corollaire* d'établir que, P p.s. :

$$\limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} < \infty.$$

Or cette majoration résulte facilement des représentations (1-d) et (1-e) et de la loi du logarithme itéré pour les processus de Bessel (voir Ito-Mc Kean [3] p. 61). Par exemple pour $d=2$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $a > 0$ assez petit :

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^a b\, U_{\log \frac{1}{b}}\, db \\ &\leqslant (1+\varepsilon) \int_0^a b(2 \log \tfrac{1}{b} \log\log\log \tfrac{1}{b})db \\ &\leqslant (1+2\varepsilon)a^2 \log \tfrac{1}{a} \log\log\log \tfrac{1}{a} . \end{aligned}$$

On voit même, toujours dans le cas $d=2$:

$$\limsup_{a\to 0} \frac{V(a)}{h(a)} \leqslant 1.$$

A l'aide des remarques suivant la preuve du *théorème 1.2* on en déduit $C_2 = 1$. □

<u>*Remarques*</u>. Il n'était pas nécessaire de passer par le *théorème 1.2* pour établir le *corollaire 1.3*. En travaillant directement à partir des formules (1-d) et (1-e) et en utilisant la loi du logarithme itéré pour les processus de Bessel on aurait assez facilement établi le résultat du *corollaire 1.3*, y compris l'identification de la constante C_2.

Il semble que les méthodes ci-dessus ne permettent pas d'identifier les constantes C_d pour $d \geqslant 3$. Ciesielski et Taylor [1] ont montré que :

$$C_d = \frac{2}{P_d^2}$$

où P_d est le premier zéro positif de la fonction $J_\mu(z)$ avec $\mu = \frac{d}{2} - 2$.

2. <u>*Etude de la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne*</u> :

Nous commencerons par rappeler un résultat dû à Rogers et Taylor [9], sur les propriétés d'absolue continuité d'une mesure par rapport à une mesure de Hausdorff.

Proposition 2.1 : ([9] lemmes 2 et 3).

Soient ν une mesure positive finie sur la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^d$ et g une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $g(0) = 0$.

On pose pour $\lambda > 0$:

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \limsup_{a\to 0} \frac{\nu(B(x,a))}{g(2\sqrt{d}a)} > \lambda\}$$

$$F(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \limsup_{a\to 0} \frac{\nu(B(x,a))}{g(a)} \leqslant \lambda\},$$

où $B(x,a)$ désigne la boule de centre x de rayon a.

Il existe deux constantes universelles γ_1 et γ_2 (dépendant de d) telles que :

(i) $g\text{-}m(E(\lambda)) \leqslant \frac{\gamma_1}{\lambda}\, \nu(B(0,1))$

(ii) Si E est une partie borélienne de $F(\lambda)$:

$$g\text{-}m(E) \geqslant \frac{\gamma_2}{\lambda}\, \nu(E).$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, il est un peu plus simple d'étudier au lieu de la courbe Γ la courbe Γ_1 qui sera la trajectoire de B entre les instants 0 et $T_1 = \inf\{s \; ; \; |B_s| = 1\}$. Il est équivalent de montrer (0-a) pour Γ ou pour Γ_1.

Corollaire 2.2 :

Soit pour $\varepsilon > 0$:

$$R(\varepsilon) = \{z \in \Gamma_1 \; ; \; \limsup_{a\to 0} \frac{\int_0^{T_1} 1_{(|B_s - z| > a)}\, ds}{h(a)} > \varepsilon\}$$

Alors si $\varepsilon < 2C_d$ on a, P p.s. :

(2-a) $$0 < h\text{-}m(R(\varepsilon)) < \infty.$$

Preuve :

On applique la *proposition 2.1* à la mesure ν définie par :

$$\nu(A) = \int_0^{T_1} 1_{(B_s \in A)}\, ds$$

La propriété (i) montre immédiatement que :

$$h\text{-}m(R(\varepsilon)) \leqslant \frac{4d\gamma_1}{\varepsilon} T_1.$$

On pose ensuite :

$$E = \{ z \in \Gamma_1 \ ; \ \limsup_{a \to 0} \frac{\nu(B(z,a))}{h(a)} = 2C_d \}$$

Le *corollaire 1.3* entraîne $\nu(E) = T_1$. En utilisant la propriété (ii) on obtient :

$$h\text{-}m(R(\varepsilon)) \geqslant h\text{-}m(E) \geqslant \frac{\gamma_2}{2C_d} T_1. \qquad \square$$

Proposition 2.3 :

Posons pour $\varepsilon > 0$:

$$I(\varepsilon) = \Gamma_1 - R(\varepsilon).$$

Alors, P p.s., pour ε assez petit :

(2-b) $$h\text{-}m(I(\varepsilon)) = 0.$$

Preuve :

On note, pour $z \in \Gamma_1$ et $a > 0$:

$$V(z,a) = \int_0^{T_1} 1_{(|B_s - z| < a)}\, ds.$$

On utilise à nouveau la suite $(a_k \ ; \ k \geqslant 1)$ introduite dans la partie 1 et on pose, pour $\delta > 0$ et $k \geqslant 1$:

$$I(\varepsilon,\delta,k) = \{ z \in \Gamma_1 \cap B(0,1-2\delta) \ ; \ V(z,a) \leqslant \varepsilon h(a) \text{ pour tout } a \leqslant a_k \}.$$

Il suffit pour montrer (2-b) d'établir que, dès que ε est assez petit on a, pour tous δ,k ;

$$\text{(2-c)} \qquad h\text{-}m(I(\varepsilon,\delta,k)) = 0.$$

Précisons maintenant le choix de ε. On prend ε_0 assez petit pour que le *théorème 1.2* soit vérifié pour $\beta = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. Un raisonnement simple utilisant la propriété de Markov au temps $T_\delta = \inf\{ s \ ; \ |B_s| = \delta\}$ montre que l'énoncé de ce théorème reste vrai, qui à changer les constantes C et n_0, lorsqu'on remplace $V(a_k)$ par :

$$V_\delta(a_k) = \int_0^{T_\delta} 1_{(|B_s|< a_k)}\, ds.$$

En particulier le choix de ε peut se faire indépendamment de δ. On pose :

$$\varepsilon_1 = (d+2)^{-2}\, \varepsilon_0.$$

Nous allons montrer (2-c) avec $\varepsilon=\varepsilon_1$. On note, pour $n \geqslant 1$, Ω_n l'ensemble des cubes de l'espace de la forme $\{ p_i a_n \leqslant x_i < (p_i+1)a_n \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ où $p_1,\dots p_n$ sont des entiers. Soit N_n le nombre de cubes de Ω_n que rencontre Γ_1.

Lemme 2.4 :

Il existe une constante η_d telle que :

$$E[N_n] \leqslant \begin{cases} \eta_d \dfrac{1}{a_n^2} & \text{si } d \geqslant 3 \\[2ex] \eta_2 \dfrac{1}{a_n^2 \log \frac{1}{a_n}} & \text{si } d = 2. \end{cases}$$

Preuve du lemme.

Traitons par exemple le cas $d=2$. On pose pour $\varepsilon > 0$:

$$S^{\varepsilon} = \{ z \in B(0,1) \ ; \ \inf\{ |B_s - z| \ ; \ 0 \leqslant s \leqslant T_1 \} < \varepsilon \}$$

Alors $a_n^2 N_n \leqslant m(S^{\sqrt{2}\, a_n})$ (m désigne la mesure de Lebesgue).

Il suffit donc pour établir le lemme de montrer que pour une certaine constante K :

$$E[m(S^{\varepsilon})] \leqslant \frac{K}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

Or on voit facilement que :

$$P[z \in S^{\varepsilon}] \leqslant \frac{\log(1+|z|)-\log|z|}{\log(1+|z|)-\log\varepsilon} \wedge 1.$$

D'où

$$E[S^{\varepsilon}] \leqslant 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \left(\frac{\log(1+\rho)-\log\rho}{\log(1+\rho)-\log\varepsilon} \wedge 1 \right) \leqslant \frac{K}{\log \frac{1}{\varepsilon}} . \qquad \square$$

Revenons à la preuve de la *proposition 2.3*. On note M_n le nombre de cubes de Ω_n que rencontre $I(\varepsilon_1,\delta,k)$. On a :

(2-d) $\quad E[M_n] = E\left[\sum_{A \in \Omega_n} 1_{(A \cap \Gamma_1 \neq \emptyset)} P[A \cap I(\varepsilon_1,\delta,k) \neq \emptyset / A \cap \Gamma_1 \neq \emptyset] \right]$

Pour $A \in \Omega_n$ on note $T_A = \inf\{ s \ ; \ B_s \in A\}$. Compte tenu du choix de ε_1 on a pour $n \geqslant k+d$ et $A \in \Omega_n$:

(2-e) $\quad \{A \cap I(\varepsilon_1,\delta,k) \neq \emptyset\} \subset \{A \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\} \cap \left(\bigcap_{p=k+d}^{n} \{V(B_{T_A},a_p) \leqslant \varepsilon_0 h(a_p)\}\right)$

(remarquer que pour $y \in A$: $V(B_{T_A},a_p) \leqslant V(y,a_p+da_n)$).

Si $A \cap I(\varepsilon_1,\delta,k) \neq \emptyset$ et si n est assez grand pour que $d\, a_n \leqslant \delta$ on a : $|B_{T_A}| \leqslant 1-\delta$. La propriété de Markov au temps T_A montre que :

(2-f) $\quad P\left[\bigcap_{p=k+d}^{n} \{V(B_{T_A},a_p) \leqslant \varepsilon_0 h(a_p)\} \right] \leqslant P\left[\bigcap_{p=k+d}^{n} V_{\delta}(a_p) \leqslant \varepsilon_0 h(a_p) \right]$

$$\leqslant \exp(-c(n-k-d)^{\frac{1}{2}})$$

d'après le *théorème 1.2* et le choix de ε_0.

(2-e) et (2-f) entraînent, pour n assez grand et $A \in \Omega_{n_1}$:

$$P\,[A \cap I(\varepsilon_1,\delta,k) \neq \emptyset / A \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\,] \leqslant \exp(-c(n-k-d)^{\frac{1}{2}}).$$

D'où, en revenant à (2-d) :

$$E\,[M_n\,] \leqslant \exp(-c(n-k-d)^{\frac{1}{2}})\ E\,[N_n\,].$$

Pour conclure on remarque d'après la définition d'une mesure de Hausdorff que :

$$h\text{-}m(I(\varepsilon_1,\delta,k)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} M_n\ h(da_n).$$

Le lemme de Fatou entraîne :

$$\begin{aligned} E\,[\,h\text{-}m(I(\varepsilon_1,\delta,k))\,] &\leqslant \liminf_{n\to\infty} E\,[M_n\,]\ h(da_n) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \exp(-c(n-k-d)^{\frac{1}{2}}) h(da_n) E\,[N_n\,] \end{aligned}$$

Les majorations du *lemme 2.4* montrent :

$$E\,[\,h\text{-}m(I(\varepsilon_1,\delta,k))\,] = 0. \qquad \square$$

En regroupant les résultats du *corollaire 2.2* et de la *proposition 2.3* on obtient le :

Théorème 2.5 :

P p.s., $\quad 0 < h\text{-}m(\Gamma_1) < \infty.$

Remarques :

a) La preuve de la *proposition 2.3* montre en fait un peu plus que ce qui nous était nécessaire. Par exemple pour $d \geqslant 3$ posons :

$$g_\alpha(x) = x^2 \exp\,((\log \tfrac{1}{x}\,)^\alpha)$$

Alors la même preuve montre, pour tout $\alpha < 1$ et pour ε assez petit :

$$g_\alpha\text{-}\ m(I(\varepsilon)) = 0.$$

La même remarque vaut pour le cas $d=2$ en remplaçant g_α par :

$$f_\alpha(x) = x^2 \exp((\log \log \frac{1}{x})^\alpha).$$

b) C'est Lévy [5] qui le premier a obtenu la partie majoration du *théorème 2.5*, dans le cas $d \geqslant 3$. La méthode de Lévy consiste à recouvrir indépendamment par des boules les parties de la trajectoire correspondant à des "petits" intervalles dyadiques disjoints. Il apparait un certain nombre d'intervalles "exceptionnels" que Lévy recouvre en utilisant la loi globale du logarithme itéré. Cette méthode ne fournit pas le meilleur résultat en dimension $d=2$, c'est pourquoi nous avons préféré nous inspirer de la méthode de Taylor [10] qui elle s'applique aussi bien en dimension $d \geqslant 3$.

c) Un problème encore ouvert consiste à trouver la "bonne" fonction de mesure pour l'ensemble des points doubles de la trajectoire du mouvement brownien plan. On peut commencer par étudier l'ensemble I des points d'intersection des trajectoires de deux mouvements browniens plans indépendants. La notion de temps local de confluence (voir [2]) permet de construire une mesure μ portée par I, qui est l'analogue de la mesure ν considérée dans la preuve du *corollaire 2.2*. Il semble alors plausible qu'il existe une fonction de mesure g telle que :

$$\text{(2-g)} \qquad \mu(dy) \text{ p.s.} \qquad 0 < \limsup_{a \to 0} \frac{\mu(B(y,a))}{g(a)} < \infty$$

La fonction g serait alors la bonne fonction de mesure pour I. Un premier pas en direction de (2-d) est accompli dans [4] où on montre que :

si $\qquad h_\alpha(x) = x^2 (\log \frac{1}{x})^\alpha$

$$\text{(2-h)} \qquad \mu(dy) \text{ p.s.} \qquad \limsup_{a \to 0} \frac{\mu(B(y,a))}{h_\alpha(a)} = 0 \qquad \text{si } \alpha > 2.$$

On peut déduire de (2-h) que :

$$h_\alpha\text{-}m(I) = \infty \qquad \text{si } \alpha > 2, \ P \text{ p.s.}$$

D'autre part on montre assez facilement que :

$$h_\alpha\text{-}m(I) = 0 \qquad \text{si } \alpha \leqslant 2, \ P \text{ p.s.}$$

REFERENCES :

[1] Z. Ciesielski et S.J. Taylor : First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. Trans. American Math. Soc. 103 (1962), 434-450.

[2] D. Geman, J. Horowitz et J. Rosen : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Prob. 12 (1984), 86-107.

[3] K. Ito et H.P. Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer, New-York (1974).

[4] J.F. Le Gall : Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. En préparation (octobre 1984).

[5] P. Lévy : La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. Giorn. Ist. Ital. Attuari 16 (1953), 1-37.

[6] P. McGill : A direct proof of the Ray-Knight theorem. Séminaire de Probabilités XV. Lecture Notes in Maths 850. Springer, Berlin (1981).

[7] J.W. Pitman et M. Yor : A decomposition of Bessel bridges. Z. Wahrsch. verw. Gebiete 59 (1982) 425-457.

[8] D. Ray : Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. Trans. American Math. Soc. 106 (1963), 436-444.

[9] C.A. Rogers et S.J. Taylor : Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. Mathematika 8 (1961), 1-31.

[10] S.J. Taylor : The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 253-258.

[11] D. Williams : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, I. Proc. London Math. Soc. 28 (1974), 738-768.

[12] D. Williams : Diffusions, Markov processes and martingales. Wiley, New York (1979).

Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI

4, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05-FRANCE.