

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JUAN RUIZ DE CHAVEZ

Sur les intégrales stochastiques multiples

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 248-257

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__248_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES MULTIPLES

par J. Ruiz de Chavez

Les intégrales stochastiques multiples de Wiener et Ito sont un outil important dans la théorie du mouvement brownien. Elles ont été utilisées aussi pour la représentation des v.a. de la tribu engendrée par un processus de Poisson. Dans la théorie classique, il s'agit toujours d'i.s. multiples de fonctions déterministes par rapport à une martingale de carré intégrable. Mais dans le Séminaire de Probabilités X, p. 325-331, P.A. Meyer a introduit la notion de processus prévisible à n dimensions, et d'i.s. d'un tel processus par rapport à une martingale de carré intégrable (M_t) dont le crochet oblique est t :

$$\int_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t} f(\omega, t_1, \dots, t_n) dM_{t_1} dM_{t_2} \dots dM_{t_n}$$

Dans ce travail, nous nous proposons de faire mieux comprendre le rôle joué par la condition $\langle M, M \rangle_t = t$, d'étendre la théorie traitée par Meyer au cas où l'on considère n martingales différentes, ou même n semi-martingales différentes satisfaisant à certaines conditions assez restrictives. Toutefois, il est nécessaire d'imposer, sinon nos restrictions, du moins certaines restrictions : Ed. Perkins vient en effet de donner un exemple¹ de martingale de carré intégrable (M_t) , telle que l'intégrale double $\int_{0 < t_1 < t_2} f(t_1, t_2) dM_{t_1} dM_{t_2}$ ne puisse pas être prolongée comme mesure stochastique en probabilité sur la tribu des processus prévisibles à deux dimensions.

Nous nous bornerons la plupart du temps à l'étude de l'intégrale double, afin d'alléger les notations.

NOTATIONS GENERALES

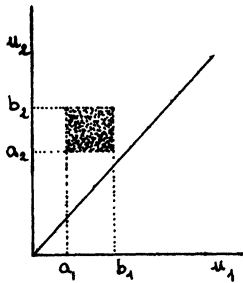
On désigne par $(\Omega, \underline{F}, P, (\underline{F}_t))$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles.

1. Dans ce volume.

On désigne par C^n le cône dans \mathbb{R}_+^n formé des points (u_1, \dots, u_n) tels que $0 < u_1 \dots < u_n$ et par C_t^n l'ensemble analogue défini par les inégalités $0 < u_1 \dots < u_n \leq t$. On appelle processus n-dimensionnel une fonction $X(\vec{u}, \omega) = X(u_1, \dots, u_n, \omega)$ définie sur $C^n \times \Omega$. Un processus $H(\vec{u}, \omega)$ est dit prévisible élémentaire s'il est de la forme suivante

$$(1) \quad H(\vec{u}, \omega) = h(\omega) I_{]a_1, b_1]}(u_1) \dots I_{]a_n, b_n]}(u_n)$$

avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \dots < a_n < b_n < \infty$, et $h(\cdot)$ étant \mathcal{F}_{a_1} -mesurable. Une combinaison



linéaire finie de processus prévisibles élémentaires est un processus dit prévisible simple. Enfin, la tribu prévisible \mathcal{P}^n est engendrée sur $C^n \times \Omega$ par les processus prévisibles élémentaires. Un processus prévisible $H(\vec{u}, \omega)$ est adapté en un sens très restrictif : $H(u_1, u_2, \dots)$ est \mathcal{F}_{u_1} -mesurable. Comme dans la théorie à une dimension, on vérifie que la tribu pré-

visible est engendrée par les processus adaptés continus à gauche.

Soient X^1, \dots, X^n n semimartingales, continues à droite et nulles en 0. Nous définissons pour tout processus prévisible élémentaire H de la forme (1)

$$(2) \quad \begin{aligned} J(H) &= J_\infty(H) = \int_{C^n} H(u_1, \dots, u_n) dX_{u_1}^1 \dots dX_{u_n}^n \\ &= h(\cdot) (X_{b_1}^1 - X_{a_1}^1) \dots (X_{b_n}^n - X_{a_n}^n) \end{aligned}$$

Plus généralement, le processus $H(\vec{u}, \cdot) I_{\{u_n \leq t\}}$ est élémentaire, et pour ce processus l'intégrale multiple précédente vaut

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_{C_t^n} H(u_1, \dots, u_n) dX_{u_1}^1 \dots dX_{u_n}^n &= \\ &= h(\cdot) (X_{b_1}^1 - X_{a_1}^1) \dots (X_{b_{n-1}}^{n-1} - X_{a_{n-1}}^{n-1}) (X_{t \wedge b_n}^n - X_{t \wedge a_n}^n) \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que l'on peut prolonger l'application définie, à valeurs dans L^0 pour (2) et à valeurs dans l'espace S^0 des semimartingales pour (3), en une application linéaire sur l'espace des processus prévisibles simples.

Le problème de l'intégrale stochastique multiple consiste à étendre cette application à tous les processus prévisibles bornés, comme mesure à valeurs dans L^0 (dans S^0), en analogie avec la théorie de l'i.s. à une dimension. Un trait fondamental de la théorie n-dimensionnelle est l'idée de calculer l'intégrale multiple comme intégrale itérée : si $H(\vec{u},.)$ est le processus élémentaire (1), l'intégrale stochastique

$$H'(u_2, \dots, u_n, .) = \int_0^\infty H(u_1, \dots, u_n, .) dX_{u_1}^1$$

(en réalité étendue de 0 à u_2) vaut

$$h(.) (X_{b_1}^1 - X_{a_1}^1) I_{[a_2, b_2]}(u_2) \dots I_{[a_n, b_n]}(u_n) ,$$

le premier facteur étant \mathbb{F}_{a_2} -mesurable puisque $b_1 \leq a_2$. Autrement dit, on retombe ici sur un processus prévisible élémentaire, et l'on obtient l'i.s. multiple en itérant cette opération n fois de la gauche vers la droite. Par combinaison linéaire, le résultat s'étend aux processus prévisibles simples.

CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE DOUBLE. I.

Nous allons étudier ici le cas de deux martingales de carré intégrable M et N. Meyer a étudié le cas où $M=N$ et $\langle M, M \rangle_t = t$. Une extension presque évidente concerne le cas où M et N peuvent être différentes, mais ont des crochets obliques déterministes $\mu(t)$ et $\nu(t)$. Nous nous intéresserons à une autre extension, très facile, mais plus intéressante, dans laquelle les crochets obliques ont des densités bornées $d\langle M, M \rangle_t = m_t dt$, $d\langle N, N \rangle_t = n_t dt$, avec $|m_t| \leq \theta$, $|n_t| \leq \theta$.

THEOREME 1. Soit $H(u, v, \omega)$ un processus prévisible simple. Alors la v.a. $J_t(H) = \int_{u < v \leq t} H_{uv} dM_u dN_v$ appartient à L^2 , avec une norme majorée par

$$(4) \quad E \left[\int_{u < v \leq t} H_{uv}^2 du dv \right]^{1/2}$$

En conséquence, l'i.s. double (sur $[0, t]$) peut être étendue aux proces-
sus prévisibles H pour lesquels l'expression (4) est finie.

En effet, nous pouvons calculer l'i.s. double d'un processus simple comme intégrale itérée :

$$J_t(H) = \int_0^t K_v dN_v \quad \text{avec} \quad K_v = \int_0^\infty H_{uv} dM_u$$

Par conséquent nous avons, d'après la théorie des intégrales à une dimension

$$\begin{aligned} E[J_t(H)^2] &= E\left[\int_0^t K_v^2 d\langle N, N \rangle_v\right] = E\left[\int_0^t K_v^2 n_v dv\right] \leq CE\left[\int_0^t K_v^2 dv\right] \\ &= C \int_0^t E[K_v^2] dv = C \int_0^t E\left[\int_0^\infty H_{uv}^2 d\langle M, M \rangle_s\right] dv \\ &= CE\left[\int H_{uv}^2 d\langle M, M \rangle_u dv\right]. \end{aligned}$$

Nous nous arrêtons un instant pour remarquer que cette formule suffit à prolonger l'intégrale aux processus prévisibles bornés, sans supposer que $d\langle M, M \rangle_t = m_t dt$. Pour une intégrale n-uple, il faudrait cependant supposer que tous les crochets obliques sauf le premier ont des densités bornées, et cette condition n'a aucun intérêt.

Si l'on suppose maintenant que $d\langle M, M \rangle_u \leq C du$, le théorème en résulte immédiatement.

REMARQUE. Il n'y a aucune difficulté à étendre à cette situation le théorème 49 du Sém. Prob. X, p. 329, sur le calcul d'intégrales doubles (en fait quadruples dans cet énoncé...) comme intégrales itérées, sous la condition $E\left[\int_{u < v \leq t} H_{uv}^2 dudv\right] < \infty$. Nous y renverrons le lecteur.

DIGRESSION .

Cette section ne contient que des remarques sur le cas particulier où les crochets $\langle M, M \rangle$ et $\langle N, N \rangle$ sont déterministes, considéré par Meyer dans le Sém. Prob. X . Elle peut être omise sans inconvénient.

Dans ce cas, on a non seulement une majoration de la norme L^2 , mais une isométrie

$$(5) \quad E[J_t(H)^2] = E\left[\int_{u < v \leq t} H_{uv}^2 d\langle M, M \rangle_u d\langle N, N \rangle_v\right]$$

ce qui offre l'avantage de permettre le calcul, par << polarisation >> d'un produit scalaire $E[J_t(H)J_t(K)]$.

En réalité, le cas traité dans le théorème 1 se ramène à celui du Sém. Prob. X par un raisonnement purement probabiliste, qui peut être généralisé à toutes les dimensions. Pour simplifier, supposons que $C=1$. Soit (Q_t) un processus de Poisson compensé de paramètre λ , indépendant de la filtration (\mathbb{F}_t) , et soit $(\bar{\mathbb{F}}_t)$ la filtration obtenue en adjoignant (Q_t) à celle-ci. Alors on a $\langle Q, Q \rangle_t = \lambda t$, et par conséquent les processus

$$M'_t = M_t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sqrt{1-m_s} dQ_s, \quad N'_t = N_t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sqrt{1-n_s} dQ_s$$

sont des $(\bar{\mathbb{F}}_t)$ -martingales avec $\langle M', M' \rangle_t = \langle N', N' \rangle_t = t$. Par conséquent, si (H_{uv}) est prévisible simple pour $(\bar{\mathbb{F}}_t)$, on peut définir l'i.s. double $\int_{u < v \leq t} H_{uv} dM'_u dN'_v = J'_t(H)$, qui satisfait à

$$E[J'_t(H)^2] = E\left[\int_{u < v \leq t} H_{uv}^2 du dv\right].$$

Nous faisons tendre λ vers 0 : la différence $M'_t - M_t$ vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{s \leq t} \Delta Q_s \neq 0 \sqrt{1-m_s} - \sqrt{\lambda} \int_0^t \sqrt{1-m_s} ds$$

et elle tend vers 0 en probabilité. Comme H est un processus simple, ce résultat et le résultat analogue pour N montrent que $J'_t(H)$ tend vers $J_t(H)$ en probabilité. Alors le lemme de Fatou entraîne la majoration de $E[J_t(H)^2]$ par (4).

CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE DOUBLE . II (SEMIMARTINGALES).

Ayant traité le cas des martingales, nous passons au cas de deux semimartingales nulles en 0 X et Y , admettant des décompositions

$$X = M + A \quad ; \quad Y = N + B$$

sur lesquelles nous ferons les hypothèses

$$(6) \quad \begin{aligned} d\langle M, M \rangle_t &= m_t dt, \quad d\langle N, N \rangle_t = n_t dt, \quad dA_t = a_t dt, \quad dB_t = b_t dt \\ \text{avec } 0 \leq m_t, n_t &\leq C, \quad \int_0^t a_s^2 ds, \int_0^t b_s^2 ds \leq C. \end{aligned}$$

Ces hypothèses peuvent sembler très fortes, mais nous verrons plus tard qu'elles peuvent être élargies par localisation.

THEOREME 2. Soit (H_{st}) un processus prévisible simple. On a sous les conditions précédentes

$$(7) \quad E\left[\left(\int_{s < t} H_{st} dX_s dY_t\right)^2\right] \leq 16C^2 E\left[\int_{s < t} H_{st}^2 ds dt\right].$$

En effet, tout se ramène à vérifier que les quatre intégrales suivantes sont majorées par $C^2 E\left[\int_{s < t} H_{st}^2 ds dt\right]$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E\left[\left(\int H_{st} dM_s dN_t\right)^2\right] \quad \text{ii)} \quad E\left[\left(\int H_{st} dA_s dN_t\right)^2\right] \\ \text{iii)} \quad E\left[\left(\int H_{st} dM_s dB_t\right)^2\right] \quad \text{iv)} \quad E\left[\left(\int H_{st} dA_s dB_t\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Pour i), le travail a déjà été fait dans le théorème 2.

Pour ii), nous l'interprétons comme une intégrale stochastique itérée, à laquelle nous appliquons le calcul usuel :

$$\text{ii)} = E\left[\int_0^\infty d\langle N, N \rangle_t \left(\int_0^t H_{st} dA_s\right)^2\right] \leq CE\left[\int_0^\infty dt \left(\int_0^t H_{st} dA_s\right)^2\right]$$

Nous écrivons que $dA_s = a_s ds$, et l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_0^t H_{st} a_s ds\right)^2 \leq \left(\int_0^t H_{st}^2 ds\right) \left(\int_0^t a_s^2 ds\right) \leq C \int_0^t H_{st}^2 ds$$

et aussitôt l'inégalité cherchée.

Pour iii), nous écrivons d'abord l'inégalité de Schwarz

$$\begin{aligned} \text{iii)} &= E\left[\left(\int_0^\infty b_t \left(\int_0^t H_{st} dM_s\right) dt\right)^2\right] \leq E\left[\left(\int_0^\infty b_t^2 dt\right) \left(\int_0^\infty dt \left(\int_0^t H_{st} dM_s\right)^2\right)\right] \\ &\leq C \int_0^\infty E\left[\left(\int_0^t H_{st} dM_s\right)^2\right] dt \leq C^2 \int_0^\infty E\left[\int_0^t H_{st}^2 ds\right] dt \end{aligned}$$

et aussitôt l'inégalité cherchée.

Enfin, iv) résulte immédiatement du théorème de Fubini. \square

Bien entendu, le théorème 2 permet l'extension de l'intégrale double aux processus prévisibles (H_{st}) tels que le côté droit de (7) soit fini. Ici encore, il existe une version du calcul de l'intégrale multiple comme intégrale itérée, que nous laisserons de côté.

Le problème est maintenant, comme dans le cas de l'intégrale stochastique ordinaire, de remplacer les conditions d'intégrabilité par des conditions locales, si possible invariantes par changement de loi.

L'idée la plus naturelle consiste à utiliser l'outil des changements de temps, très fructueuse pour les intégrales stochastiques simples :

si $X_t = M_t + A_t$ est une semimartingale telle que $\langle M, M \rangle$ et A soient continus, il existe un changement de temps (τ_t) continu et strictement croissant tel que la semimartingale $X'_t = X_{\tau_t} = M_{\tau_t} + N_{\tau_t} = M'_t + A'_t$ de la filtration $\mathbb{F}'_t = \mathbb{F}_{\tau_t}$ satisfasse à

$$d\langle M', M' \rangle_t \leq dt, \quad dA'_t \leq dt.$$

et il n'y a aucune difficulté à faire cela simultanément pour un nombre fini de semimartingales. Mais cette méthode ne peut être utilisée, car si (H_{st}) est un processus prévisible, le processus $(H_{\tau_s \tau_t})$ n'est pas prévisible par rapport à (\mathbb{F}'_t) en général ($H_{\tau_s \tau_t}$ n'est pas \mathbb{F}_{τ_s} -mesurable).

On va donc se borner à une simple localisation. Soit T un temps d'arrêt : si X et Y satisfont aux hypothèses (6), il en est évidemment de même des semimartingales arrêtées X^T, Y^T . Soit (H_{uv}) un processus prévisible simple ; introduisons les deux processus, manifestement continus à droite et adaptés

$$(8) \quad J_t(H) = \int_{u < v \leq t} H_{uv} dX_u dY_v, \quad J_t^{(T)}(H) = \int_{u < v \leq t} H_{uv} dX_u^T dY_v^T$$

On a évidemment $J_t = J_t^{(T)}$ pour $t \leq T$, et $J_T = J_\infty^{(T)}$. Toutefois, le second ne peut s'interpréter comme l'intégrale stochastique double, par rapport à $dX_u dY_v$, du processus $(H_{uv} I_{\{v \leq T\}})$: en effet, ce processus n'est pas prévisible.

Si l'on considère un processus prévisible (H_{uv}) non nécessairement simple, mais tel que $E[\int_{u < v} H_{uv}^2 du dv] < \infty$, on peut définir simultanément les deux processus continus à droite $J_t(H)$ et $J_t^{(T)}(H)$, et il est très facile de vérifier, à partir des remarques précédentes, que l'on a encore $J_t = J_t^{(T)}$ pour $t \leq T$. Nous allons utiliser cette propriété pour localiser l'intégrale stochastique double.

DEFINITION. Nous disons qu'une semimartingale X , nulle en 0, appartient à la classe (S) (ou classe de Stricker, qui a étudié ces processus dans le cas continu) si X est spéciale, et admet une décomposition canonique $X=M+A$, avec

$$\begin{aligned} d\langle M, M \rangle_t &= m_t dt, \text{ où } (m_t) \text{ est prévisible localement borné,} \\ dA_t &= a_t dt, \text{ où } (a_t) \text{ est prévisible localement dans } L^2. \end{aligned}$$

Stricker a établi dans le cas continu le résultat (nullement évident sur les formules de changement de loi) que cette classe est invariante par changement de loi. En effet, pour une semimartingale continue, l'appartenance à la classe (S) signifie que l'intégrale stochastique généralisée $H \cdot X$ a un sens pour tout processus prévisible (H_t) qui est localement de carré intégrable par rapport à la mesure dt .

THEOREME 3. Si les semimartingales X et Y appartiennent à la classe (S), l'intégrale stochastique double $\int_{u < v} H_{uv} dX_u dY_v$ peut être définie par localisation, pour tout processus prévisible (H_{uv}) tel que la v.a.

$$\int_{u < v} H_{uv}^2 du dv$$

soit p.s. finie.

La démonstration est à peu près évidente : il suffit de construire une suite croissante de temps d'arrêt T_n , telle que

$$P\{T_n < \infty\} \downarrow 0, \quad \int_{u < v \leq T_n} H_{uv}^2 du dv \leq n$$

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T_n} \text{ess } m_t &\leq n, \quad \sup_{t \leq T_n} n_t \leq n \\ \int_0^{T_n} a_t^2 dt &\leq n, \quad \int_0^{T_n} b_t^2 dt \leq n \end{aligned}$$

où l'on a posé $X=M+A$, $d\langle M, M \rangle_t = m_t dt$, $dA_t = a_t dt$, et de même $Y=N+B...$

On définit l'i.s. par recollement des i.s.

$$J_t^n(H) = \int_{u < v \leq t} H_{uv} dX_u^n dY_v^n$$

qui existent d'après le théorème 2, et qui sont compatibles en ce sens que $J_t^{n+1} = J_t^n$ pour $t \leq T_n$. Nous laissons les détails au lecteur.

LE CONTRE-EXEMPLE DE PERKINS (FORME ELEMENTAIRE)

Nous remercions M. E. Perkins de nous avoir communiqué ce contre-exemple, et autorisé à le reproduire ici.

Nous nous donnons sur un espace probabilisé Ω une suite $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_\infty$ de v.a. de Bernoulli indépendantes. Nous nous donnons aussi une suite $0 < s_1 < s_2 < \dots$ d'éléments de $[0, 1[$, telle que $\lim_n s_n = 1$. Nous définissons une filtration (\mathbb{F}_t) , d'abord pour $0 \leq t < 1$

pour $t < s_1$, \mathbb{F}_t est triviale ;

pour $s_1 \leq t < s_2$, \mathbb{F}_t est engendrée par ε_1 ;

pour $s_2 \leq t < s_3$, \mathbb{F}_t est engendrée par $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; etc.

Notre première martingale de carré intégrable sera

$$M_t = \sum_{s_n \leq t} \varepsilon_n / n \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Pour définir la filtration au delà de 1, et la seconde martingale, nous posons $x_n = (1 + \varepsilon_n)/2$ (à valeurs dans $\{0, 1\}$) et

$$T = 1 + \sum_i x_i 2^{-i} \quad (\text{aussi } T_n = 1 + \sum_{i \leq n} x_i 2^{-i})$$

Cette v.a. est \mathbb{F}_1 -mesurable, à valeurs dans l'intervalle $[1, 2]$ avec une répartition uniforme. Nous posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$N_t = \varepsilon_\infty \mathbb{I}_{\{t \geq T\}}$$

On a donc $N_t = 0$ pour $t \leq 1$, $N_t = \varepsilon_\infty$ pour $t \geq 2$, et nous désignons par \mathbb{F}_t pour $t \geq 1$ la filtration continue à droite engendrée par \mathbb{F}_1 et par le processus (N_t) . Il est facile de voir que (N_t) est une martingale de carré intégrable, avec $[N, N]_t = \langle N, N \rangle_t = \mathbb{I}_{\{t \geq T\}}$.

Considérons un processus de la forme

$$H_{uv}^n(\omega) = \mathbb{I}_{[s_{n-1}, s_n]}(u) \mathbb{I}_{[T_{n-1}(\omega), T_{n-1}(\omega) + 2^{-n}]}(v)$$

Il est très facile de vérifier que ce processus est adapté et continu à gauche, donc prévisible (T_{n-1} est $\mathbb{F}_{s_{n-1}}$ -mesurable ; H_{uv}^n n'est pas un processus prévisible élémentaire, mais simple). On a

$$\begin{aligned} \int H_{uv}^n dM_u dN_v &= (M_{s_n} - M_{s_{n-1}})(N_{T_{n-1} + 2^{-n}} - N_{T_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{n} \varepsilon_n \cdot \varepsilon_\infty \mathbb{I}_{\{x_n = 0\}} \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

(p.s., car il faut exclure l'ensemble de mesure nulle $x_{n+1}=x_{n+2}=\dots=0$). Cela vaut simplement $\frac{1}{n}\varepsilon_{\infty}$ (p.s.) , et l'on voit que, bien que la série $\sum_n H_{uv}^n$ converge vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible, la série des v.a. $\int H_{uv}^n dM_u dN_v$ ne converge pas en probabilité. Il n'existe donc pas de définition raisonnable de l'intégrale double, ni en moyenne quadratique ni en aucun autre sens¹.

On trouvera dans ce volume une forme plus élaborée de ce contre-exemple, dans laquelle la martingale (M_t) qui ne permet pas la construction d'intégrales stochastiques doubles est une intégrale stochastique brownienne.

1. On remarquera que (N_t) est à variation totale égale à 1, donc l'exemple montre aussi les difficultés à construire des i.s. doubles mixtes (martingale \times processus à variation intégrable). Dans ce cas ε_{∞} est inutile.