JUAN RUIZ DE CHAVEZ

Compensation multiplicative et « produits de Wick »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 242-247
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__242_0>

COMPENSATION MULTIPLICATIVE ET << PRODUITS DE WICK >>

par J. Ruiz de Chavez

1. Dans son article [1], D. Surgailis propose (à la suite de travaux de physique théorique) une définition générale de << produit de Wick >> $:X_1X_2\ldots X_n:$ de variables aléatoires X_i , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, et possédant suffisamment de moments - pour simplifier la discussion, nous les supposerons ici <u>bornées</u>.

L'idée générale d'un tel << produit >> est celle d'un calcul qui néglige les moyennes : l'application $(X_1,\ldots,X_n)\longmapsto :X_1\ldots X_n:$ est n-<u>linéaire symétrique</u> , à valeurs dans l'espace des v.a. <u>de moyenne nulle</u>. D'autre part, le résultat ne dépend que des v.a. $X_i-E[X_i]$, ce qui revient à dire que $:X_1\ldots X_n: = 0$ <u>dès que l'une des</u> X_i <u>est constante</u> . A noter que l'on n'exige aucune associativité : il n'y a pas de relation imposée entre le produit de Wick d'ordre 3 $:X_1X_2X_3:$ et le produit de Wick d'ordre 2 $:(X_1X_2)X_3:$, par exemple.

Puisque l'application est par définition n-linéaire symétrique, elle se ramène par polarisation au calcul des << puissances de Wick >> $:X^n:$, et la définition proposée par Surgailis est la suivante

$$(1)\qquad \frac{e^{\lambda X}}{E[e^{\lambda X}]} = \Sigma_n \frac{\lambda^n}{n!} :X^n: \qquad :X^n: = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\frac{e^{\lambda X}}{E[e^{\lambda X}]}\Big|_{\lambda=0}$$

qui donne par polarisation la formule

$$(1')\qquad :X_1\ldots X_n: = \frac{\partial^n}{\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_n}\frac{e^{\lambda_1X_1+..\lambda_nX_n}}{E[e^{\lambda_1X_1+..\lambda_nX_n}]}\Big|_{\lambda_1=..\lambda_n=0}$$

mais nous ne nous occuperons pas de (1'). Nous ne nous occuperons pas non plus d'examiner si (1) est l'unique définition acceptable des puissances de Wick. Nous résumerons d'après Surgailis quelques unes des propriétés des produits ainsi définis, et l'objet principal de cette note consistera à étendre cette notion à un espace probabilisé <u>filtré</u> .

- Désignons par m_i le i-ième moment de X ($m_0=1$, $m_i=E[X^i]$). Alors la formule (1) prend la forme

$$\Sigma_n \frac{\lambda^n}{n!} X^n = (\Sigma_i \frac{\lambda^i}{i!}m_i)(\Sigma_j \frac{\lambda^j}{j!} :X^j:)$$

d'où l'on tire sans peine que $:X^j:$ est un polynôme $P_j(X)$, de terme dominant X^j , et dont les coefficients dépendent de $m_1,\ldots,m_j$. Par exemple

$$(2)\qquad \begin{aligned} P_1(X) &= X-m_1 \\ P_2(X) &= X^2-2m_1P_1(X)-m_2 = X^2-2m_1X+(2m_1^2-m_2) \\ P_3(X) &= X^3-3m_1P_2-3m_2P_1-m_3 = X^3-3m_1X^2+3(2m_1^2-m_2)X \\ &\qquad -6m_1^3+6m_2m_1-m_3 \end{aligned}$$

(si $m_1=0$: X , X^2-m_2 , $X^3-3m_2X-m_3$) . Le calcul peut être allégé par la remarque de Surgailis que $P_n' = nP_{n-1}$ pour tout n , ce qui ramène le calcul de P_n à celui de son terme constant, déterminé par la relation $E[P_n(X)]=0$.

Les physiciens théoriciens sont amenés à faire des calculs de produits de Wick de v.a. gaussiennes, pour lesquels ils ont développé un procédé combinatoire. L'un des objets principaux du travail de Surgailis consiste à étendre ce procédé aux produits de Wick d'un nombre quelconque de v.a., mais nous ne reproduirons pas ici cette méthode de calcul.

2. Notre point de départ sera le suivant : munissons $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ de la filtration discrète triviale pour laquelle $\underline{\underline{F}}_0$ est la tribu dégénérée, et $\underline{\underline{F}}_1=\underline{\underline{F}}$. Alors si X **est** une v.a. bornée - que nous supposons pour simplifier d'espérance nulle - le processus $\xi=(0,X)$ est une martingale, dont le processus $(1, e^X/E[e^X])$ est en quelque sorte une << martingale exponentielle >> ; notons la $\varepsilon(\xi)$ pour la distinguer de l'exponentielle de Doléans, qui est ici simplement $\mathcal{E}(\xi)=(1,1+X)$. Les puissances de Wick sont alors définies par le développement de $\varepsilon(\lambda X)$ en puissances de λ . On voit tout de suite que l'exponentielle de Doléans ne donne aucun résultat intéressant.

Nous nous proposons d'étendre l'<<exponentielle ε >> en temps continu. A cet effet, nous remarquons que le processus $(1,e^X)$ est une <u>sousmartingale positive</u>, le processus $(1,E[e^X])$ un <u>processus croissant prévisible</u>, et que le quotient du premier processus par le second est une martingale. Autrement dit, si maintenant $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t),P)$ est un espace probabilisé filtré , si (M_t) est une martingale locale nulle en 0 (à sauts bornés pour fixer les idées), on est amené à décomposer la sousmartingale locale e^{M_t} en un produit d'un processus croissant prévisible A_t par une martingale locale positive N_t ($A_0=N_0=1$) , et à poser $\varepsilon(M)=N$; les << puissances de Wick >> $:M^n:$ seront alors les martingales locales définies par

$$(3)\qquad \varepsilon(\lambda M) = \Sigma_n \frac{\lambda^n}{n!} :M^n:$$

Si l'on remplaçait ici ε par l'exponentielle de Doléans $\mathcal{E}$, on trouverait ainsi des intégrales stochastiques itérées de M (Sém. X p. 318). Il se trouve que, lorsque la martingale (M_t) est quasi-continue à gauche, l'exponentielle ε coincide avec la seconde exponentielle de la théorie des martingales, étudiée par de nombreux auteurs (Kunita-Watanabe, Jacod, Yor..., on consultera spécialement l'article de ce dernier auteur dans Sém. Prob. X). Mais il nous semble que le cas général - nécessaire pour inclure la filtration triviale considérée plus haut - n'a jamais été traité explicitement dans la littérature probabiliste.

3. Notre outil principal sera la décomposition multiplicative des sousmartingales positives, donnée par Yoeurp et Meyer dans le Sém. Prob. X , p. 501-505. Nous allons commencer par rappeler leur résultat, et par l'exprimer autrement.

Nous désignons par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, avec une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Nous considérons une <u>sousmartingale positive</u> U , telle que $U_0=1$, localement bornée inférieurement. Nous désignons par

$$U = 1 + V + H \tag{4}$$

sa décomposition canonique : V est une martingale locale, H un processus croissant prévisible, nul en 0 . Nous posons

$$N_t = \int_{]0,t]} \frac{dV_s}{\dot{U}_s} \quad (\dot{U} \text{ est la projection prévisible de } U) \tag{5}$$

qui est une martingale locale, et

$$B_t = \int_{]0,t]} \frac{dH_s}{\dot{U}_s} \tag{6}$$

qui est un processus croissant prévisible nul en 0 . Nous poserons aussi

$$\hat{\mathcal{E}}(B)_t = 1/\mathcal{E}(-B)_t = e^{B_t^c} \prod_{s\leq t} (1-\Delta B_s)^{-1} \tag{7}$$

où (B_t^c) est la partie continue du processus croissant (B_t) . Alors $\hat{\mathcal{E}}(B)$ est un processus croissant prévisible égal à 1 en 0 , et la décomposition multiplicative de U est

$$U = \mathcal{E}(N)\hat{\mathcal{E}}(B) \tag{8}$$

(Sém. Prob. X, p. 502, formule (8)).

Nous allons modifier un peu cette expression. En un temps d'arrêt prévisible T , nous avons

$$\dot{U}_T = E[U_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \quad , \quad \Delta H_T = E[U_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]-U_{T-} \quad , \quad \Delta B_T = 1 - \frac{U_{T-}}{E[U_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]}$$

Soit P la réunion d'une suite de graphes prévisibles disjoints T_n , contenant tous les sauts prévisibles de U . On a pour la partie martingale de la décomposition multiplicative - celle qui nous intéresse - l'expression

$$\mathcal{E}(N)_t = U_t e^{-B_t^c} \prod_{\substack{s\leq t \\ s\in P}} U_{s-}/\dot{U}_s \tag{9}$$

4. Nous considérons une <u>martingale</u> X nulle en 0 , et supposons par exemple que X est <u>à sauts bornés</u>, de sorte que $U=e^X$ est une sousmartingale locale, à laquelle s'applique la théorie précédente. Nous avons d'après la formule d'Ito

$$U_t = 1 + \int_0^t e^{X_{s-}} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{X_{s-}} d\langle X^c, X^c\rangle_s + \Sigma_{s\leqq t} e^{X_{s-}} e(\Delta X_s)$$

en posant $e(x)=e^x-1-x$. Il nous faut écrire la décomposition canonique de U : la première intégrale stochastique est une martingale, la seconde intégrale est un processus croissant continu, mais la dernière somme est un processus croissant non prévisible en général. Plus précisément, si nous posons

(10) $$\Sigma_t = \Sigma_{s\leqq t}\, e(\Delta X_s) \qquad C_t = \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_s$$

et désignons par $\tilde{\Sigma}$ le compensateur prévisible de S , nous avons

$$U_t = 1+\int_0^t U_{s-}dX_s + \int_0^t U_{s-}d(C+\Sigma)_s = 1+\int_0^t U_{s-}d(X+\overset{c}{\Sigma})_s + \int_0^t U_{s-}d(C+\tilde{\Sigma})_s$$
$$= 1 + \quad V_t \quad + \quad H_t$$

où $\overset{c}{\Sigma}$ est la martingale locale $\Sigma-\tilde{\Sigma}$, et ceci est la décomposition canonique (4). Il faut calculer $\tilde{\Sigma}$; or Σ_t est la somme de deux termes : le premier vaut

$$\Sigma'_t = \Sigma_{T_n\leqq t}\, e(\Delta X_{T_n}) \quad \text{(somme sur des temps prévisibles } T_n \text{)}$$

et le second vaut

$$\Sigma''_t = \Sigma_{R_n\leqq t}\, e(\Delta X_{R_n}) \quad \text{(somme sur des temps totalement inaccessibles } R_n \text{)}$$

Pour le second terme, la compensation est donnée par la théorie de la mesure de Lévy (Sém. X, p.)

(11) $$\tilde{\Sigma}''_t = \int_0^\infty (e^x-1-x)\nu_t(\omega,dx)$$

Pour le premier, nous avons

$$\tilde{\Sigma}'_t = \Sigma_{T_n\leqq t} E[e^{\Delta X_{T_n}}-1-\Delta X_{T_n} | \underline{\underline{F}}_{T_n-}]$$

dont nous n'avons pas besoin de connaître la valeur exacte pour appliquer (9) : il nous suffit de noter que ce processus croissant est <u>purement discontinu</u> : nous pouvons alors identifier H^c

$$H^c_t = \int_0^t U_{s-}d(C+\tilde{\Sigma}'')_s = \int_0^t \dot{U}_s d(C+\tilde{\Sigma}'')_s$$

(12) $$B^c_t = \int_0^t dH^c_s/\dot{U}_s = C_t+\tilde{\Sigma}''_t$$

D'autre part, en un temps prévisible T_n nous avons

$$\dot{U}_{T_n}/U_{T_n-} = E[e^{X_{T_n}}|\underline{\underline{F}}_{T_n-}]/e^{X_{T_n-}} = E[e^{\Delta X_{T_n}}|\underline{\underline{F}}_{T_n-}]$$

d'où finalement l'exponentielle $\varepsilon(X)$ que nous cherchons

$$(13)\qquad \varepsilon(X)_t = \frac{\exp[X_t - \frac{1}{2}<X^c,X^c>_t - \int_0^\infty (e^x-1-x)\nu_t(dx)]}{\prod_{T_n\leq t} E[e^{\Delta X_{T_n}}|\underline{\underline{F}}_{T_n-}]} \quad (1)$$

Si la martingale X est quasi-continue à gauche, cette formule se réduit au numérateur, et l'on retrouve la seconde exponentielle classique. Si X est une v.a. d'intégrale nulle, et la filtration est discrète à la façon du §2 , on retrouve simplement $e^X/E[e^X]$, notre point de départ.

5. Si X est une martingale locale nulle en 0 et satisfaisant à des conditions d'intégrabilité locales convenables (à sauts bornés, par ex.), nous définissons formellement les puissances de Wick $:X^n:$ par la formule

$$(14)\qquad \varepsilon(\lambda X) = \Sigma_n \frac{\lambda^n}{n!} :X^n:$$

Par définition, le calcul de Wick est un calcul qui ignore les moyennes. Donc, si X est une semi-martingale spéciale quelconque, de décomposition canonique $X=X_0+M+A$, nous conviendrons que

$$(15)\qquad :X^n: = :M^n: \quad \text{pour tout } n \ .$$

Le calcul des puissances de Wick semble très compliqué. Cependant, soit (X_t) un processus à accroissement indépendants, non nécessairement homogène dans le temps, nul en 0 , de moyenne nulle et satisfaisant à des conditions d'intégrabilité convenables. Alors aussi bien le crochet $<X^c,X^c>$ que la mesure de Lévy ν sont déterministes, et de plus le dénominateur de (13) est 1 s'il n'y a pas de discontinuités fixes, ce que nous supposerons. Alors $\varepsilon(X)_t$ est de la forme $\exp(X_t-c_t)$, où c_t est une constante. Comme $\varepsilon(X)$ est une martingale locale égale à 1 à l'origine, toujours en supposant une intégrabilité suffisante, on a $E[\varepsilon(X)]=1$, donc

$$\varepsilon(X)_t = e^{X_t}/E[e^{X_t}]$$

Il en résulte que, dans ce cas, les produits de Wick $:X^n:_t$ se réduisent aux produits de Wick élémentaires $:(X_t)^n:$, calculés comme variables aléatoires, sans faire intervenir de filtration.

Un cas particulier intéressant est celui où $X_t = N_t-ct$, N_t étant un processus de Poisson de paramètre c . Dans ce cas

1. On peut écrire au dénominateur $E[e^{\Delta X_T}|\underline{\underline{F}}_{T-}] = 1 + E[e^{\Delta X_T}-1-\Delta X_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$, ce qui montre la convergence du produit.

$$\varepsilon(\lambda X)_t = e^{\lambda X_t} / e^{ct(e^\lambda-1-\lambda)} \qquad \mathcal{E}(\mu X)_t = (1+\mu)^{X_t+ct} e^{-\mu ct}$$

et les deux exponentielles coïncident si $1+\mu=e^\lambda$; mais les puissances de Wick <u>ne coincident pas</u> avec les intégrales itérées d'Ito, qui correspondent au développement de l'exponentielle suivant les puissances de μ , et non de λ .

Par exemple, on a $E[X_t]=0$, $E[X_t^2]=E[X_t^3]=ct$, donc en appliquant (2)

$$:(X_t)^3: \ = X_t^3-3ctX_t-ct$$

tandis que le 3e polynôme de Charlier (Sém. X, p.320) est $\frac{1}{6}(x^3-3x^2-3xy+2x+2y)$, de sorte que la 3e intégrale stochastique itérée d'Ito est

$$\begin{aligned} 6\iiint_{s_1<s_2<s_3\leqq t} dX_{s_1} dX_{s_2} dX_{s_3} &= X_t^3-3X_t^2-3ctX_t+2X_t+2ct \\ &= :(X_t)^3: \ -3(X_t^2-ct) \end{aligned}$$

Donc le produit de Wick $:(X_t)^3:$ n'est pas la projection de X_t^3 sur le troisième chaos de Poisson.

CALCULS EXPLICITES. Les premières << puissances de Wick >> d'une martingale locale X sont

$$:X_t^2: \ = X_t^2-\langle \overset{c}{X},\overset{c}{X}\rangle_t-\int_{\mathbb{R}} x^2\nu_t(dx) - \Sigma_{T_n\leqq t} E[\Delta X_{T_n}^2 \,|\, \underline{\underline{F}}_{T_n-}]$$

$$\begin{aligned} :X_t^3: \ = X_t^3 - 3X_t(\langle \overset{c}{X},\overset{c}{X}\rangle_t+\int x^2\nu_t(dx) + \Sigma_{T_n\leqq t}E[\Delta X_{T_n}^2 \,|\, \underline{\underline{F}}_{T_n-}]) \\ -\int x^3\nu_t(dx) - \Sigma_{T_n\leqq t} E[\Delta X_{T_n}^3 \,|\, \underline{\underline{F}}_{T_n-}] \ . \end{aligned}$$

REFERENCES

[1]. SURGAILIS (D.). On Poisson multiple stochastic integrals and associated equilibrium Markov processes. Proc. IFIP-ISI international conf. on random fields, Bangalore 1982. Lect. Notes in Inf. Control. 49, Springer Verlag.